

# SI PUÒ VEDERE UN CUBO CHE SI ROVESCIA?

ESTER DALVIT E DOMENICO LUMINATI

SOMMARIO. Nello spazio euclideo di dimensione  $n$ , una riflessione rispetto a un iperpiano non può essere realizzata con un movimento rigido. Ciò diventa possibile se si considerano anche movimenti che avvengono nello spazio di dimensione  $n + 1$ . In queste note viene illustrato un modo per visualizzare un movimento rigido nello spazio quadridimensionale che realizza una riflessione di un oggetto tridimensionale.

## INTRODUZIONE

I termini “movimento rigido” e “isometria”, che a volte vengono impropriamente usati come sinonimi, indicano in realtà due concetti diversi. Il primo ha una connotazione prettamente cinematica (il moto di una porta che gira sui cardini o di un mobile spostato sul pavimento è descritto da un movimento rigido), mentre affinché due figure siano isometriche basta che esista una corrispondenza tra i loro punti che ne conservi le distanze reciproche e non serve che tale corrispondenza sia realizzabile per mezzo di un moto. Ad esempio c'è un'isometria tra porta aperta e porta chiusa, ma anche tra scarpa sinistra e scarpa destra, anche se, per quanto la si muova, una scarpa sinistra non diventerà mai destra.

Se però fossimo capaci di “svincolare” la scarpa dallo spazio a tre dimensioni e di muoverla liberamente nello spazio a quattro dimensioni, si riuscirebbe davvero a far partire una scarpa sinistra e farla tornare destra! Questo perché, come viene ricordato nella prima sezione, tutte le isometrie dello spazio euclideo di dimensione  $n$  possono essere realizzate con un movimento rigido nello spazio di dimensione  $n + 1$ .

Dopo aver dato nella sezione 2 un'esemplificazione del fenomeno per  $n = 2$  e  $n = 3$ , nella terza sezione viene descritto un particolare movimento rigido, nello spazio tridimensionale, che ribalta un quadrato, mantenendone i lati sulla superficie di un cubo. In modo del tutto analogo si descrive il movimento di un cubo, nello spazio a quattro dimensioni, le cui facce stanno sempre sull'ipersuperficie di un ipercubo

---

*Data:* 24 gennaio 2010.

*Frase e parole chiave.* Movimento rigido, isometria, riflessione, cubo, ipercubo, spazio quadridimensionale.

Questo lavoro è stato parzialmente finanziato dal Centro interuniversitario di ricerca per la comunicazione e l'apprendimento informale della matematica, *matematita* <http://www.matematita.it>.

e che “torna rovesciato al punto di partenza”. Questa descrizione, che utilizza la notazione matriciale delle isometrie, può essere tradotta nel linguaggio più elementare delle trasformazioni geometriche e proposta anche a studenti di scuola secondaria superiore.

Per visualizzare questo movimento — che avviene nello spazio a quattro dimensioni — si può allora ricorrere a una rappresentazione tridimensionale dell'ipercubo, come ad esempio un suo sviluppo (cfr. sezione 3 e [4]). All'ipercubo e alle sue rappresentazioni (che qui non intendiamo approfondire, rimandando ad esempio a [7], [2], [5], [3]) era dedicata una parte importante della mostra *Un tuffo nella quarta dimensione*, curata dal centro *matematita* e allestita al Festival della Scienza di Genova del 2007 e nella quale si inseriva questo percorso, illustrato dinamicamente da alcuni video e applet interattive (Java<sup>TM</sup>), ora disponibili in [6].

## 1. MOVIMENTI RIGIDI E ISOMETRIE

Che cos'è un movimento rigido? Se  $F \subseteq \mathbb{R}^n$  (diremo anche che  $F$  è una *figura*), un *movimento rigido* di  $F$  è il dato di una famiglia  $\{\rho_x \mid x \in F\}$  di curve continue  $\rho_x : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tali che  $\rho_x(0) = x$  per ogni  $x \in F$  e  $\|\rho_x(t) - \rho_y(t)\| = \|x - y\|$  per ogni  $x, y \in F$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ . Posto  $F_1 = \{\rho_x(1) \mid x \in F\}$ , si dirà anche che  $F_1$  è ottenuta da  $F$  mediante un movimento rigido.

