Rendiconti di Matematica, Serie VII
Volume 37, Roma (2016), 137 – 145

Guido Castelnuovo e la geometria delle curve algebriche: dalla ricerca alla didattica

CLAUDIO FONTANARI

ABSTRACT: *We focus on two significant aspects of the deep relationship between Guido Castelnuovo's scientific research in the field of algebraic curves and their moduli spaces, on one hand, and teaching practice at both university and school level, on the other.*

1 – Introduction

Ricorda Emma Castelnuovo nelle prime pagine di *Didattica della matematica* ([1], pagina 6):

> Ci domandiamo talvolta – dice Guido Castelnuovo in una relazione letta all'apertura della Conférence internationale de l'enseignement mathématique, tenutasi a Parigi nel 1914 – se il tempo che dedichiamo alle questioni d'insegnamento non sarebbe meglio impiegato nella ricerca scientifica. Ebbene, rispondiamo che è un dovere sociale che ci obbliga a trattare questi problemi. Non basta in effetti produrre la ricchezza; occorre anche procurare che la sua distribuzione avvenga senza ritardi e dispersioni. E non è forse la scienza una ricchezza, quella che forma il nostro orgoglio e che è la fonte delle nostre gioie più pure? non dobbiamo forse facilitare ai nostri simili l'acquisizione del sapere che è, insieme, potenza e felicità?

Qui intendo documentare due momenti particolarmente significativi in cui la ricerca scientifica di Guido Castelnuovo sulle curve algebriche e i loro spazi di moduli è stata trasferita in ambito didattico. Il primo riguarda i corsi di Geometria Superiore tenuti da Castelnuovo a Roma tra il 1903 e il 1923, dove la teoria delle curve

KEY WORDS AND PHRASES: *Guido Castelnuovo – Emma Castelnuovo – Mathematics teaching – Algebraic curves – Moduli spaces*
A.M.S. CLASSIFICATION: 01A60, 97D20, 14H10.

algebriche viene presentata nei suoi vari aspetti geometrici, analitici e algebrici, mentre il secondo individua un filo rosso tra la ricerca di Guido e la didattica di Emma Castelnuovo, che introduce l'idea degli spazi di moduli nella scuola media.

Il materiale raccolto è stato presentato dall'autore nelle conferenze *Guido Castelnuovo docente di Geometria Superiore* (*In onore di Guido Castelnuovo*–Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Venezia, 16 maggio 2015) e *Sia benedetto questo errore! La pericolosa intuizione del caso limite da Guido a Emma Castelnuovo* (XX-XI Convegno UMI-CIIM–*Fare matematica nella scuola di tutti–dedicato a Emma Castelnuovo*, Salerno, 18 ottobre 2013).

Questa ricerca è stata parzialmente finanziata dal progetto FIRB 2012 *Spazi di moduli e applicazioni* e dal GNSAGA dell'INdAM.

2 – I corsi universitari di Geometria Superiore: le curve algebriche tra geometria, analisi e algebra

Nel ventennio 1903-1923, Guido Castelnuovo ha dedicato cinque corsi di Geometria Superiore alle curve algebriche:

- 1904-05: *Sulle curve algebriche*;
- 1905-06: *Geometria sulle curve – Curve algebriche sghembe*;
- 1912-13: *Geometria sulle curve algebriche*;
- 1917-18: *Curve algebriche piane*;
- 1922-23: *Curve algebriche piane e sghembe.*

Grazie al prezioso lavoro di digitalizzazione curato da Paola Gario (cfr. [9]), gli appunti autografi di Castelnuovo per le proprie lezioni di Geometria Superiore, che consistono in un breve riassunto degli argomenti da trattare, sono disponibili in rete, anche se purtroppo non ancora trascritti. È invece disponibile in [6] la trascrizione (a cura di Natascia Zangani) di un quaderno manoscritto ritrovato da Ciro Ciliberto nel fondo Franchetta e contenente gli appunti di un anonimo uditore dell'ultimo corso tenuto nell'a.a. 1922-23 da Castelnuovo, che a partire dall'anno accademico successivo passerà sulla cattedra di Matematiche Complementari per lasciare il posto a Federigo Enriques, trasferitosi a Roma dall'Università di Bologna.

