

GUIDO CASTELNUOVO AND HIS HERITAGE: GEOMETRY, COMBINATORICS, TEACHING

CLAUDIO FONTANARI

ABSTRACT. We approach Guido Castelnuovo’s intellectual world by focusing on a trilogy of papers published in 1889 and by drawing a few remarks about Castelnuovo’s scientific interests and attitudes.

1. INTRODUCTION

For an account of the life and works of Guido Castelnuovo (1965–1952) we refer to [2], which also provides a fascinating insight into his familiar milieu, and to the biographical sketch [7]. Here instead we are going to focus our attention on three early papers, published by Castelnuovo in 1889, which are specifically devoted to enumerative geometry and algebraic curves, but shed light more generally on his intellectual world.

Indeed, Castelnuovo’s contribution to the development of Brill-Noether theory is well-known, a terse presentation in modern terms is provided for instance in [8], p. 242:

Let’s now examine this history a bit more closely. To begin with, Brill and Noether asserted the truth of the theorem based, apparently, on a naive dimension count bolstered by the calculation of examples in low genus.

Exactly how the desired variational element might enter into the proofs was first suggested by Castelnuovo. His goal was not to establish any of the present theorems. Rather, he assumed the statement of the Brill-Noether theorem and applied it to compute the *number* of g_d^r ’s on a general curve in the case $\rho = 0$, when we expect it to be finite.

To do this, Castelnuovo looked not at any smooth curve of genus g , but at a g -nodal curve C_0 : that is, a rational curve with g nodes r_1, \dots, r_g obtained by identifying g pairs of points (p_i, q_i) on \mathbb{P}^1 .

Any g_d^r on C_0 , Castelnuovo reasoned, would pull back to a g_d^r on \mathbb{P}^1 , which could then be represented as the linear series cut out on a rational normal curve $C \cong \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^d$ of degree d by those hyperplanes containing a fixed $(d - r - 1)$ -plane $\Lambda \subset \mathbb{P}^d$.

The condition that the g_d^r on \mathbb{P}^1 be the pullback of one on C_0 was simply that every divisor of the g_d^r containing p_i

This research project was partially supported by GNSAGA of INdAM and by PRIN 2017 “Moduli Theory and Birational Classification”.

should contain q_i as well; in other words, Λ should meet each of the chords $\overline{p_i q_i}$ to C in \mathbb{P}^d .

The number of g_d^r 's on a general curve of genus g was thus, according to Castelnuovo, the number of $(d - r - 1)$ -planes in \mathbb{P}^d meeting each of g lines, a problem in Schubert calculus that Castelnuovo went on to solve (to obtain the correct value for the number of g_d^r 's on a general curve).

It was Severi who first pointed out, some twenty years later, that Castelnuovo's computation might serve as the basis of a proof of the Brill-Noether statement.

Our plan is to give a closer look at the original papers, by providing in Section 2 an English translation of some key passages, and by drawing in Section 3 a series of remarks based on Castelnuovo's own statements.

This material has been presented at the conference TiME 2019 (Levico Terme, September 2–6, 2019). The author is grateful to the organizers for their kind invitation and to Enrico Arbarello for enlightening conversations about Guido Castelnuovo and the genuine meaning of his heritage.

2. A TRILOGY OF PAPERS

G. Castelnuovo, *Una applicazione della geometria enumerativa alle curve algebriche*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. III, 1889 ([5], III, pp. 45–53).

In questo lavoro ci proponiamo due fini: esporre un metodo utile in molte ricerche della teoria delle curve; presentare alcune formole che ci sembrano notevoli e in se stesse, e per le loro conseguenze. A queste formole noi siamo giunti applicando il principio della conservazione del numero a curve degeneri.

In this paper we have a twofold goal: to discuss a method useful in several researches in curve theory; to present some formulas we believe remarkable both in themselves and for their consequences. We came to these formulas by applying the principle of conservation of the number to degenerate curves.

G. Castelnuovo, *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni*, Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. IV, vol. V, 4 agosto 1889 ([5], IV, pp. 55–64).

