

ALEA

Tech Reports

Le obbligazioni strutturate nel mercato
italiano: principali tipologie e problematiche
di valutazione e di rischio

Marco Filagrana

Tech Report Nr. 9
Marzo 2000

Alea - Centro di ricerca sui rischi finanziari
Dipartimento di informatica e studi aziendali
Università di Trento - Via Inama 5 - 38100 - Trento
<http://www.cs.unitn.it/>

ALEA, Centro di ricerca sui rischi finanziari è un centro di ricerca indipendente costituito presso il Dipartimento di informatica e studi aziendali dell'Università di Trento. Il centro si propone di elaborare conoscenze innovative in materia di risk management, e di favorirne la diffusione mediante pubblicazioni e programmi di formazione. Il centro è diretto dal prof. Luca Erzegovesi. Nella collana ALEA Tech Reports sono raccolti lavori di compendio e rassegna della letteratura e della prassi operativa su tematiche fondamentali di risk management.

Marco Filagrana(*)

Le obbligazioni strutturate nel mercato italiano: principali tipologie e problematiche di valutazione e di rischio

Abstract

Questo lavoro si propone di fornire una breve rassegna delle principali tipologie di “obbligazioni strutturate” presenti sul mercato italiano. Per ciascuna tipologia si analizzano le strutture contrattuali di cui si compongono, e si imposta un modello di valutazione. La metodologia adottata, inoltre, considerato il forte tasso di innovazione nel settore, è estensibile anche alle tipologie di titoli non direttamente menzionati.

() Banca d'Italia, Filiale di Trento, Divisione di Vigilanza*

Desidero esprimere il mio più sentito ringraziamento al Prof. Luca Erzegovesi per l'interesse e la disponibilità che mi ha dimostrato, nonché per la puntuale revisione del lavoro. I giudizi e le opinioni espresse, così come gli eventuali errori, sono imputabili unicamente all'autore e non impegnano in alcun modo la Banca.

INDICE

Premessa	2
A] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "REVERSE FLOATER" (RFRN)	5
B] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "QUANTO BASKET REVERSE FLOATER"	11
C] GLI STRUMENTI DI TIPO "REVERSE CONVERTIBLE" (RC)	12
D] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "INDEX/EQUITY LINKED"	17
D.1] Index/equity linked di tipo plain vanilla (o europee)	18
D.2] Index/equity linked di tipo asiatico.	19
E] LE OBBLIGAZIONI CON SWAPTION	23
E.1] <i>Pricing</i> di una swaption.	24
F] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "CREDIT LINKED"	27
G] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "DUAL CURRENCY"	28
H] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "COUPON RESET"	29
I] LE OBBLIGAZIONI "CUM TRADING WARRANT"	31
CONCLUSIONI	34
APPENDICE A	35
Le segnalazioni statistiche di Vigilanza alla Banca d'Italia sui titoli "strutturati": due esempi	35
a] Acquisto di un titolo <i>reverse floater</i>	35
b] Emissione bancaria di un titolo <i>reverse convertible</i> . ..	37
APPENDICE B	40
1. Il modello di Black	40
2. Il modello di Black e Scholes	42
3. Il metodo Monte Carlo per le opzioni asiatiche	43
4. La valutazione di un'opzione <i>put reverse barrier knock in</i> di tipo <i>down and in</i>	45
BIBLIOGRAFIA	47

Premessa

La riduzione dei rendimenti degli strumenti obbligazionari tradizionali, la maggior propensione al rischio degli investitori italiani, nonché in campo internazionale le limitazioni di natura regolamentare all'operatività diretta in strumenti derivati da parte degli investitori istituzionali, hanno stimolato negli ultimi anni una rapida crescita delle c.d. "obbligazioni strutturate".¹ Esse si definiscono in questo modo poiché il sottoscrittore, con un unico contratto, definisce il proprio investimento assumendo molteplici strumenti finanziari, tra cui spesso rilevanti posizioni speculative in contratti derivati.

Le problematiche connesse a tali particolari obbligazioni (soprattutto di gestione del rischio e di valutazione) rendono il fenomeno degno di una certa attenzione per gli emittenti, per i sottoscrittori (*retail* o istituzionali) nonché per l'Organo di Vigilanza.

Spesso, infatti, anche gli operatori istituzionali non risultano adeguatamente preparati a gestire i rischi generati da tali strumenti.

Non solo, dal punto di vista della Vigilanza, è opinione diffusa che le obbligazioni strutturate abbiano incontrato notevole diffusione presso gli investitori istituzionali anche a causa del fatto che esse permettono di "nascondere" i contratti derivati da cui sono composte, consentendo talvolta di aggirare i limiti all'operatività in derivati fissati dalle regole di vigilanza prudenziale.

¹ Per quantificare il fenomeno in Italia si consideri che il 40% del flusso di obbligazioni emesse e quotate al MOT nel 1998 era costituito da obbligazioni "strutturate" (Fonte: Longo-Siciliano, 1999).

A titolo di esempio, la problematica si presenta evidente per le banche di credito cooperativo. Esse possono assumere posizioni in contratti derivati solo a fini di copertura, mentre l'acquisto di titoli "strutturati", incorporanti vendite di opzioni put, sembra costituire prassi comune.

Sotto altro aspetto, in relazione all'attività di gestione individuale di portafogli, l'art. 37, comma 1, lettera d) del Regolamento Consob 11522/98 stabilisce che il contratto per gli investitori in riferimento agli strumenti derivati, deve "indicare se detti strumenti possono essere utilizzati per finalità diverse da quelle di copertura dei rischi connessi alle posizioni detenute in gestione". È da ritenersi, pertanto, che se un contratto di gestione non prevede l'impiego di strumenti derivati per finalità diverse dalla copertura, l'intermediario debba astenersi dall'investire quote del patrimonio gestito in obbligazioni strutturate, poiché esse, come già illustrato, implicano la sottoscrizione di posizioni speculative di contratti a termine e in opzioni. Oltre a ciò, all'art.43, comma 5 dello stesso Regolamento, è previsto che gli intermediari possano effettuare operazioni in strumenti derivati (non di copertura) solo se questi sono quotati su un mercato regolamentato. Pertanto il patrimonio gestito può essere investito esclusivamente in obbligazioni strutturate quotate su un mercato regolamentato.

La necessità di un corretto trattamento in senso lato di questi titoli è avvertita pertanto in molteplici circostanze. Oltre agli aspetti normativi-prudenziali sopra approfonditi, si considerino gli aspetti valutativi di tali prodotti: si pensi a quando si debba procedere ad una valutazione degli stessi in quanto presenti nel portafoglio delle banche, delle gestioni patrimoniali, dei fondi comuni ovvero quando si intenda definire l'esposizione al rischio di tasso dell'intermediario, del costo della sua raccolta, quando si intenda monitorare il costante rispetto dei parametri di

vigilanza prudenziale, nonché la correttezza delle segnalazioni statistiche di Vigilanza, oppure quando la banca si impegna a "fare mercato" sugli strutturati per conto della clientela.