Si può dimostrare che un movimento rigido in  $\mathbb{R}^n$  può essere formalizzato anche con una “curva continua di isometrie”

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \{\text{isometrie di } \mathbb{R}^n\}$$

tale che  $\gamma(0) = \text{id}$  è l'identità. Il moto di un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  è allora descritto dalla curva  $\rho_x(t) = \gamma(t)x$ . Chiaramente, la famiglia di curve così costruita è un movimento rigido, nel senso della definizione appena data, per qualsiasi figura di  $\mathbb{R}^n$ . È vero anche il viceversa e non è difficile provarlo nel caso di una figura contenente  $n + 1$  punti in posizione generale (cioè non contenuti in alcun sottospazio affine di dimensione minore di  $n$ ).

È un fatto ben noto che le isometrie dello spazio euclideo  $n$ -dimensionale sono tutte e sole le applicazioni  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  della forma  $x \mapsto Mx + a$  con  $M \in O(n)$  (il gruppo delle matrici  $n \times n$  *ortogonali*, ossia tali che  ${}^tMM = I$ ) e  $a \in \mathbb{R}^n$ . È allora chiaro cosa si intenda per curva continua di isometrie: si richiede che  $\gamma(t)x = M(t)x + a(t)$ , dove la matrice  $M(t)$  e il vettore  $a(t)$  dipendono con continuità da  $t$ .

Ricordiamo anche che il gruppo  $O(n)$  ha due componenti connesse per archi (si veda ad esempio [8]), ossia è unione disgiunta di due sottinsiemi, precisamente

$$\begin{aligned} SO(n) &= \{M \in O(n) \mid \det M = 1\} \\ O^-(n) &= \{M \in O(n) \mid \det M = -1\} \end{aligned}$$

con la proprietà che in ciascuno di essi due punti (matrici) possono essere congiunti da una curva continua, mentre non esiste alcuna curva continua che congiunge un punto del primo con un punto del secondo.

Ne segue che se  $\gamma(t)$  è un movimento rigido definito da  $M(t)$  e  $a(t)$ , allora  $M(t) \in SO(n)$  per ogni  $t$ , dato che  $M(0) = I$  è la matrice identità e  $I \in SO(n)$ .

Come conseguenza, se  $S \in O^-(n)$  e  $F$  è una figura (di  $\mathbb{R}^n$ ) che contiene  $n + 1$  punti  $x_0, \dots, x_n$  in posizione generale, allora non esiste alcun movimento rigido in  $\mathbb{R}^n$  che trasforma  $F$  in  $SF$ . Infatti  $S$  è l'unica isometria che porta ogni  $x_i$  in  $Sx_i$ , dato che un'isometria di  $\mathbb{R}^n$  è univocamente determinata dai valori che assume su  $n + 1$  punti in posizione generale. Pertanto, se  $\gamma(t)$  fosse un movimento rigido definito da  $M(t)$  e  $a(t)$  che porta  $F$  in  $SF$ , si avrebbe  $\gamma(1) = S$  e quindi necessariamente  $M(1) = S \in SO(n) \cap O^-(n)$ , che è assurdo.

Se però si considera  $\mathbb{R}^n$  come sottospazio di  $\mathbb{R}^{n+1}$ , identificando  $x \in \mathbb{R}^n$  con  $(x, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , si riesce a trasformare  $F$  in  $SF$  con un movimento rigido di  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

La ragione di questo fatto è che il gruppo  $O(n)$  può essere visto come un sottogruppo di  $SO(n + 1)$ , mediante l'inclusione

$$O(n) \hookrightarrow SO(n + 1)$$

$$M \mapsto \widetilde{M} = \left( \begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & \det M \end{array} \right).$$

Se si denota  $\widetilde{F} = \{(x, 0) \mid x \in F\}$  è immediato verificare che  $\widetilde{S}\widetilde{F} = \widetilde{SF}$ . Poiché  $\widetilde{S} \in SO(n + 1)$  (che è connesso per archi), esiste una curva continua di matrici  $M(t) \in SO(n + 1)$  tale che  $M(0) = I$  e  $M(1) = \widetilde{S}$ . Si ottiene così un movimento rigido in  $\mathbb{R}^{n+1}$  che porta  $F$  (identificata con  $\widetilde{F}$ ) in  $SF$  (identificata con  $\widetilde{SF}$ ).