Fra le questioni che appartengono alla Geometria Enumerativa, va notata per la sua importanza algebrica e geometrica la seguente: Quanti sono gli spazi ad s dimensioni che soddisfanno a più condizioni fondamentali date in uno spazio ad n dimensioni? Naturalmente le condizioni si suppongono tali da rendere determinato il problema.

(...)

Un caso particolare interessante è il seguente:

Date hk rette in uno spazio a $\{(k+1)(h-1)\}$ dimensioni, il numero degli spazi a $\{k(h-1)-1\}$ dimensioni che segano in punti queste rette è uguale a

$$\frac{1!2!3! \dots (h-1)!1!2!3! \dots (k-1)!(hk)!}{1!2!3! \dots (h+k-1)!}.$$

Among the questions pertaining to Enumerative Geometry, we point out the following one, due to its both algebraic and geometric relevance: How many are the s -dimensional spaces satisfying several fundamental conditions given in an n -dimensional space? Obviously, we suppose these conditions are such that the problem is made determinate.

(...)

A particular interesting case is the following:

Given hk lines in a $\{(k+1)(h-1)\}$ -dimensional space, the number of $\{k(h-1)-1\}$ -dimensional spaces cutting these lines in points is equal to

$$\frac{1!2!3! \dots (h-1)!1!2!3! \dots (k-1)!(hk)!}{1!2!3! \dots (h+k-1)!}.$$

G. Castelnuovo, *Numero delle involuzioni razionali giacenti sopra una curva di dato genere*, Rendiconti R. Accademia dei Lincei, s. IV, vol. V, 1 settembre 1889 ([5], V, pp. 65–68).

È noto che sopra una curva di genere p con moduli generali esistono delle *serie lineari* $g_m^{(q)}$ (involuzioni razionali di ∞^q gruppi di m punti) in numero finito, quando sia

$$(1) \quad m - q = (p - m + q)q;$$

quante sono queste $g_m^{(q)}$? (...) Noi ci proponiamo di risolvere il problema in tutta la sua generalità approfittando del seguente concetto di geometria enumerativa, che ci servì in altra occasione¹:

”il numero (supposto finito) degli $[r]$ (spazi ad r dimensioni) che segano in σ punti una curva C_p^n (di ordine n e genere p) appartenente ad un $[s]$ non muta, o diventa infinito, quando alla curva data si sostituisca l’insieme di più

¹V. la memoria III, *Una applicazione della geometria enumerativa*. Dobbiamo riconoscere che nello stabilire questo concetto ci fondiamo più sulla intuizione (e su varie verificazioni), che sopra un vero ragionamento matematico. Alla dimostrazione si potrà forse arrivare considerando la curva in uno spazio superiore come intersezione parziale di più varietà e trattando algebricamente il problema degli spazi secanti; si troverebbe che il numero delle soluzioni è indipendente dalla posizione particolare delle varietà. Ma un ragionamento di tal natura non potrà farsi che quando la teoria delle curve negli spazi superiori sarà più completa. Ci permettiamo però di approfittare di un principio non ancora dimostrato per risolvere un difficile problema, perché crediamo che anche con simili tentativi si possa giovare alla scienza, quando si dichiara esplicitamente ciò che si ammette e ciò che si dimostra.

curve, purché l'ordine ed il genere della curva composta siano ancora risp. n e p ".

Noi useremo soltanto curve costituite da una curva semplice con più corde, e precisamente in luogo di una curva di genere p , considereremo una curva razionale insieme a p delle sue corde.

(...)

La C_p^{m+p} si scinda in una curva razionale C_0^m appartenente ad $[m]$ ed in p delle sue corde scelte ad arbitrio.

(...)

Se è soddisfatta la (1), il numero delle serie $g_m^{(q)}$ esistenti sopra una curva di genere p uguaglia il numero degli spazi $[m - q - 1]$ che segano p rette di $[m]$.