Quest'aspetto, tra l'altro, assume particolare importanza alla luce della comunicazione Consob del 24.12.'98 attuativa del d.lgs. n.58/98, in cui si prevede che gli enti che organizzano scambi di strumenti finanziari aventi caratteristiche di sistematicità debbano rendere disponibili al pubblico informazioni sulle regole del sistema, sulla formazione dei prezzi e sui contratti conclusi.

Nell'ottica delle considerazioni sinora esposte, questo lavoro si propone pertanto di fornire una breve rassegna delle principali tipologie di "obbligazioni strutturate" presenti sul mercato italiano; per le problematiche sopra esposte, al fine di una maggior evidenza del rischio connesso, si analizzeranno per ciascuna di esse le strutture contrattuali di cui si compongono, nonché per le stesse si forniranno delle proposte di valutazione. La metodologia adottata, inoltre, considerato il forte tasso di innovazione nel settore, potrà essere estesa anche alle tipologie di titoli non direttamente menzionati.

A conclusione di questa introduzione, infine, preme evidenziare che le tecniche di *pricing* illustrate nel seguito non costituiscono una soluzione semplice e definitiva al problema. Poiché infatti alcune forme tecniche presentano caratteristiche "esotiche" non sempre agevoli da formalizzare, mentre tutte incorporano posizioni in derivati *non negoziabili*, quanto proposto vuole essere un contributo all'inquadramento di una problematica non ancora sistematicamente e diffusamente affrontata.

A] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "REVERSE FLOATER" (RFRN)

Tali obbligazioni sono caratterizzate da una durata elevata e da cedole iniziali (quasi sempre con frequenza annuale) fisse, talvolta di tipo *step up/down*², di gran lunga superiori alle condizioni del mercato registrate al momento dell'emissione. Queste, dopo un certo numero di anni, vengono trasformate in flussi cedolari inversamente legati ai tassi di interesse a breve termine, soggetti al vincolo di non negatività (in altri termini, la cedola, che non potrà essere negativa, risulterà pari ad un valore fisso k meno n volte un tasso a breve).

Ciò premesso, si rileva come una delle possibili scomposizioni dei titoli anzidetti possa essere data dalla combinazione dei tre seguenti elementi di base:

a) detenzione di un titolo a lungo termine con cedola fissa pari a k ;

b) acquisto di un IRS con data di decorrenza coincidente con la data di liquidazione dell'ultima cedola a tasso fisso del titolo reverse floater, avente le seguenti caratteristiche: importo pari al nominale dell'obbligazione sottoscritta moltiplicato per n , tasso fisso pari convenzionalmente allo zero per cento; tasso indicizzato pari al parametro di riferimento; data di scadenza coincidente con quella del titolo; data di regolamento (coincidente con quella di revisione del tasso variabile) pari a quella di liquidazione delle cedole del titolo;

c) acquisto di una serie di cap di copertura di valore attuale C_s , con date di decorrenza pari a quelle di partenza delle cedole variabili, con strike pari a k/n , durata contrattuale pari quella dell'IRS suddetto e

² Un'obbligazione di tipo *step up (down)* è caratterizzata da flussi cedolari fissi, predefiniti al momento dell'emissione, ma di tipo crescente (decrescente) ad ogni stacco cedola.

importo nozionale pari a quello dell'obbligazione sottoscritta moltiplicato per n .³

Se ipotizziamo le prime cedole pari a M_s , il prezzo di un tale titolo è dato da:

$$P = \sum_{s=1}^t \frac{M_s}{(1+r_s)^s} + \sum_{s=t+1}^T \frac{\max[k-nf_s; 0]}{(1+r_s)^s} + \frac{100}{(1+r_T)^T} \quad (1)$$

dove k è pari al valore massimo che la cedola variabile (pagata da $t+1$ in poi) può assumere, n il fattore moltiplicativo del parametro di indicizzazione, T la scadenza del titolo, r_s il tasso di attualizzazione zero coupon sulla scadenza appropriata ed f_s il tasso cedolare forward. A questo punto, seguendo l'approccio di Dozio-Esposito (1998), semplifichiamo la (1) depurandola dai riferimenti ai tassi forward cedolari. Con alcuni passaggi algebrici, infatti, si dimostra che la cedola variabile è scomponibile in tre elementi:

$$\max[k-nf_s; 0] = k - nf_s + n \cdot \max[f_s - k/n; 0] \quad (2)$$

dove l'ultimo è esattamente n volte il pay-off di un cap sul tasso forward f_s con *cap rate* pari a k/n . Indicando con C_s il valore attuale di un tale cap, considerando che con alcuni passaggi è possibile definire la seguente uguaglianza:

$$\sum_{s=t+1}^T \frac{f_s}{(1+r_s)^s} = \frac{100}{(1+r_t)^t} - \frac{100}{(1+r_T)^T} \quad (3)$$

³ È possibile ricavare il *pricing* di tale strumento in base a tale scomposizione nel modo seguente:

$$P = B(K, T) + n \cdot \text{ValoreIRS}_{t_0}[\text{ricevo}(0\%), \text{pago } f_s] + n \cdot \sum_{s=t+1}^n C_s,$$

essendo ValoreIRS_{t_0} il valore dell'IRS descritto nel testo al momento t_0 della valutazione. Tuttavia la valutazione del titolo ottenuta dalla (4) risulta di più immediata applicazione.

Inoltre, qualora i cap risultino decisamente *out of the money*, un primo modo per valutare tali titoli potrebbe consistere nella sostituzione nella (1) dei tassi *forward* impliciti nella *term structure*, il che equivale a valorizzare all'*intrinsic value* i cap presenti nella struttura.

sostituendo la (3) e la (2) nella (1), ipotizzando che le cedole iniziali siano tutte costanti (cioè che $M_s = M \forall s$), si avrà che il prezzo di un *reverse floater* semplice è pari a:

$$P = B(k, T) - (k - M) \sum_{s=1}^t \frac{1}{(1+r_s)^s} - n \left[\frac{100}{(1+r_t)^t} - \frac{100}{(1+r_T)^T} \right] + n \sum_{s=t+1}^T C_s \quad (4)$$

essendo $B(k, T)$ il prezzo di un titolo a tasso fisso che paga cedola annuale pari a k , con scadenza T .

I primi tre addendi sono facilmente determinabili con la curva dei rendimenti, mentre i caps equivalgono a delle opzioni call sui tassi forward e possono essere valutati con la formula di Black⁴.

A questa struttura relativamente semplice sono seguite emissioni contraddistinte da maggiori sofisticazioni, mediante l'introduzione di nuovi tetti massimi e minimi alle future cedole variabili, che si traducono rispettivamente nella formulazione di floor e cap sul tasso cedolare di indicizzazione.

Tuttavia, prima di procedere all'illustrazione di un caso concreto, intendiamo spendere alcune parole circa la misura della rischiosità di tali strumenti, in relazione alla variazione dei tassi di interesse. A tale proposito possiamo ricorrere alla *duration*. Poiché essa è un operatore lineare, quella complessiva del titolo sarà semplicemente data dalla somma delle *duration* (considerate con il giusto segno) dei singoli termini della (4), usando come fattore di ponderazione il rapporto tra il valore di questi ultimi e quello della *rfrn*. Negli esempi che seguono si potrà rilevare come la *duration* di questi strumenti sia particolarmente elevata, rendendo di fatto questi titoli molto sensibili a variazioni dei tassi di interesse.