L'introduzione manoscritta al corso *Geometria sulle curve* (1904-05) dipinge con rapide pennellate la visione di Castelnuovo della teoria delle curve algebriche:

> *Oggetto del corso* – Una ricerca geometrica è caratterizzata dagli enti che studia e dalle trasformazioni a cui li sottopone per esaminare quali proprietà restino invarianti (Programma di Klein). Noi studieremo le *curve algebriche*, in particolare le curve piane e le sottoporremo: I a trasformazioni proiettive, II a trasformazioni birazionali. La 1$^{\text{a}}$ parte servirà d'introduzione alla 2$^{\text{a}}$. Essa ha origine colla introduzione della Geom. Analitica (Newton, curve del 3$^{\text{o}}$ ordine, 1704; Cramer 1750; Eulero 1748; Maclaurin 1748) ed è giunta

> a notevole perfezione nel secolo XIX per opera della scuola sintetica (Poncelet, 1822; Steiner e Chasles tra il 1830 e il 1850; Cremona 1860-1870) e della scuola analitica (Plücker, 1827-1840; Cayley, Salmon 1840-1860; Clebsch 1860-1870). Il 2^o indirizzo è di data più recente e parte si può dire dalla memoria di Riemann sulle funzioni abeliane (1857) (ricerche sulle funzioni algebriche e sui loro integrali), i cui risultati analitici sono stati trasportati nel campo geometrico da Clebsch e da Brill e Nöther. Questo 2^o indirizzo, ma in buona parte anche il primo, è strettamente collegato coll'algebra e coll'analisi. Inopportunità di dividere nettamente tra loro i vari rami della matematica. La geometria degli enti algebrici studia in realtà questioni di algebra facendosi guidare in parte nella posizione dei problemi e nella ricerca dei teoremi e loro dimostrazioni dall'intuizione geometrica.

Viene qui espresso un punto di vista profondamente radicato nel pensiero di Castelnuovo. Concetti analoghi si ritrovano infatti anche nell'introduzione al corso *Funzioni algebriche e loro integrali* (1908-09):

> Natura del corso. Analisi e Geometria. Evoluzione della Geometria dopo Monge. I due rami principali: geom. algebrica e geom. differenziale. I problemi che questi trattano ormai appartengono all'analisi (funzioni algebriche, ed equazioni alle derivate parziali), la geometria fornisce l'aiuto dell'intuizione che permette di guidare il processo di ricerca e suggerisce i problemi.

I medesimi principi vengono ribaditi da Castelnuovo nell'introduzione al corso *Equazioni algebriche e gruppi di sostituzioni* (1918-19):

> Scopo del corso – La distinzione tra geometria e analisi che apparisce nei periodi specialistici, non appare opportuna, salvo per argomenti particolari, di fronte a una visione più larga della scienza. L'algebra e la geometria elem. erano strettamente legate presso i greci; quella però era agli inizi, mentre questa ebbe un grande sviluppo. Coll'introduzione della geom. analitica si restrinsero i legami. Se la teoria delle coniche e delle curve alg. più semplici può esser studiata direttamente sulla figura, senza intervento di mezzi analitici, si va incontro ben presto a serie difficoltà se si vuol far astrazione dall'alg. Per evitare eccezioni, per ottenere una maggior semplicità occorre introdurre l'immaginario nella teoria delle curve alg., e con ciò si esce dal campo strettamente geom. La teoria delle curve e delle sup. alg. è in realtà algebra interpretata con linguaggio geom.

Come evidenziato in [7], si tratta della stessa intima convinzione di Federigo Enriques, che in [8] dichiara:

> È opportuno rilevare esplicitamente (...) che la Geometria astratta si può identificare coll'Analisi. Appunto per ciò: Le due scienze debbono coltivarsi

> insieme. Non soltanto ne deriverà alla Geometria il vantaggio di una generalità e di una potenza di metodi sperimentati ormai da Des Cartes in poi; ma ugualmente l'Analisi potrà essere indirizzata alle più belle scoperte dalla feconda intuizione geometrica, come Monge, Clebsch, Klein e Lie hanno insegnato.

La fonte della visione unitaria della matematica condivisa da Castelnuovo ed Enriques è indicata dallo stesso Enriques nel lavoro [10] di Corrado Segre:

> A conforto delle opinioni espresse rimanderemo al lavoro di Segre *Su alcuni indirizzi delle investigazioni geometriche*; ivi sono esposte delle larghe vedute sugli indirizzi geometrici che potranno utilmente servire di guida ai giovani nelle loro ricerche.