Quanto appena esposto nel caso dell'azione di una matrice  $S \in O^-(n)$  su una figura di  $\mathbb{R}^n$ , si estende evidentemente all'azione di una qualunque isometria del tipo  $Sx + a$  con  $S \in O^-(n)$ .

## 2. UN ESEMPIO

In dimensione 2, il fenomeno illustrato nella sezione precedente può essere esemplificato e descritto analiticamente in modo molto elementare (fruibile anche da uno studente di scuola secondaria superiore), grazie al fatto che nel piano è possibile dare una descrizione analitica molto semplice delle rotazioni (che costituiscono  $SO(2)$ ) e delle riflessioni (che costituiscono  $O^-(2)$ ) e quindi di tutte le isometrie. Ricordiamo infatti che le matrici di una generica rotazione (attorno all'origine di  $\mathbb{R}^2$ ) e di una generica riflessione (rispetto a una retta per l'origine di  $\mathbb{R}^2$ ) sono date rispettivamente da:

$$R(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad S(\vartheta) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & -\cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Precisamente,  $R(\vartheta)$  è la rotazione di angolo  $\vartheta$  attorno all'origine e  $S(\vartheta)$  è la riflessione rispetto alla retta di equazione  $x \sin(\vartheta/2) = y \cos(\vartheta/2)$ .

È immediato verificare che  $R(\vartheta) \neq S(\alpha)$  per ogni  $\vartheta$  e  $\alpha$ . In caso contrario si avrebbe infatti  $\cos \vartheta = 0$  e  $\sin \vartheta = 0$ , che è palesemente assurdo.

Dato che la matrice identità è del primo tipo<sup>1</sup>, un movimento rigido è necessariamente descritto da una curva  $\gamma$  di isometrie tali che

$$\gamma(t)X = R(\vartheta(t))X + a(t) \quad \forall t \in [0, 1] \text{ e } X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

con  $\vartheta(t)$  e  $a(t)$  funzioni continue e tali che  $\vartheta(0) = 0$  e  $a(0) = 0$ , in modo che si abbia  $\gamma(0) = \text{id}$ .

Consideriamo ora un triangolo  $T$  di vertici  $A, B, C$ . Applicando ad esso una qualsiasi riflessione rispetto a una retta per l'origine, ossia una matrice  $S = S(\alpha)$ , otteniamo un triangolo  $ST$  di vertici  $SA, SB, SC$ , che non si può ottenere, a partire da  $T$ , con un movimento rigido nel piano. Infatti, se ciò fosse possibile, risulterebbe  $ST = R(\vartheta)T + a$  per qualche  $\vartheta \in [0, 2\pi)$  e qualche  $a \in \mathbb{R}^2$ . Dato che ogni isometria del piano è determinata dai valori che assume nei vertici di un triangolo, si avrebbe  $SX = R(\vartheta)X + a$  per ogni  $X \in \mathbb{R}^2$  e quindi in particolare

$$S0 = R(\vartheta)0 + a$$

$$Se_1 = R(\vartheta)e_1 + a$$

$$Se_2 = R(\vartheta)e_2 + a$$

dove  $e_1 = (1, 0)$  e  $e_2 = (0, 1)$ . Se ne ricava che  $a = 0$  e  $R(\vartheta) = S$  che, come si è visto, è assurdo. Ne segue che la riflessione di una figura contenente un triangolo non può essere realizzata con un movimento rigido del piano.