Consideriamo ora un *rfrn* di durata decennale (1.12.99 - 1.12.09), con la seguente struttura cedolare:

Dal	al	N°	Flusso cedolare
'99	'04	5	10%,8%,6%,6%,6%
'05	'09	5	15%-2*Euribor12m

Il prezzo di tale obbligazione, al momento dell'emissione, è pari a:

$$P = B(15,10) - \frac{5}{(1+r_1)} - \frac{7}{(1+r_2)^2} - \sum_{s=3}^5 \frac{9}{(1+r_s)^s} - 2 \left[\frac{100}{(1+r_5)^5} - \frac{100}{(1+r_{10})^{10}} \right] + 2 \sum_{s=6}^{10} C_s \quad (5)$$

I--a--I I-----b-----I I-----c-----I I-d-I

Nelle prime colonne della tabella 1 sono indicati i tassi *swap* sulle varie scadenze da cui sono ricavati i rispettivi tassi *forward*. I primi vengono utilizzati per attualizzare i flussi a,b,c, mentre i secondi entrano nel calcolo di C_s . Per ricavare il prezzo di B(15,10) si è fatto ricorso per semplicità ai rendimenti dei BTP di pari durata (anche se ciò, naturalmente, esclude il premio al rischio che il titolo dovrebbe includere nel caso di emittenti non primari).⁵ Si è invece utilizzata la volatilità storica dell'Euribor 12 mesi, pari al 18,22%, per la valutazione dei vari caps, secondo l'approccio alla Black. Come si è affermato in precedenza, si può osservare come il ricorso a queste due ultime considerazioni lascia margini di discrezionalità nella valutazione di siffatti titoli. Infatti, il valore della volatilità andrebbe in qualche modo corretto, poiché la stima storica della volatilità è comunque riferita a σ quotata su un mercato organizzato; ma l'opzione incorporata nel titolo

⁴ Cfr appendice B.

⁵ Precisamente, si sono utilizzati, con le cautele indicate sopra, i Tassi di Rendimento effettivi a scadenza (TRES) dei Btp a causa dell'ampia diffusione degli stessi relativamente a più scadenze e livelli cedolari. Nell'esempio, il valore appropriato del TRES per apprezzare B(15,10) viene riportato nella parte più in basso a sinistra della Tabella 1 ed è pari a 5,28%.

non è negoziabile e pertanto la stima di σ andrebbe rivista verso il basso, in modo tale che il valore dei vari *cap* incorpori il prezzo della loro illiquidità per il possessore.

Nella Tabella 2, alla riga "Dur.Pond.", si riportano, invece, le *duration* dei singoli termini della (5)⁶, rapportati al valore del titolo, così come calcolato nella Tabella 1. La somma di questi elementi fornisce la *duration* complessiva del titolo (all'incirca pari a nove anni e mezzo). Come si può notare, essa risulta essere molto elevata, se si considera che essa in pratica coincide con quella del BTP trentennale IT000127851, con cedola 5,25% e scadenza novembre 2029.

struttura	t	Swap	Forward	a	b	c	d
10,00%	1	3,63%	3,63%	14,25	-4,82		
8,00%	2	3,99%	4,35%	13,53	-6,47		
6,00%	3	4,28%	4,86%	12,85	-7,94		
6,00%	4	4,50%	5,16%	12,21	-7,55		
6,00%	5	4,68%	5,40%	11,60	-7,16	-159,115	0,0356
15%-2*Euribor	6	4,86%	5,76%	11,02			0,0499
15%-2*Euribor	7	5%	5,84%	10,46			0,1352
15%-2*Euribor	8	5,13%	6,04%	9,94			0,0672
15%-2*Euribor	9	5,21%	5,85%	9,44			0,0686
15%-2*Euribor	10	5,27%	5,81%	8,97		119,6696	
				59,78			

	sigma=	18,22%	P=	101,37	174,05	-	33,94	-	39,45	0,71
	strike=	7,50%	i netto=	4,66%						
	cedola fix=	15%								
	reverse=	2								
	tres per a =	5,28%								

Tabella 1

Il prezzo $P=101,30$ è dato dalla somma algebrica del totale delle singole colonne (a,b,c,d) che rappresentano i singoli elementi da cui è composta l'obbligazione (Cfr. formula 5). Nel riquadro in grassetto in basso a sinistra sono invece riportate le caratteristiche tecniche dell'emissione. In particolare, "sigma" è la volatilità dell'Euribor12m, "strike"=15%/2, "cedola fix"=K cedola massima della parte floater, "reverse" è pari a n della formula 1 e "tres per a" è il tasso di attualizzazione utilizzato per la valutazione del titolo a tasso fisso $B(15,10)$ (Cfr. nota 5).

Il prezzo dei vari C_S riportati nella colonna d è stato ottenuto applicando il modello di Black descritto nell'appendice B. Il valore S_T riportato nella formula B della stessa appendice è dato dal tasso forward

⁶ Si rinvia all'appendice B per una breve trattazione della *duration* di un cap. Si ricorda invece come la *duration* di uno zero coupon sia pari alla scadenza del titolo stesso.

sulla scadenza appropriata per ogni C_s . La scadenza dei vari caplets è pari a $(s-t_0)$, dove t_0 è il momento in cui viene effettuata la valutazione.

t	A	b	c	d
1		-0,048		
2		-0,128		
3		-0,235		
4		-0,298		
5		-0,353	-7,854	0,0001
6				0,0002
7				0,0006
8				0,0003
9				0,0003
10			11,813	
10	3,85			
Dur.Pond.	6,61	-1,06	3,96	0,0014

Duration complessiva in anni	9,51
------------------------------	------

Tabella 2

La "Duration complessiva in anni" è la somma algebrica delle durations dei singoli elementi da cui è composta l'obbligazione, ponderate con il rapporto del valore di tali elementi con il prezzo della stessa obbligazione. Per esempio, nella colonna (a) 3,85 è la duration del titolo a tasso fisso $B(15,10)$, mentre "Dur.Pond" 6,61 è data da $3,85 \cdot (174,05/101,37)$, essendo 174,05 il valore di $B(15,10)$ e 101,37 il prezzo dei reverse floater (Cfr. Tabella 1).

Nel prossimo esempio consideriamo un *reverse floater* che presenta un limite massimo (floor) alle cedole variabili (pari al 6,5%) e che assicura un rendimento minimo (cap) sulle ultime tre cedole. La struttura cedolare è riassunta nello schema di seguito riportato (si ipotizza che la durata coincida esattamente con quella del titolo dell'esempio precedente).