Nel Paragrafo IV. delle *Osservazioni dirette ai miei studenti* raccolte in [10], il maestro torinese si era soffermato a lungo su questo punto:

> Ciò che s'è detto intorno alle relazioni fra le matematiche pure e quelle applicate va ripetuto in grado molto più elevato per le due principali suddivisioni delle matematiche pure: l'analisi e la geometria. Il metodo delle coordinate serve a passare dall'una all'altra e le collega intimamente, anzi le fonde insieme per modo che si può dire che ogni progresso dell'una produce un progresso dell'altra, e viceversa. (...)
> Questa multiplicità di legami fra l'analisi e la geometria e la necessità che ne consegue di studiarle entrambe e di non limitarsi ad uno solo dei due indirizzi, analitico e sintetico, è sempre stata riconosciuta dai grandi matematici. Su essa ad esempio insistevano in pari tempo Lagrange e Monge nelle loro lezioni analitiche e geometriche alla Scuola normale (1795) (...)
> E gli stessi concetti propugna nelle sue lezioni ed illustra col proprio esempio uno dei più valenti maestri che ora vanti la Germania, il Klein; sì che tutta la scuola che da lui deriva dimostra nel miglior modo di possedere in pari tempo le cognizioni e gli strumenti analitici e quelli geometrici.
> In Italia purtroppo la cosa è ben diversa: la separazione delle matematiche pure in Analisi e Geometria è fatta dai giovani in modo così netto che di ben pochi fra essi si può dire che vadano studiando e coltivando l'una e l'altra. Vi sono dei giovani analisti e dei giovani geometri; ma dei giovani che considerino la matematica tutta come il loro campo, seguendo i grandi esempi che noi pure abbiamo, ve ne son pochissimi. Ond'è che nel rivolgermi ai miei studenti di Geometria io sento il dover di raccomandar loro col massimo calore lo studio dell'Analisi.
> Un giovane che voglia oggidì coltivare la Geometria staccandola nettamente dall'Analisi, non tenendo conto dei progressi che questa ha fatto e va facendo, quel giovane, dico, per quanto grande abbia l'ingegno, non sarà mai un geometra completo.

> Egli non possiederà quei potenti strumenti di ricerca che alla moderna geometria fornisce l'analisi moderna. Egli ignorerà vari risultati geometrici che si trovano, magari implicitamente, negli scritti degli analisti. E non solo non potrà valersene nelle sue proprie ricerche; ma gli accadrà di faticare per ritrovarli egli stesso, e, caso molto frequente, di presentarli poi come nuovi quando sia riuscito a ritrovarli.
> Dopo le citazioni già fatte sembra inutile l'addurre nuovi esempi in appoggio di questi concetti. Ma uno ve n'è ancora che mi piace citare, perché istruttivo in sommo grado: *la geometria su una curva algebrica.*
> Il concetto di questa geometria, cioè di proprietà dell'ente algebrico invariabili per trasformazioni razionali dell'ente stesso, si trova per la prima volta in un lavoro analitico: nella grande Memoria di Riemann sulla *Teoria delle funzioni Abeliane.* È qui che viene usata la prima volta la nozione del *genere* (contenuta solo implicitamente nella Memoria capitale di Abel sulle sue trascendenti) e dimostrata l'invariabilità di esso per tali trasformazioni. È qui che si trova quella rappresentazione di una funzione algebrica come somma d'integrali abeliani di 2ª specie, che (grazie anche al Roch che completò il calcolo di Riemann) ha dato uno dei più importanti e fecondi teoremi alla geometria moderna. È qui infine che si trovano tante proposizioni notevoli, alcune delle quali, messe sotto veste geometrica, possono ancora sembrar nuove ai giovani geometri che non abbiano ben meditato su quel profondo immortale lavoro.

La profonda consonanza di pensiero tra Segre e Castelnuovo non stupisce alla luce dello stretto rapporto personale intercorso tra i due, testimoniato ad esempio da queste toccanti espressioni di Segre:

> Torino, 12 XI 91
>
> Mio carissimo,
> Ricevo la tua affettuosa lettera, e te ne ringrazio. Da Lunedì tu mi manchi ed io sento vivamente questa lacuna. Tu accenni a quel po' di giovamento cha hai potuto trarre in questi quattro anni dalla mia compagnia. Se ciò è vero, è pur vero che da te io ho avuto un completo ricambio, e che il tuo ingegno acuto, come la tua bontà di cuore m'han reso continuamente utili e piacevoli le tante ore che passavamo insieme (...) Tu m'hai fatto del bene, lo ripeto, non solo intellettualmente ma anche moralmente. Ed ora che tu mi manchi sento realmente un vuoto, che non sarà colmato da nessuno. (...)
> Conservami sempre il tuo affetto. (...)
> E ancora una volta un abbraccio affettuosissimo dal
>
> Tuo aff.mo C. Segre