Ora quest'ultimo numero fu già determinato²; se per semplicità poniamo

$$p - 1 - (m - q) = Q$$

ossia:

$$m = p - 1 - (Q - q)$$

e quindi per la (1)

$$p = (q + 1)(Q + 1),$$

si trova che il numero di cui si parla è dato da

$$\frac{1!2!3! \dots q!1!2!3! \dots Q!p!}{1!2!3! \dots (q + Q + 1)!}.$$

It is known that on a curve of genus p with general moduli there exist a finite number of *linear series* $g_m^{(q)}$ (rational involutions of ∞^q groups of m points) whenever

$$(2) \quad m - q = (p - m + q)q;$$

how many are these $g_m^{(q)}$? (...) Our goal is to solve this problem in complete generality by exploiting the following notion of enumerative geometry, which we applied in another occasion³:

"the number (assumed to be finite) of the $[r]$ (r -dimensional spaces) cutting σ points on a curve C_p^n (of degree n and genus p) in a $[s]$ does not change, nor becomes infinite, when the

²V. la nostra nota IV: *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni*, §10.

³See the paper III, *Una applicazione della geometria enumerativa*. We have to admit that in establishing this notion we rely more on intuition (and on several checks) than on a complete mathematical argument. Maybe the proof will be reached by considering the curve in a higher space as the partial intersection of several varieties and by treating algebraically the problem of secant spaces; we would find that the number of solutions is independent on the special position of the varieties. But such an argument could be carried out only when the theory of curves in higher spaces will be more developed. On the other hand, we are going to apply a still unproven principle in order to solve a difficult problem since we believe that such attempts may be useful to the progress of science, provided one explicitly declare what is admitted and what is proven.

given curve is replaced by the union of several curves, provided that the degree and the genus of the reducible curve are still n e p , respectively”.

We are going to use only curves made by an irreducible curve together with several chords, more precisely, instead of a curve of genus p we will consider a rational curve together with p of its chords.

(...)

Let the C_p^{m+p} be split into a rational curve C_0^m in $[m]$ and into p of its chords, arbitrarily chosen.

(...)

If (2) is satisfied, the number of series $g_m^{(q)}$ laying on a curve of genus p is equal to the number of space $[m - q - 1]$ cutting p lines of $[m]$.

Now, this last number was already computed⁴; if for simplicity we set

$$p - 1 - (m - q) = Q$$

that is to say:

$$m = p - 1 - (Q - q)$$

hence by (2)

$$p = (q + 1)(Q + 1),$$

we find that the number we are looking for is given by

$$\frac{1!2!3! \dots q!1!2!3! \dots Q!p!}{1!2!3! \dots (q + Q + 1)!}.$$

Guido Castelnuovo: *Memorie scelte*, Aggiunta alle Memorie III, IV e V, p. 69.

Nell'autunno 1888 C. Segre, che allora studiava le superficie rigate algebriche degli iperspazi, aveva ricondotto la determinazione del numero delle direttrici (curve unisecanti le generatrici) d'ordine minimo di una rigata al calcolo del numero degli spazi S_{s-1} che contengono s generatrici di una rigata di S_s , e mi propose il problema di stabilire questo numero. Di qua l'origine della Mem. III, che contiene al n. 4 il risultato richiesto, del quale ha tenuto conto il Segre ("Mathematische Annalen", vol. 34, 1889). L'idea che mi ha permesso di raggiungere rapidamente questo e altri risultati consiste nel sostituire ad una curva irriducibile d'ordine n e genere p di un iperspazio, una curva composta di una curva d'ordine $n - 1$ e di una retta unisecante o bisecante, secondo che quest'ultima curva ha genere p o $p - 1$.

Questo *principio di degenerazione*, che serve anche nella Mem. V, è semplicemente ammesso; la prima dimostrazione che lo spezzamento non altera i numeri richiesti fu data per via topologica (ricorrendo alle superficie di Riemann) da F.

⁴See our note IV: *Numero degli spazi che segano più rette in uno spazio ad n dimensioni*, §10.

Klein in un suo corso del 2° semestre 1892 (*Riemannsche Flächen*, II, pag. 110 e segg., lezioni litografate 1892). Per via algebrica occorre far vedere che la curva spezzata può esser riguardata come limite di una curva irriducibile variante entro un sistema continuo, ciò che, sotto ipotesi assai larghe, ha dimostrato F. Severi nelle *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921); v. in particolare pag. 392.