Dal	al	N°	Flusso cedolare
'99	'02	3	10,45%,7% le altre
'03	'06	4	15%-2*Euribor12m; min 0%, max 6,5%
'07	'09	3	15%-2*Euribor12m; min 3%, max 6,5%

Per non appesantire la trattazione, omettiamo il calcolo pratico del prezzo e della *duration* del titolo, riportando nel seguito solo il *pricing* di tale obbligazione. Considerando che in una struttura *reverse* ciò che è floor sul parametro diventa cap e viceversa, P sarà dato da:

$$P = \frac{(10,45-7)}{(1+r_1)} + B(15,10) - (15-7) \sum_{s=1}^3 \frac{1}{(1+r_s)^s} - 2 \left[\frac{100}{(1+r_3)^3} - \frac{100}{(1+r_{10})^{10}} \right] + \left(6 \right)$$

$$+ 2 \sum_{t=4}^7 A_t + 2 \sum_{t=8}^{10} B_t - 2 \sum_{t=4}^{10} F_t$$

essendo $A_t = \max[f_s - 15/2; 0]$; $B_t = \max[f_s - (15-3)/2; 0]$; $F_t = \max[(15-6,5)/2 - f_s; 0]$.

B] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "QUANTO BASKET REVERSE FLOATER"

Recentemente si è assistito ad un'emissione di titoli *reverse floater* innovativi nel parametro di indicizzazione. Tali obbligazioni, infatti, sono denominate in valuta domestica e sono indicizzate a dei tassi di interesse stranieri (struttura definita "quanto"). Se la *rfrn* fa riferimento ad un paniere di indici, si ottiene per l'appunto un "quanto basket" reverse floater.

Ferme restando le considerazioni valutative del punto precedente per quanto attiene alla parte fissa, appare evidente come il punto cruciale per tali titoli sia il calcolo della misura di volatilità del paniere di tassi per la valutazione delle opzioni implicite nella struttura *reverse*.

In prima approssimazione, per la stima della volatilità di un basket (σ_B) si possono percorrere due vie. Direttamente, si costruisce la serie dei rendimenti del basket e su questa si stima statisticamente la deviazione standard. Alternativamente è possibile calcolare σ_B come radice quadrata del prodotto matriciale $P^T \Sigma P$, dove P è il vettore dei pesi

dei diversi componenti, Σ è la matrice delle varianze-covarianze degli indici componenti il basket. Ottenuta σ_B è possibile valorizzare con la formula di Black le opzioni implicite nel titolo.

Tuttavia, le strutture "quanto" presentano una problematica specifica inerente la conversione al cambio fisso in lire del valore di un'attività finanziaria legata a tassi in valute non domestiche. Tale problematica può essere superata con opportune ipotesi circa il comportamento della variabile stocastica rappresentata dal valore del *basket* (essenzialmente ipotesi di log-normalità), che consentono la definizione di una valutazione in forma chiusa delle opzioni incorporate nel titolo.

Tuttavia, considerata la minore diffusione di tali obbligazioni sul mercato domestico, non appare conveniente fornire in questa sede la definizione degli algoritmi di calcolo del *pricing*.

C] GLI STRUMENTI⁷ DI TIPO "REVERSE CONVERTIBLE" (RC)

Lo schema di questi titoli atipici prevede il pagamento di un'unica cedola generalmente molto superiore alle condizioni di mercato, compensata dalla particolare struttura di rimborso del capitale⁸. Infatti, a scadenza l'emittente ha

⁷ La particolare struttura dei valori mobiliari in esame, non garantendo al sottoscrittore l'integrale restituzione del capitale, rende i titoli in discorso non assimilabili a quelli rappresentativi di raccolta di fondi con l'obbligo di rimborso, quali le obbligazioni. Di conseguenza, i titoli in oggetto vanno inquadrati tra i valori mobiliari non previsti dall'ordinamento, tenuto conto che la delibera del CICR del 12.1.1994, attuativa dell'art. 129 del Decreto Legislativo dell'1.9.1993, n.385, stabilisce che, nel caso di valori mobiliari tipici, il contenuto contrattuale incorporato nei titoli non deve risultare difforme da quello assegnato agli stessi dall'ordinamento.

⁸ In effetti, come si vedrà, tale cedola può essere scomposta negli interessi calcolati al rendimento corrente del titolo nonché dal premio di un'opzione put pagato dall'emittente al sottoscrittore alla scadenza del titolo. Tuttavia, agli occhi di un investitore medio queste grandezze

l'opzione di rimborsare alla pari se il prezzo del titolo sottostante è maggiore o uguale allo *strike price* prefissato (E) di una certa azione (X); viceversa consegnerà al sottoscrittore un certo numero di azioni (N) determinato in base allo *strike* fissato al momento dell'emissione.

Tale tipologia di titoli è facilmente replicabile con la combinazione di uno *zero coupon* con rimborso pari al nominale maggiorato della cedola e di N opzioni put con strike E. Il profilo finanziario dell'investitore, infatti, è ottenibile similmente con l'acquisto dello *zero coupon* e con la vendita delle N opzioni put. Consideriamo un semplice esempio.

In data 1/12/99 la banca XY emette un rc sul titolo sottostante Comit, cedola lorda 13% (netta pari al 9,49%⁹), scadenza T=1 anno, *strike price* E=9.524 lire (pari generalmente al prezzo del sottostante all'emissione in t). Pertanto, se al 1/12/00 il prezzo Comit sarà maggiore di E, l'emittente pagherà L. 5.474.500 (nominale più cedola, a fronte di un investimento iniziale di L. 5.000.000), viceversa consegnerà 525 azioni Comit (5.000.000/9.524) più gli interessi comunque garantiti.

Il costo dell'operazione per il sottoscrittore è quindi dato dal valore dell'investimento nello *zero coupon* (valutato al tasso appropriato) al netto del ricavo derivante dalla vendita delle put (N*premio put).

Il valore della prima componente è dato attualizzando la somma comunque percepita a scadenza (L.5.474.500) al tasso annuale *risk free*. Se esso in t è pari al 4,42%, tale componente è pari a L. 5.275.612.

Detraendo dalla prima componente gli N premi incassati dalle put (esempio, se il premio vale L. 200, N*premio vale L. 105.000), si ottiene il costo finale pari a L.5.170.612.

appaiono come un'unica cedola elevata che rende particolarmente attraente il titolo.

Rapportando a 100 il risultato ottenuto (cioè dividendo L. 5.170.612 per 5.000.000) si ottiene il *fair value* del titolo, in questo caso pari a 103,41.¹⁰

Il profilo di rischio cui è esposto il detentore di tali titoli è duplice (sebbene non nettamente distinguibile): da una parte, infatti, vi è il rischio di tasso di interesse che agisce prevalentemente nella struttura zero coupon; dall'altro vi è la rischiosità tipica cui è esposto un venditore di opzioni put. Secondo quest'ultimo aspetto, teoricamente, il possessore di un rc potrebbe perdere tutto il capitale investito, se alla scadenza del contratto il prezzo dell'azione X risultasse pari a zero. In questo caso il sottoscrittore incasserebbe solo gli interessi calcolati sul nominale. La variabilità del tasso di interesse, pur incidendo sul prezzo dell'azione sottostante, presenta tendenzialmente un profilo di rischio minore sulla struttura zero coupon; infatti, tali strumenti si connotano generalmente per una scadenza non superiore all'anno. La relativa *duration* di tali titoli risulta pertanto contenuta.