3 – L'eredità matematica di Emma Castelnuovo: gli spazi di moduli nella didattica elementare

Emma Castelnuovo in [3] introduce così lo studio dei *casi limite* nella pratica didattica:

> Le generazioni di allievi si moltiplicano, a triennio succede triennio. Cambiano le mode, si evolvono i costumi; i bambini di 11 anni che riceviamo oggi alla scuola media sono ben diversi da come eravamo noi a quell'età (...) Eppure, ad una serie di questioni di geometria e di aritmetica che si presentano nei primi giorni di scuola vengono date le stesse risposte oggi come ieri, dai bimbi di città come da quelli di campagna, dai figli di professionisti come da quelli di famiglie che non hanno una tradizione culturale.
>
> – I bambini non vedono che se un quadrato articolabile si trasforma in un rombo l'area cambia, e sostengono che siccome il perimetro rimane invariato anche l'area deve rimanere invariata.
> – Non vedono che se uno spago legato viene tenuto a mo' di rettangolo fra l'indice e il pollice delle due mani, avvicinando e allontanando le dita di una stessa mano l'area cambia, e sostengono anche qui che l'area non può cambiare perché il perimetro è sempre lo stesso, e avvalorano questa tesi dicendo che se diminuisce l'altezza del rettangolo aumenta la base e quindi le dimensioni si compensano.
>
> Perché affermano cose assurde mentre si comportano da adulti in questioni della vita d'ogni giorno ben più complesse? Perché non vedono? In alcuni di questi problemi si tratta, in fondo, solo di guardare un oggetto. Eppure non c'è mai stata un'epoca come l'attuale in cui il senso della vista sia tanto esercitato; sappiamo benissimo quale attrazione esercitino i fumetti e la televisione. Ma, facciamo un esempio di tutti i tempi: un bambino, fin dalla più tenera età, non si stanca di osservare un mulino che ruota sotto la spinta dell'acqua, o una gru che sale e scende. È vero, ma un mulino fermo non gli interessa più e nulla gli dice una gru che non è in azione.
> Ora, in matematica, non sono abituati a vedere situazioni dinamiche, per cui un quadrato snodabile e uno spago tenuto a mo' di rettangolo variabile nulla dicono loro: perché *non sanno vedere*. Vogliamo scuoterli? Attiriamo la loro attenzione sul fatto che il quadrato-rombo può *schiacciarsi* e che il rettangolo di spago può ridursi a due fili sovrapposti. I casi *limite* parlano da sè: due oggetti mobili che non erano fino ad ora per nulla significativi diventano d'un tratto un problema matematico. (...) Basterebbero questi esempi per capire come l'atteggiamento matematico sorga dal *saper vedere* un concreto dinamico, costruttivo.

Emma Castelnuovo in [2], pagine 49-51, dimostra di essere ben consapevole sia delle potenzialità intuitive che della mancanza di rigore insite nel procedimento al limite:

> Vogliamo che gli allievi fissino l'attenzione sugli angoli di un triangolo, osservino i tre angoli, e che questa osservazione nasca spontaneamente. Ora, gli angoli, come i lati, come qualunque elemento di una figura, non vengono osservati se la figura è statica; l'osservazione nasce non appena c'è una variazione. Il confronto di due triangoli o di alcuni triangoli potrà far dire che questo angolo è maggiore di quello o che alcuni angoli sono uguali, ma è un'osservazione che non dice nulla, che non porta a nulla. Per far sì che l'osservazione sia costruttiva nel senso matematico del termine occorre considerare infiniti casi, occorre vedere un caso insieme ai precedenti e a quelli che lo seguono; in breve, occorre far muovere la figura per gradi insensibili.
> (...) Dite ai bambini di osservare tutti questi triangoli e di scrivere le loro impressioni. (...) Vi diranno che quando un angolo diminuisce, gli altri aumentano e che – si è sempre portati, anche con una certa leggerezza, a vedere un qualche cosa di costante – quello che si perde in un angolo viene compensato da quello che si guadagna negli altri. Non è forse questa un'intuizione della proprietà sulla somma degli angoli del triangolo? La somma degli angoli è dunque costante; ma, qual è questo valore costante? I casi limite conducono a intuire questo valore.
> (...) È certo che questa esperienza, come del resto tutte quelle realizzate con procedimenti di continuità, ha un pericolo, il pericolo del caso limite, quello cioè di generalizzare la proprietà che si legge nel caso limite. Sarà sempre vero che la somma degli angoli è un angolo piatto, dato che nel caso limite è un angolo piatto? Ma perché dobbiamo chiamarla pericolosa questa intuizione del caso limite? Se condurrà a un errore (e non mancano esempi anche elementari dove si mette in evidenza come la continuità conduca a un errore), sia benedetto questo errore! Sarà fonte di osservazioni, di nuovi problemi, di nuove prese di coscienza.