Come già visto nella sezione precedente, questo diventa possibile se si aggiunge una dimensione, o meglio se si considera il piano  $xy$  immerso nello spazio tridimensionale di coordinate  $x, y, z$ . Ad esempio, la matrice

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi t & -\sin \pi t \\ 0 & \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix}$$

rappresenta, al variare di  $t$  tra 0 e 1, un movimento rigido in  $\mathbb{R}^3$ : ad ogni istante è la rotazione di angolo  $\pi t$  attorno all'asse  $x$ . D'altra parte, un triangolo  $ABC$  contenuto nel piano  $xy$  immerso in  $\mathbb{R}^3$  viene trasformato da  $Q(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  nel triangolo  $A'B'C'$  contenuto nello stesso piano, ma simmetrico ad  $ABC$  rispetto all'asse  $x$ . E difatti la matrice che descrive questa trasformazione nel piano  $xy$  è  $S(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Da questo, osservando che per ogni  $\vartheta$  si ha  $S(\vartheta) = R(\vartheta/2)S(0)R(-\vartheta/2)$ , segue che

<sup>1</sup>In realtà l'argomentazione che si sta esponendo è corretta ma non è completa. Bisognerebbe dimostrare che i due insiemi di matrici sono chiusi, ossia che il limite di matrici di un tipo è sempre dello stesso tipo.

ogni riflessione del piano può essere realizzata da un movimento rigido nello spazio.

Nel caso tridimensionale non c'è una descrizione così semplice delle rotazioni e questo rende più complicato giustificare analiticamente (con strumenti altrettanto elementari di quelli usati in dimensione 2) il fatto che una riflessione rispetto a un piano di una figura tridimensionale (contenente 4 punti in posizione generale) non possa essere realizzata con un movimento rigido nello spazio.

Tuttavia è pur sempre abbastanza semplice constatare per via analitica che una riflessione di  $\mathbb{R}^3$ , per esempio quella rispetto al piano  $xy$  data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

può essere realizzata da un movimento rigido nello spazio a 4 dimensioni. Basta prendere l'analogo del movimento rigido visto poco sopra e precisamente

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \pi t & -\sin \pi t \\ 0 & 0 & \sin \pi t & \cos \pi t \end{pmatrix},$$

che ad ogni istante rappresenta la rotazione di angolo  $\pi t$  attorno al piano  $xy$ .

Analiticamente la difficoltà è equivalente, ma mentre si può vedere fisicamente il ribaltamento nello spazio di un oggetto piano, non è altrettanto facile *vedere* un oggetto tridimensionale che si ribalta passando per lo spazio a 4 dimensioni. Questo è quanto ci proponiamo di fare nella prossima sezione.

### 3. VISUALIZZAZIONE

Ci sono tanti modi di ribaltare una figura bidimensionale, ovvero di trovare un movimento rigido nello spazio che la trasformi in una sua simmetrica. Se la figura è un quadrato, è possibile ribaltarla “senza staccarla da un cubo”, ossia in modo che ad ogni istante i suoi lati stiano sulle facce di un cubo fissato (vedi figura 1).

Ma perché complicarsi in tal modo la vita? Questo movimento rigido ha il vantaggio di poter essere visualizzato su una rappresentazione bidimensionale del cubo, ad esempio uno sviluppo (vedi figura 2) e quindi può essere usato per spiegare questo fenomeno anche agli abitanti di Flatlandia, il mondo bidimensionale inventato da Edwin Abbott Abbott [1], popolato da esseri che non sono in grado di percepire sensorialmente la terza dimensione.