Applicando alla componente in opzioni del titolo l'analisi svolta tramite le "greche"¹¹ è possibile misurare al momento dell'emissione la sensibilità del prezzo del rc ai vari fattori di rischio. In particolare, la sensibilità al tasso di interesse va combinata con la variazione registrata dalla componente zero coupon, tramite la rispettiva analisi della *duration*.

L'emittente (bancario) è esposto essenzialmente all'avverso andamento del premio dell'opzione, detenuto implicitamente nei confronti del sottoscrittore. Nel caso in cui alla scadenza del titolo il prezzo dell'azione X fosse superiore

⁹ Tali titoli, in quanto atipici, sono infatti tassati al 27%. Cfr. nota n.7.

¹⁰ Si rimanda all'appendice B per una sintetica descrizione del modello utilizzato per la valutazione del premio delle put.

¹¹ Cfr. appendice B, formula H.

allo strike, il premio assumerebbe un valore nullo e la banca sarebbe costretta a pagare tale forma di raccolta a tassi ben superiori a quelli di mercato, con un impatto negativo sul margine di interesse proporzionale ovviamente alla quantità emessa. Per tale motivo, la maggior parte degli emittenti ricorre ad operazioni di copertura. Rivendendo l'operazione put implicita, infatti, è possibile definire ex ante il costo della raccolta.

Inoltre, tali strumenti finanziari possono esporre l'emittente ad un "rischio di reputazione", non necessariamente correlato all'ammontare emesso (soprattutto nelle realtà delle aziende di piccole dimensioni). Infatti, l'aumento della propensione al rischio dei risparmiatori, spesso non è accompagnato ad una pari consapevolezza dello stesso. Pertanto, se il sottoscrittore non risulta adeguatamente informato dalla banca emittente circa la rischiosità dello strumento e se il mercato risulta sfavorevole al sottoscrittore, l'intermediario potrebbe trovarsi a fronteggiare una perdita di quote di mercato.

Vi sarebbe, inoltre, la presenza non trascurabile di un "rischio legale" cui l'intermediario è esposto, laddove l'operatività sui titoli della specie non si svolga entro i canoni della normativa Consob richiamata in premessa, in nota 13, nonché entro gli artt. 28 e 29 del regolamento Consob 11522 del 1.7.99 ("Informazioni tra gli intermediari e gli investitori", "operazioni non adeguate").

Tale rischio, tuttavia, risulta temperato dalla normativa vigente in tema di emissioni obbligazionarie da parte delle banche in relazione all'informativa che esse sono tenute a fornire al pubblico al momento dell'emissione.¹² Nella predisposizione del foglio analitico che deve essere messo a

¹² Cfr. provvedimento della Banca d'Italia del 30.7.99, "Raccolta in titoli delle banche. Trasparenza". Cfr. anche "La quotazione e l'offerta al pubblico di obbligazioni strutturate", Longo - Siciliano, Quaderni di Finanza n°35, Agosto 99, Consob.

disposizione dei sottoscrittori, infatti, la normativa vigente prevede che l'emittente bancario indichi espressamente le componenti derivative connesse al prodotto finanziario, fornisca una valutazione delle stesse al momento dell'emissione, nonché produca "analisi di sensitività" in relazione a degli scenari sfavorevoli per il sottoscrittore.¹³

In molte emissioni della specie, l'opzione incorporata è un'opzione a barriera e precisamente una *reverse barrier knock in* di tipo *down and in put*. Le opzioni barriera sono opzioni che appaiono (*knock in*) o scompaiono (*knock out*) quando il prezzo dell'attività sottostante raggiunge un determinato valore H detto appunto barriera. Se la barriera si trova all'interno della regione *out of the money* si avrà un'opzione *standard* (o *regular barrier*). Viceversa si avranno opzioni di tipo *reverse barrier*. Pertanto, in una *reverse barrier put option knock in* di tipo *down and in*, H si trova nella regione *in the money* ed H sarà inferiore allo strike E .¹⁴ Solo se il valore dell'attività sottostante scende al di sotto del valore barriera l'opzione diventa attiva (cioè diventa una semplice *plain vanilla*).

Si rimanda a Sguera (1999) per un'analitica trattazione di siffatte opzioni nonché del relativo *pricing*, mentre in appendice B si fornisce la valutazione dell'opzione in parola.

¹³ Non solo, gli emittenti bancari di tali prodotti, entrando nei casi di inapplicabilità ex art.100, punto 1, lettera f) del D.Lgs.24.2.98 n.58, dovrebbero attenersi alle norme previste in materia di sollecitazione all'investimento così come disciplinato dal richiamato D.Lgs. 98/58, nonché dal regolamento attuativo Consob del 14.05.99 n. 11971

¹⁴ In tal modo il relativo *pay off* sarà pari a:

$$\text{pay-off} = \begin{cases} \text{Max}[0, E - S_T] & \text{se per qualche } \tau \leq t \text{ risulta } S_\tau \leq H \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

essendo t la scadenza dell'opzione e S_T il prezzo del sottostante.

D] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "INDEX/EQUITY LINKED"

È praticamente impossibile una definizione esauriente delle tipologie di titoli riconducibili sotto tale categoria. Infatti, la fantasia degli emittenti (anche in questo caso quasi esclusivamente banche) ha prodotto una quantità impressionante di varianti della struttura base, tramite l'introduzione di clausole particolari.¹⁵ Ciò premesso, si può comunque affermare che si tratta in genere di titoli che offrono al sottoscrittore una protezione del capitale investito, spesso associato ad un rendimento minimo garantito (inferiore ai rendimenti correnti di mercato) e inoltre la partecipazione all'incremento di valore di qualche investimento rischioso (tipicamente un titolo o indice azionario, un basket di titoli, di valute...).

All'interno di tale categoria si distinguono le obbligazioni di tipo *plain vanilla* e le obbligazioni asiatiche. Le prime, cui si è fatto ricorso nelle prime emissioni della specie, sono le più semplici da valutare e anche le meno diffuse. Infatti, l'incremento di valore dell'indice su cui si calcola la retrocessione si basa unicamente sulla rilevazione iniziale e finale dello stesso. Le obbligazioni di tipo asiatico fanno invece riferimento a medie mensili o semestrali rispetto al valore finale. Le opzioni call incorporate da queste ultime, "lisciando" la volatilità del parametro¹⁶, rendono meno costosa l'eventuale opzione di copertura, nonché consentono, in ogni caso, una maggior tutela all'emittente in caso di eccessi di rialzo del parametro di riferimento. Per questi motivi, spesso congiunti ad una intenzionale complessità di valutazione da parte degli emittenti, si giustifica la loro maggior diffusione sul mercato.

¹⁵ Talvolta le clausole introdotte sono tali da rendere effettivamente difficoltoso il raggiungimento di una valutazione, con tutte le problematiche che ne conseguono dal punto di vista della trasparenza.

¹⁶ Si ricorda infatti come una media abbia sempre deviazione standard inferiore rispetto ai singoli componenti.