In autumn 1888 C. Segre, who was then investigating ruled algebraic surfaces in hyperspaces, had reduced the determination of the number of directrices (cubes unisecant the generatrices) of minimal degree of a ruled surface to the computation of the number of spaces S_{s-1} containing s generatrices of a ruled surface in S_s , and he posed to me the problem of establishing this number. Hence the origin of paper III, containing at n. 4 the requested result, taken into account by Segre ("Mathematische Annalen", vol. 34, 1889). The idea that allowed me to quickly reach this and other results consists in substituting to an irreducible curve of degree n and genus p in a hyperspace, a reducible curve union of a curve of degree $n - 1$ and of a line, either unisecant or bisecant according to the fact that this last curve has genus either p or $p - 1$.

This *principle of degeneration*, applied also in the paper V, is simply admitted; the first proof that the splitting does not change the required numbers was given through topology (by exploiting Riemann surfaces) by F. Klein in his course delivered on the second semester of 1892 (*Riemannsche Flächen*, II, p. 110 and ff., lithographed lectures 1892). To follow an algebraic way one needs to show that the reducible curve may be obtained as a limit of an irreducible curve varying in a continuous system, that is, under very mild assumptions, F. Severi proved in *Vorlesungen über algebraische Geometrie*, Anhang G. (B. G. Teubner, Leipzig-Berlin, 1921); see in particular p. 392.

3. A FEW REMARKS

3.1. Guido Castelnuovo and Corrado Segre. We have seen that the starting point of Castelnuovo's research is an enumerative question posed to him by Corrado Segre. The role of the intense scientific dialogue between Segre and Castelnuovo in the flourishing of the Italian school of algebraic geometry should not be underestimated: in a letter to Amodeo sent on February 6, 1893, Castelnuovo mentions with longing the *orge geometriche torinesi* (*geometric orgies in Turin*). As pointed out by Enrico Arbarello (private communication):

When thinking of Castenuovo, and of his walks with Corrado Segre through the streets of Turin, during which they rapidly

absorbed Riemann's point of view through the prism of their Italian taste, I can't help but think of how unfamiliar, abstract, and foreign it must have felt to them. I think that without being exposed to those revolutionary ideas, which freed him from the extrinsic world of Cremona transformations, Castelnuovo might not have arrived at his contraction principle. Indeed, what I would celebrate in Castelnuovo is his absolute open-mindedness, his taste for adventure, and his eagerness to create and follow new paths, no matter how faint their trace.

The mail correspondence between Segre and Castelnuovo witnesses their both scientific and personal deep fellowship. Here Segre comments Castelnuovo's results presented above:

C. Segre a G. Castelnuovo, 20 IX 1888 ([1])

Torino, 20 IX 88

Carissimo Castelnuovo,
Alcuni dei teoremi che mi comunichi mi paiono veramente importanti. Importante l'idea di servirsi di curve di genere p degeneri. (...)

C. Segre to G. Castelnuovo, 20 IX 1888

Torino, 20 IX 88

My dearest Castelnuovo,
Some of the theorems you told me seem to me really important. Important the idea of exploiting degenerations of curves of genus p . (...)

Here instead Segre addresses touching words to Castelnuovo just after his move from Turin to Rome:

C. Segre a G. Castelnuovo, 12 XI 1891 ([1])

Torino, 12 XI 91

Mio carissimo,
Ricevo la tua affettuosa lettera, e te ne ringrazio. Da Lunedì tu mi manchi ed io sento vivamente questa lacuna. Tu accenni a quel po' di giovamento che hai potuto trarre in questi quattro anni dalla mia compagnia. Se ciò è vero, è pur vero che da te io ho avuto un completo ricambio, e che il tuo ingegno acuto, come la tua bontà di cuore m'han reso continuamente utili e piacevoli le tante ore che passavamo insieme (...) Tu m'hai fatto del bene, lo ripeto, non solo intellettualmente ma anche moralmente. Ed ora che tu mi manchi sento realmente un vuoto, che non sarà colmato da nessuno. (...) Conservami sempre il tuo affetto. (...)