Il movimento del quadrato si svolge in tre fasi, che sono illustrate nelle tre righe di figura 1: nella prima fase il quadrato viene fatto scivolare da una faccia a quella opposta, nelle altre due viene fatto

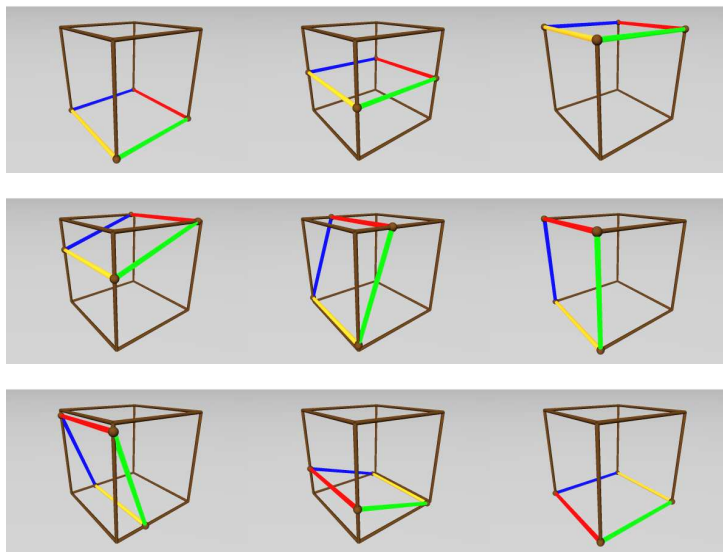


Figura 1: Un quadrato che si ribalta sulla superficie di un cubo. I colori dei lati evidenziano la riflessione che si ottiene come risultato del movimento rigido.

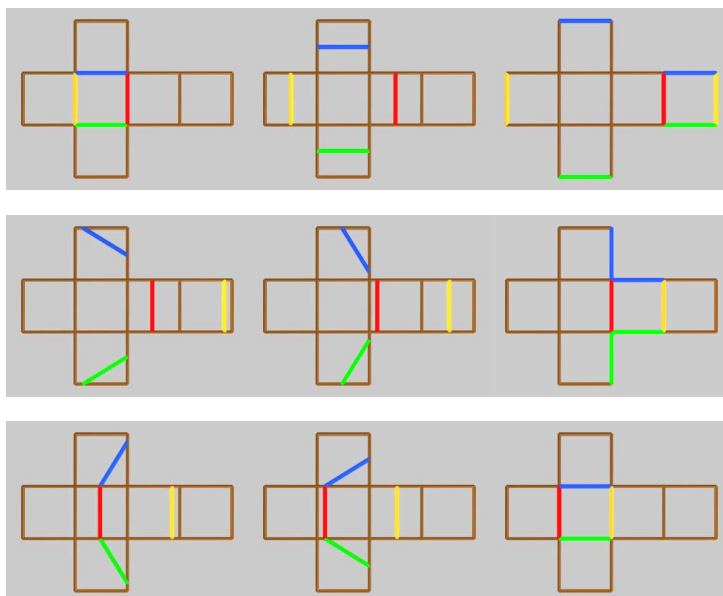


Figura 2: Un quadrato che si ribalta, visto nello sviluppo di un cubo. Talvolta sembra che il quadrato “si rompa” e che i lati “si sdoppino”, ma con un po’ di fantasia o con l’aiuto delle applet interattive (Java<sup>TM</sup>) disponibili in [6] ci si può rendere conto che sul cubo i segmenti formano sempre un quadrato!

bascolare lungo due facce adiacenti fino a tornare “rovesciato” (ossia riflesso rispetto all’asse  $x$ ) sulla faccia di partenza.

Se si considerano il quadrato  $Q$  di vertici  $(\pm 1, \pm 1, 0)$  e il cubo  $C$  di vertici  $(\pm 1, \pm 1, 0)$  e  $(\pm 1, \pm 1, 2)$ , una descrizione analitica esplicita del movimento rigido che ribalta  $Q$ , mantenendone i lati sulla superficie di  $C$ , è data dalla curva di isometrie  $\gamma(\vartheta)$ , definita a tratti da:

$$\gamma(\vartheta)X = \begin{cases} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta/\pi \end{pmatrix} & \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \cos \vartheta \\ 2 - \sin \vartheta \end{pmatrix} & \vartheta \in [2\pi, \frac{5}{2}\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 - \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} & \vartheta \in [\frac{5}{2}\pi, 3\pi] \end{cases}$$