Per il resto, come è facilmente intuibile, la scomposizione e la valutazione di questi titoli è simile a quella effettuata per i *rc*: in questo caso, tuttavia, nella struttura base il sottoscrittore è acquirente di opzioni call sul parametro e non venditore di put. Il loro valore, pertanto, va sommato e non detratto dalla componente zero coupon. Analizziamo di seguito le due categorie.

D.1] Index/equity linked di tipo plain vanilla (o europee)

L'incremento dell'indice/azione o basket di indici/azioni cui fare riferimento è dato da $(S/X - 1)$, con S valore dell'indice alla scadenza T dell'obbligazione ed X valore dello stesso al momento dell'emissione t_0 (*strike price*). La percentuale di partecipazione a tale incremento verrà definita nel seguito con K . Per la determinazione del prezzo del titolo, al solito, è necessario scomporre l'obbligazione nelle diverse componenti e precisamente:

1) il capitale che verrà rimborsato in T (100) più l'eventuale minimo garantito (i), per un totale pari a $100(1+i)$.

2) un'opzione di tipo europeo, con scadenza pari a T , emessa *at the money* (in quanto lo *strike price* è esattamente uguale al valore dell'indice all'inizio del periodo).

Il valore alla scadenza T di tale titolo può essere espresso come:

$$P_e = 100(1+i) + 100 \left[\max \left(K \left(\frac{S}{X} - 1 \right); i \right) - i \right]; \text{ ovvero} \quad (7)$$

$$P_e = 100(1+i) + \frac{100 \cdot K}{X} \max \left[S - \frac{(K+i)}{K} \cdot X; 0 \right] \quad (8)$$

Pertanto il valore attuale in t di tale obbligazione può essere espresso come somma

a) del valore attuale di $100(1+i)$, che costituisce la componente certa dell'obbligazione che verrà pagata a scadenza;

b) del prezzo di una call europea sull'indice di riferimento, con strike $[(K+i)/K] \cdot X$, corretto per il fattore $100 \cdot K/X$

Supponendo che $T-t=$ sei mesi, $i=3\%$, che il tasso *risk free* semplice ad un anno sia pari al 4% , si ha che il valore della prima componente è pari banalmente a $101 = 103 / (1 + 0,004 \cdot 0,5)$.

Ipotizzando che l'indice sia il Mib30, avendo $S=30.000$, $X=28.000$, $\sigma=22\%$, $K=65\%$ e $q=2\%$ (*dividend yield* dell'indice), si ha che il valore dell'opzione è pari a 2.266^{17} , da cui:

$$P_e = 101 + \frac{100 \cdot 0,65}{28.000} \cdot 2.266 = 106,26 \quad (9)$$

D.2] Index/equity linked di tipo asiatico.

Rappresentano la tipologia di gran lunga più diffusa. Il relativo *pricing* è sicuramente più complesso rispetto alle strutturate contenenti opzioni su indici di tipo *plain vanilla*.

Il metodo valutativo largamente più utilizzato è quello ottenuto mediante simulazioni Monte Carlo¹⁸. In estrema sintesi, con tale tecnica si simulano un numero N elevato di traiettorie che l'indice di riferimento può seguire da t fino a T . Successivamente per ognuna di esse si tratta di calcolare il flusso finale F_j e calcolare il valore dell'opzione come attualizzazione della media aritmetica dei *pay-off*, ossia:

$$C_T \approx \frac{1}{(1+r)^T} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N F_j \quad (10)$$

¹⁷ Cfr. appendice B per la formula del modello à la Black e Scholes.

¹⁸ Cfr. appendice B per una descrizione dello stesso.

Per la legge dei Grandi Numeri, si ha infatti come il valore medio di una serie di realizzazioni finite (N) converga al valore atteso al tendere di N all'infinito.

Alternativamente è possibile ricorrere all'approccio (Turnbull-Wakeman, 1991) per individuare una soluzione al problema valutativo in forma (quasi) chiusa.

Poiché la questione consiste nel fatto che una media aritmetica di logNormali non è distribuita come una logNormale, gli autori hanno dimostrato che tale distribuzione può essere comunque approssimata in maniera soddisfacente da una logNormale opportunamente parametrizzata.

La conclusione è rilevante poiché consente di applicare le formule alla Black e Scholes utilizzate in precedenza alla valutazione di opzioni scritte su medie aritmetiche di prezzi. Seguendo l'esposizione di Esposito (1997), posto

$$A(T) = \frac{\sum_{i=1}^N S_{t+i}}{N} = S_t \sum_{i=1}^N \frac{R_{t+i}}{N} \quad \text{con } R_{t+i} = \frac{S_{t+i}}{S_t} \quad (11)$$

Essendo S_t distribuito in maniera logNormale, si dimostra che

$$E_t[A(t)] = \frac{S_t}{N} \sum_{i=1}^N e^{ti} = S_t M_1 \quad \text{con } M_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{ti} \quad (12)$$

e che

$$E_t[A(t)^2] = \frac{S_t^2}{N^2} I_N' M I_N = S_t^2 M_2 \quad \text{con } M_2 = \frac{1}{N^2} I_N' M I_N \quad (13)$$

essendo I_N vettore unitario ($N \times 1$) e M matrice dei momenti secondi del vettore R , dove

$$m_{i,i} = e^{(2r+\sigma^2)i} \quad \text{e} \quad m_{i,j} = m_{j,i} = m_{i,i} e^{(j-i)r} \quad (14)$$

per $j > i$, con σ la volatilità dell'indice di riferimento.

È ora possibile approssimare la distribuzione della media aritmetica di logNormali con una logNormale i cui primi due momenti coincidano con quelli ricavati nelle equazioni (12) e (13). Dobbiamo cioè ipotizzare che $A(T)$ possa essere approssimata probabilisticamente da un'altra variabile $A^*(T)$, con distribuzione

$$\frac{dA^*}{A^*} = (r - q_A)dt + \sigma_A dz, \text{ con } dz = \sigma \epsilon (dt)^{1/2} \quad (15)$$

da cui per le proprietà della logNormale

$$E_t[A^*(T)] = S_t e^{(r - q_A)(T-t)} = S_t M_1^* \quad (16)$$

$$E_t[A^*(T)^2] = S_t^2 e^{2(r - q_A)(T-t) + \sigma_A^2(T-t)} = S_t^2 M_2^* \quad (17)$$

Uguagliando i termini $M_1 = M_1^*$ e $M_2 = M_2^*$ è possibile risolvere rispetto ai parametri q_A, σ_A e quindi utilizzare la formula di Black e Scholes come se $A(t)$ fosse un'azione che paga un *dividend yield* pari a q_A e abbia volatilità pari a σ_A .

Nella realtà è molto frequente avere rilevazioni ad intervalli non omogenei. In questo caso la seconda soluzione prospettata risulterà più complessa, ma la metodologia la stessa. Inoltre, l'estensione al caso in cui più rilevazioni siano già avvenute (valutazione in un tempo t pari a $t_0 < t < T$) è molto semplice: basta modificare opportunamente le formule dei pay-off dell'opzione.