E ancora una volta un abbraccio affettuosissimo dal

Tuo aff.mo C. Segre

C. Segre to G. Castelnuovo, 12 XI 1891 (English version by Enrico Arbarello in [2], p. 21)

Torino, 12 XI 91

My Dearest,

I am in receipt of your affectionate letter and I thank you for it. Ever since Monday I miss you, and I feel this void very deeply. You mention the bit of benefit that you might have been able to gain from the past four years in my company. If that is indeed true, it is also true that it was a completely even exchange, and that your acute insight, as well as the goodness of your heart, have continuously made the many hours I spent with you useful and pleasant (...) You did me good, I repeat, not only intellectually, but also morally. And now that you are missing, I really feel a void which cannot be filled by anyone. (...) Keep me forever in your affection. (...) And once again, a very big hug, from

Your affectionate C. Segre

3.2. Geometry and probability. We have seen that the number computed by Castelnuovo:

$$\frac{1!2!3! \dots q!1!2!3! \dots Q!p!}{1!2!3! \dots (q+Q+1)!}$$

presents a pronounced combinatorial flavour. It is well-known that Castelnuovo is the author of the first Italian treatise on the Calculus of Probability (1919) and this pioneering work [4] outside the realm of algebraic geometry is usually motivated by a gradual shift of his scientific interests towards applications of mathematics to natural and social phenomena (see for instance [7], p. 167). The above computation suggests a different (maybe complementary) explanation, by showing a much earlier Castelnuovo's taste for combinatorial manipulations analogous to the ones involved in discrete probability.

3.3. Guido ed Emma Castelnuovo. We have seen that Castelnuovo claims to apply *a still unproven principle in order to solve a difficult problem since... such attempts may be useful to the progress of science, provided one explicitly declare what is admitted and what is proven.* This intellectual habit, which is a very personal mixture of free open-mindedness and strict moral rigour, is typical of Castelnuovo's attitude to both mathematical research and teaching. His daughter, Emma Castelnuovo, consciously collects his heritage in her masterpiece volume [3] devoted to school teaching of mathematics. In particular, two explicit quotations in her book are devoted to Guido Castelnuovo. The first one is on p. 5:

Guido Castelnuovo [espone] delle riflessioni fortemente indicative per un moderno insegnamento⁵ e a cui, rilette a distanza di più di cinquanta anni, potrebbero ispirarsi oggi i

⁵G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2-3, 1962.

compilatori dei programmi di matematica: *È questo il torto precipuo dello spirito dottrinario che invade la nostra scuola. Noi vi insegnamo a diffidare dell'approssimazione, che è realtà, per adorare l'idolo di una perfezione che è illusoria. Noi vi rappresentiamo l'universo come un edificio, le cui linee hanno una perfezione geometrica e ci sembrano sfigurate e annebbiare in causa del carattere grossolano dei nostri sensi, mentre dovremmo far comprendere che le forme incerte rivelateci dai sensi costituiscono la sola realtà accessibile, alla quale sostituiamo, per rispondere a certe esigenze del nostro spirito, una precisione ideale...*

Guido Castelnuovo presents a few strongly suggestive remarks for a modern teaching⁶, from which school guidelines for mathematics could take inspiration today, more than fifty years later: *This is the main fault of the dogmatic spirit invading our school. There we teach to distrust approximation, which is reality, in order to worship the idol of a perfection, which is illusion. There we represent the universe as a building, whose lines have a geometric perfection and look deformed and obfuscated because of the rough character of our senses, while we should make clear that the confused forms disclose to us by our senses are the only achievable reality, to which we replace, in order to satisfy certain needs of our spirit, an ideal precision...*

The second, even more amazing, quotation of Guido Castelnuovo appears on p. 157 of [3]:

*Si dirà che è impossibile dare al bambino una nozione certa di funzione, che è pericoloso parlare del concetto di limite in termini vaghi, si dirà che quanto si insegna deve essere perfetto per non originare idee false che poi sarebbe difficile sradicare per sostituirle con appropriate definizioni. Mi torna alla mente quanto scriveva, nel lontano 1912, Guido Castelnuovo a questo proposito: *Ciò che si sa dal professore o dall'allievo – mi fu detto –, sia pur limitato, ma deve sapersi perfettamente. Orbene, io sono uno spirito mite e tollerante; ma tutte le volte che questa frase mi fu obiettata, un maligno pensiero mi ha attraversato come un lampo la mente. Oh, se potessi prendere in parola il mio interlocutore, e con un magico potere riuscissi a spegnere per un istante nel suo cervello tutte le cognizioni vaghe per lasciar sussistere soltanto ciò che egli sa perfettamente! Voi non immaginate mai quale miserando spettacolo potrei presentarvi! Ammesso pure che dopo una così crudele mutilazione qualche barlume rimanesse ancor nel suo intelletto, e di ciò**

⁶G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, talk held in Genova in 1912 at the III Congress of Mathesis, and reproduced in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

*fortemente dubito, somiglierebbe questo ad un gioco di fuochi folletti sperduti in tenebre profonde e sconfinato. La verità è che noi nulla sappiamo perfettamente...*⁷

One could object that it is impossible to provide a child with a rigorous notion of function, that it is dangerous to introduce the concept of limit in vague terms, one could object that what is taught has to be perfect in order to avoid misconceptions hard to eradicate and replace with appropriate definitions. It comes back to my mind what Guido Castelnuovo wrote about this, long ago in 1912: *What is known by the teacher or by the pupil – they say –, let it be limited, but it should be perfectly grasped. Well, I am a mild and indulgent spirit, but every time this statement has been objected to me, a malicious thinking has crossed my mind as a flash: Oh, if only I could take my discussant at his word, and with a magic power I could turn off in his brain for one moment every vague cognition, by letting there only what he knows perfectly! Provided after such a cruel mutilation some glimmer would survive in his intellect, which I strongly doubt, this would resemble a will o' wisp lost into a deep and immense darkness. The truth is that we perfectly know nothing...*⁸

For further links between the approach to mathematics of Guido and Emma Castelnuovo we refer to [6].

REFERENCES

- [1] Accademia Nazionale dei Lincei: *Lettere e Quaderni dell'Archivio Guido Castelnuovo*, a cura di Paola Gario, http://operedigitali.lincei.it/Castelnuovo/Lettere_E_Quaderni/menu.htm.
 - [2] Enrico Arbarello: *In honor of Guido Castelnuovo*, Venezia 2015, slides available online at <https://www1.mat.uniroma1.it/people/arbarello/G.Castelnuovo-Venezia.pdf>.
 - [3] Emma Castelnuovo: *Didattica della matematica*, La Nuova Italia, Firenze 1963.
 - [4] Guido Castelnuovo: *Calcolo delle Probabilità*, Società Dante Alighieri, Milano-Roma-Napoli 1919.
 - [5] Guido Castelnuovo: *Memorie scelte*, Zanichelli, Bologna 1937.
 - [6] Claudio Fontanari: *Guido Castelnuovo e la geometria delle curve algebriche: dalla ricerca alla didattica*, Rend. Mat. Appl. (7) 37 (2016) 137–145.
 - [7] Paola Gario: *Guido Castelnuovo: l'uomo e lo scienziato*, Rend. Mat. Appl. (7) 37 (2016) 147–183.
 - [8] Joe Harris and Ian Morrison, *Moduli of Curves*, Springer, New York 1998.
- Email address:* claudio.fontanari@unitn.it
Current address: DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO, VIA SOMMARIVE 14, 38123 TRENTO, ITALY.

⁷G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, conferenza tenuta a Genova nel 1912 in occasione del III Congresso della Mathesis, e riprodotta in *Archimede*, n. 2–3, 1962.

⁸G. Castelnuovo, *La scuola nei rapporti con la vita e la scienza moderna*, talk held in Genova in 1912 at the III Congress of Mathesis, and reproduced in *Archimede*, n. 2–3, 1962.