per ogni  $\vartheta \in [0, 3\pi]$  e  $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Le tre parti in cui è spezzata la curva di isometrie  $\gamma$  riflettono le tre fasi del movimento rigido descritte sopra a parole e con immagini. Quando  $\vartheta$  va da 0 a  $2\pi$  il quadrato scivola dalla faccia  $z = 0$  di  $C$  alla faccia  $z = 2$ . Quindi, per  $\vartheta$  che varia da  $2\pi$  a  $5\pi/2$ , bascula tra la faccia  $z = 2$  e la faccia  $y = -1$  e infine, quando  $\vartheta$  varia da  $5\pi/2$  a  $3\pi$ , il quadrato bascula tra la faccia  $y = -1$  e la faccia  $z = 0$ , da cui era partito, tornando riflesso rispetto all’asse  $x$ .

Si è scelto di descrivere il movimento rigido usando un parametro nell’intervallo  $[0, 3\pi]$  per una semplice questione di comodità. Se si preferisce avere la curva di isometrie parametrizzata nell’intervallo  $[0, 1]$  (come da definizione), basta porre  $\psi(t) = \gamma(3\pi t)$  per ogni  $t \in [0, 1]$ .

Si può estendere questo movimento rigido in dimensione maggiore “cilindrizzandolo”, ossia aggiungendo una coordinata nella cui direzione il moto agisce in maniera banale. Più precisamente, per definirlo in dimensione 4 basta considerare

$$\widehat{\psi}(t) : \begin{pmatrix} x \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \psi(t)Y \end{pmatrix}$$

per ogni  $x \in \mathbb{R}$ ,  $Y = (y, z, w) \in \mathbb{R}^3$  e  $t \in [0, 1]$ .

Vediamo come questo movimento rigido ribalta un cubo, mantenendo le sue facce nelle iperfacce di un ipercubo.

Costruiamo l’ipercubo come traccia della traslazione del cubo  $C$  in una direzione perpendicolare a tutti gli spigoli (cfr. [5], [3]), ovvero consideriamo l’ipercubo  $H = [-1, 1] \times C$ . Se  $Q$  è un qualsiasi quadrato

con i lati contenuti sulla superficie di  $C$ , allora  $[-1, 1] \times Q$  è un cubo le cui facce sono contenute nell'ipersuperficie di  $H$ .

Se  $Q_0$  è il quadrato di vertici  $(\pm 1, \pm 1, 0)$ , consideriamo il cubo  $C_0 = [-1, 1] \times Q_0 \subset H$  e l'azione del movimento rigido  $\widehat{\psi}$  su  $C_0$ . Per ogni  $t$  il cubo  $\widehat{\psi}(t)C_0 = [-1, 1] \times \psi(t)Q_0$  ha le facce contenute nelle iperfacce di  $H$  e il risultato finale di questo movimento rigido è l'immagine speculare del cubo  $C_0$ , rispetto al piano  $xy$ .

Rappresentando l'ipercubo con un suo sviluppo tridimensionale, è possibile visualizzare questo ribaltamento del cubo (figura 3).