Per esempio, se già M rilevazioni sono state effettuate, il pay-off dell'opzione è pari a:

$$\max \left[\frac{\bar{S}_1 + \bar{S}_2 + \dots + \bar{S}_M + S_{M+1} + \dots + S_N}{N} - X; 0 \right] \quad (18)$$

$$\max \left[\frac{S_{M+1} + S_{M+2} + \dots + S_N}{N-M} \cdot \frac{N-M}{N} - \left(X - \frac{\bar{S}_1 + \dots + \bar{S}_M}{N} \right); 0 \right] \quad (19)$$

$$\frac{N-M}{N} \max \left[A_{\text{residui}} - \bar{X}; 0 \right] \quad (20)$$

Il prezzo dell'opzione è quindi pari al valore dell'opzione scritta sulle N-M rilevazione residue, con *strike* pari a \bar{X} , il tutto moltiplicato per N-M/N.

A questo punto, trovati i valori delle call asiatiche secondo una delle metodologie indicate (implementando in entrambi i casi una semplice *routine* con qualche programma di calcolo), si procede alla valutazione delle obbligazioni.

Va tuttavia enfatizzato ancora una volta che in tale comparto la creatività degli emittenti bancari si è rivelata davvero fervida, spesso purtroppo a scapito della trasparenza e tutela degli investitori *retail*. Alcune obbligazioni, infatti incorporano dei periodi di rilevamento dell'indice "a finestra"; l'emittente si riserva di rilevare l'indice solo in periodi predefiniti della vita dell'obbligazione, oppure di modificarne a priori la frequenza di rilevazione.

Talvolta tali "strutturate" possono presentare dei cap sui rendimenti aleatori: in questo caso il sottoscrittore si ritroverà lungo su opzioni call di *strike* E e corto su call con *strike* $E_1 > E$, entrambe dello stesso tipo.

Dal punto di vista dell'emittente, il rischio associato a tali obbligazioni è dato dal costo aleatorio della raccolta. Dalla scomposizione che abbiamo illustrato di tali titoli il flusso di reddito P_{MIN} necessario all'emittente per garantire a scadenza il pagamento del capitale (per una lira investita) e dell'eventuale rendimento minimo è pari a

$$P_{\text{MIN}} = \frac{(1+i)}{(1+r)^T} < 1 \text{ poiché } r > i \quad (21)$$

La copertura del flusso aleatorio è garantito invece dall'acquisto di un'opzione call con caratteristiche appropriate; tale opzione avrà un costo pari a C. Pertanto,

il margine di intermediazione (m) a favore dell'emittente, in caso di copertura, è pari a $1 - P_{\text{MIN}} - C = m$. Tale margine può essere determinato a priori, ed è funzione del minimo garantito (i), della percentuale di retrocessione (K), nonché del tipo e delle caratteristiche dell'opzione C .

Dal punto di vista del sottoscrittore, per contro, il rischio cui è esposto, è dato principalmente dalla variabilità dell'indice di riferimento. Optando, nel caso di opzioni esotiche alla valutazione delle stesse nella forma (quasi) chiusa, e in ogni caso per le plain vanilla, è possibile calcolare la sensibilità delle opzioni incorporate a variazioni dell'indice mediante il ricorso alle "greche".

Nel caso dell'esempio in D.1, il Delta dell'opzione è pari al 61,41%. Così una variazione negativa dell'1% del Mib30 diminuisce il valore dell'opzione di 0,43 lire. In tal modo il prezzo dell'obbligazione, a parità di tutto il resto, scende di circa 43 b.p.

E] LE OBBLIGAZIONI CON SWAPTION

Tali titoli si presentano come obbligazioni a tasso fisso con incorporata la vendita all'emittente da parte del sottoscrittore di *swaption* di tipo put (il cui valore pertanto verrà dedotto dalla prima componente). Si ricorda come una *swaption* consista nel diritto da parte del detentore di pagare cedole fisse contro cedole variabili (call *swaption*), ovvero di pagare un tasso variabile e di ricevere un tasso fisso (put *swaption*).

È evidente quindi che una put *swaption* verrà esercitata qualora i rendimenti di mercato scendano sotto lo strike prefissato.

E.1] Pricing di una swaption.

La valutazione di una swaption è relativamente semplice. Consideriamo infatti un'opzione che fra T anni consente di pagare annualmente un tasso fisso R in cambio di un tasso variabile R^* per n anni. Il valore di tale swap (partenza t, scadenza t_n) al momento della partenza t è pari a

$$V = 100 - \sum_{i=1}^n R e^{-r_i(t_i-t)} - 100 e^{-r_n(t_n-t)} \quad (22)$$

mentre al tempo 0, il valore è pari a:

$$V_2 = 100 e^{-rt} - \sum_{i=1}^n R e^{-r_i t_i} - 100 e^{-r_n t_n} \quad t < t_i \leq t_n \quad (23)$$

essendo r_i il tasso zero coupon sulla scadenza appropriata. Poiché il *forward swap rate* atteso al tempo t si ottiene ponendo $V_2=0$, si avrà:

$$F = \frac{100(e^{-rt} - e^{-r_n t_n})}{\sum_{i=1}^n e^{-r_i t_i}} \quad (24)$$

Sostituendo la (24) nella (23) si ottiene:

$$V_2 = \sum_{i=1}^n e^{-r_i t_i} (F - R) \quad (25)$$

dalla (25) il pay-off al tempo t di una swaption call è pari a:

$$p.o. = \sum_{i=1}^n e^{-r_i(t_i-t)} \max(F - R, 0) \quad (26)$$

che equivale a quello di una call sul tasso swap con strike pari a R, il cui valore attuale è pari a (nell'ipotesi di R distribuito come una log-Normale):

$$c = A [F \cdot N(d_1) - R \cdot N(d_2)], \text{ con } A = \sum_{i=1}^n e^{-r_i t_i} \quad (27)$$

essendo:

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{F}{R}\right] + t\sigma^2/2}{\sigma\sqrt{t}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{t} \quad (28)$$

Mentre per una put vale:

$$p = A[R \cdot N(-d_2) - F \cdot N(-d_1)] \quad (29)$$

Vediamo di seguito un semplice esempio concreto di valutazione di siffatti titoli. Consideriamo un'obbligazione emessa il 1.12.99, scadenza 1.12.04, cedola annuale fissa pari al 5%. L'emittente dopo due anni si riserva di trasformare le cedole a tasso fisso in cedole a tasso variabile indicizzate al Libor 12 mesi. L'emittente, inoltre, ha facoltà di trasformare gli interessi una sola volta, ma per tutti gli anni fino alla scadenza. In tal modo il sottoscrittore: a) compera un titolo a tasso fisso e b) contemporaneamente vende tre put swaptions con strike pari al 5%, con scadenza dai due¹⁹ ai quattro anni, aventi come oggetti tassi swap con scadenza decrescente dai tre ad un anno.

In un tale titolo, tuttavia, la struttura delle opzioni è tale per cui il valore della put dipende dalla probabilità di non esercizio dell'opzione di scadenza inferiore. Il valore dell'ultima put (scadenza quattro anni) dipende dalla probabilità di non esercizio dell'opzione scadente tra tre anni, condizionata a sua volta al non esercizio dell'opzione scadente fra due (Cfr. Dozio, 1998) e cioè:

$$P[A_2 \cap A_1] = P[A_2|A_1] \cdot P[A_1] \quad (30)$$

con A_1 probabilità di non esercizio dopo due anni e A_2 probabilità di non esercizio dopo tre anni.