Un analogo metodo di degenerazione era stato applicato nel 1889 da Guido Castelnuovo in [4]:

> In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della conservazione del numero a curve degeneri.

L'idea consiste nel considerare una curva non come un ente geometrico isolato, ma come membro di una famiglia ottenuta variando con continuità i suoi parametri (o moduli). Da questo punto di vista, se una proprietà invariante per deformazioni è verificata da una curva speciale (eventualmente degenere) di una famiglia, allora tale proprietà vale anche per la curva generica della stessa famiglia.

Con un atteggiamento simile a quello successivamente adottato da Emma, Guido Castelnuovo in [5], Aggiunta a pagina 69, riconosce il valore euristico del procedimento al limite anche prima di una sua verifica rigorosa:

> L'idea che mi ha permesso di raggiungere rapidamente questo e altri risultati consiste nel sostituire ad una curva irriducibile d'ordine n e genere p di un iperspazio, una curva composta di una curva d'ordine $n-1$ e di una retta unisecante o bisecante, secondo che quest'ultima curva ha genere p o $p-1$. Questo *principio di degenerazione* è semplicemente ammesso; la prima dimostrazione che lo spezzamento non altera i numeri richiesti fu data per via topologica (ricorrendo alle superficie di Riemann) da F. Klein in un suo corso del secondo semestre 1892 (...). Per via algebrica occorre far vedere che la curva spezzata può esser riguardata come limite di una curva irriducibile variante entro un sistema continuo, ciò che, sotto ipotesi assai larghe, ha dimostrato F. Severi nelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921).

REFERENCES

[1] E. Castelnuovo: *Didattica della matematica*, La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1963.

[2] E. Castelnuovo: *L'oggetto e l'azione nell'insegnamento della geometria intuitiva*, in *Il materiale per l'insegnamento della matematica*, La Nuova Italia Editrice, Firenze, 1965, 41– 65.

[3] E. Castelnuovo: *È possibile un'educazione al* saper vedere *in matematica?*, Boll. Unione Mat. Ital., **22** (1967), 539–549, http://www.bdim.eu/item?fmt=pdf&id=BUMI_1967_3_22_4_539_0

[4] G. Castelnuovo: *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rend. Circ. Mat. Palermo (1889).

[5] G. Castelnuovo: *Memorie Scelte*, Bologna, 1937.

[6] C. Ciliberto – C. Fontanari: *Curve algebriche piane e sghembe. Corso del prof. G. Castelnuovo 1922–23*, Unione Matematica Italiana, Bologna, 2015.

[7] C. Ciliberto – P. Gario: *Federigo Enriques: The First Years in Bologna*, in: *Mathematicians in Bologna 1861-1960*, Birkhäuser, Basel, 2012, 105–142.

[8] Federigo Enriques: *Conferenze di Geometria*, Bologna, 1894–95, http://enriques.mat.uniroma2.it/opere/95006lfl.html

[9] P. Gario (a cura di): *Lettere e Quaderni dell'Archivio di Guido Castelnuovo*, Accademia Nazionale dei Lincei, 2010, http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/menu.htm

[10] C. Segre: *Su alcuni indirizzi nelle investigazioni geometriche. Osservazioni dirette ai miei studenti*, Rivista di Mat., **1** (1891), 42–66,
http://www.bdim.eu/item?id=GM_Segre_CW_4_387

Lavoro pervenuto alla redazione il 2 settembre 2016
ed accettato per la pubblicazione il 19 settembre 2016

Indirizzo dell'Autore:
Claudio Fontanari – Dipartimento di Matematica – Università degli Studi di Trento –
Via Sommarive, 14 – 38123 Trento, Italia.
E-mail: claudio.fontanari@unitn.it