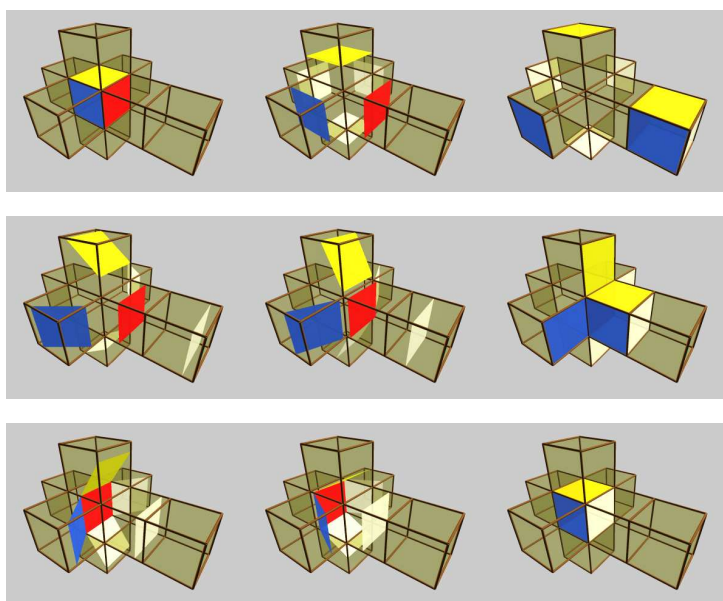


Figura 3: Il ribaltamento di un cubo visto nello sviluppo di un ipercubo. Talvolta sembra che il cubo “si rompa” e che le facce “si sdoppino”, ma nell'ipercubo i quadrati formano sempre un cubo. La colorazione delle facce del cubo (tre in colore rosso, blu e giallo rispettivamente e tre bianche) toglie simmetria al cubo ed in tal modo evidenzia la riflessione che si ottiene come risultato finale del movimento rigido. Nella prima e nell'ultima figura si vedono solo tre facce del cubo, il colore delle altre tre si deduce dalle immagini vicine. In [6] sono disponibili alcuni video e applet interattive (Java<sup>TM</sup>), che illustrano dinamicamente alcune rappresentazioni tridimensionali dell'ipercubo e il ribaltamento descritto in queste pagine.

Non è difficile scrivere in forma matriciale il ribaltamento  $\widehat{\gamma}(\vartheta)$ , appena descritto, del cubo  $C_0$  di vertici  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0)$  nell'ipercubo  $H$  di vertici  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0)$  e  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, 2)$ , che è dato dalla curva di



isometrie  $\widehat{\gamma}(\vartheta)$  definita da:

$$\widehat{\gamma}(\vartheta)X = \begin{cases} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vartheta/\pi \end{pmatrix} & \vartheta \in [0, 2\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 + \cos \vartheta \\ 2 - \sin \vartheta \end{pmatrix} & \vartheta \in [2\pi, \frac{5}{2}\pi] \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ 0 & 0 & \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 - \cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{pmatrix} & \vartheta \in [\frac{5}{2}\pi, 3\pi] \end{cases}$$

per ogni  $\vartheta \in [0, 3\pi]$  e  $X = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ .

Anche in questo caso, ponendo  $\widehat{\psi}(t) = \widehat{\gamma}(3t\pi)$ , si parametrizza il movimento con l'intervallo  $[0, 1]$ .

#### RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

1. Edwin Abbott Abbott, *Flatlandia. Racconto fantastico a più dimensioni*, Gli Adelphi, Adelphi, Milano, 1966, Traduzione di M. D'Amico.
2. Thomas F. Banchoff, *Oltre la terza dimensione. Geometria, computer graphics e spazi multidimensionali*, Zanichelli, Bologna, 1993.
3. H. S. M. Coxeter, *Regular polytopes*, third ed., Dover Publications Inc., New York, 1973.
4. Ester Dalvit, *The concept of dimension: a theoretical and an informal approach*, 2008, Tesi di Laurea. Università di Trento - Universität Tübingen, pp. xviii+125.
5. François Lo Jacomo, *Visualiser la quatrième dimension*, Vuibert, Paris, 2002, Con una prefazione di Henri Delekta.
6. matematita, *Cubi, ipercubi e...*, Percorso interattivo all'indirizzo <http://matematita.science.unitn.it/4d/>.
7. ———, *Verso la quarta dimensione*, Percorso per immagini all'indirizzo <http://www.matematita.it/materiale/percorsi/percorso4.php>.
8. Frank W. Warner, *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 94, Springer-Verlag, New York, 1983.

E. DALVIT, UNIVERSITÀ DI TRENTO, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, V.  
SOMMARIVE 14, I-38123 TRENTO  
*E-mail address:* [ester.dalvit.1@unitn.it](mailto:ester.dalvit.1@unitn.it)

D. LUMINATI, UNIVERSITÀ DI TRENTO, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, V.  
SOMMARIVE 14, I-38123 TRENTO  
*E-mail address:* [domenico.luminati@unitn.it](mailto:domenico.luminati@unitn.it)