Poiché gli eventi "esercizio delle opzioni" non sono indipendenti, ne consegue che

$$P[A_{i+1}|A_i] \geq P(A_{i+1}) \quad (31)$$

Pertanto, utilizzando $P(A_{i+1})$ anziché $P[A_{i+1}|A_i]$ si tende a sottostimare la probabilità dell'evento congiunto di non esercizio di due opzioni.

Se tali eventi fossero indipendenti, il valore delle put al tempo 0 sarebbe facilmente valutabile come:

$$\text{Val put}^* = p_1 + p_2 P[A_1] + p_3 [A_1]^* [A_2] + \dots + p_n [A_{n-1}]^* \dots [A_1] \quad (32)$$

ma per la (31), la (32) sottostima il valore delle put e quindi l'obbligazione risulta sovrastimata. Con questa precisazione, possiamo assumere la valutazione così ottenuta come il limite massimo che il prezzo del titolo può assumere nel momento in cui viene effettuata la valutazione.

Inoltre, si ricorda che la probabilità di non esercizio di un'opzione put è pari a $1 - N(-d_2)$. Nella colonna val put* della tabella 3 si è indicato il valore delle put ponderato per le rispettive probabilità di non esercizio delle opzioni precedenti. La somma così ottenuta (0,74) va sottratta dal valore della componente a tasso fisso (107,24) per ottenere il prezzo massimo dell'obbligazione con swaption (106,50).

t	swap	cedola fix	F	Val Put	Val Put *
1	3,63%	5			
2	3,99%	5	5,26	1,00	0,53
3	4,28%	5	3,52	3,93	0,21
4	4,50%	5	1,75	8,14	0,00
5	4,68%	105			
		107,24			-0,74

sigma= 0,18 tres per a= 3,40%

Tabella 3

La colonna "cedola fix" rappresenta il valore della componente a tasso fisso, F è il forward swap rate atteso sulle varie scadenze e "Val Put" il valore delle swaption. "Val Put*" è lo stesso valore ponderato per le probabilità di non esercizio delle opzioni precedenti.

¹⁹ La scadenza si ha quando inizia il contratto swap, ossia in t .

F] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "CREDIT LINKED"

Rientrano in tale tipologia le obbligazioni in cui l'indicizzazione non è riferita ai flussi di cassa (cedole e capitale a scadenza), ma al rischio di credito del titolo. Si tratta in altri termini di obbligazioni che *esplicitamente* incorporano un cosiddetto *credit risk derivative* (infatti, un rischio di credito per così dire *implicito* è presente in qualsiasi prestito obbligazionario).

Un esempio è costituito dal titolo Mediobanca "Russia a capitale garantito" 98/08. A fronte di una cedola annuale del 6,4%, il sottoscrittore vende all'emittente il diritto di sospendere i flussi cedolari qualora la Federazione russa risulti inadempiente sul suo debito estero. Qualora si verifici tale evento (come in realtà è avvenuto), la trasformazione dell'obbligazione in uno zero coupon provoca l'immediata caduta dei prezzi sul mercato, poiché il titolo garantisce solo il rimborso del capitale a scadenza. È possibile stimare il rendimento atteso a scadenza utilizzando il valore atteso delle cedole tenendo in debita considerazione la probabilità di *default* della Russia (per esempio, utilizzando le stime di Moody's relative alla probabilità di fallimento di emittenti cui è associato uno specifico *rating* su orizzonti temporali variabili). In altre parole, si tratta di "pesare" ogni cedola con la relativa probabilità di *default* della categoria dell'emittente, relativamente ad ogni profilo temporale.

Un'ottima rassegna di altri modelli di *pricing* dei *credit derivatives* è contenuta in Anolli - Gualtieri (1999). Pur non potendo per motivi di brevità passare in rassegna tutte le metodologie, ci si limita a menzionare gli approcci di probabilità lineare ("*logit*" e "*probit*"), i modelli di "*scoring*" fondati su dati contabili e finanziari del prestatore di fondi, la "*Z-score analysis*", i modelli fondati sulla teoria delle opzioni, sul tasso di mortalità degli

affidati, nonché la metodologia VAR (*CreditMetrics* e *CreditRisk*).

G] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "DUAL CURRENCY"

Non esiste una classificazione univoca per tali tipologie di titoli. La definizione che rileva in questo lavoro, tuttavia, riguarda le obbligazioni in valuta domestica a tasso fisso o variabile che prevedono alla scadenza la facoltà riconosciuta all'emittente di rimborsare il capitale in una valuta estera, qualora il tasso di cambio risultasse inferiore ad un certo *strike* fissato al momento dell'emissione.

È evidente come tali titoli presentino delle analogie con i *reverse convertible*. Infatti, anche in questo caso il sottoscrittore vende all'emittente un'opzione put avente come sottostante il tasso di cambio della valuta domestica con una estera predefinita.

Pertanto, se consideriamo un'obbligazione emessa in Euro, con tasso fisso al 4% (cedola annuale), rimborsabile alla scadenza in dollari se il cambio E/\$ è pari o superiore a 1,10, con cambio spot pari a 1,00, $r=3\%$, $r_f=4\%$, $\sigma=10\%$, si avrà che l'opzione put incorporata per 100 lire di nominale varrebbe circa 3,49 lire, che, dedotta dalla componente fissa dell'obbligazione (pari a 101,40, assumendo un Tres di mercato pari al 3,5%), produce un prezzo di tale titolo pari a L. 97,91.

I rischi cui è esposto il sottoscrittore di tali titoli risiedono ancora una volta nell'andamento sfavorevole dei tassi di interesse che influenzano sia la componente fissa che la componente in opzioni, nonché del tasso di cambio di riferimento. Infatti, un tasso di cambio superiore a E/\$ 1,10 determina un rimborso del capitale inferiore a quanto impegnato inizialmente dal sottoscrittore.

Anche in questo caso è possibile quantificare l'impatto di tali forme di rischio sul prezzo, tramite l'analisi della *duration* per quanto attiene alla parte fissa, nonché tramite le greche per quanto riguarda la componente derivativa.

Alternativamente, con *dual currency* si indicano obbligazioni le cui cedole sono pagate in una valuta diversa da quella in cui viene rimborsato il capitale (o viceversa).

Poiché nella valutazione di questa seconda accezione di siffatti titoli non rientrano le componenti derivate in senso stretto, bensì solo riferimenti a tassi di cambio *forward*, si rimanda a Dozio (1997) per una trattazione analitica.

H] LE OBBLIGAZIONI DI TIPO "COUPON RESET"

Concludiamo questa trattazione, con due categorie di titoli che non contengono una componente derivativa in senso stretto. Tuttavia, la relativa valutazione dipende dalle aspettative del sottoscrittore circa il livello dei tassi swap ad una certa data futura, generalmente assai lontana dal momento dell'emissione del titolo, ovvero circa l'andamento contingente dei mercati obbligazionari (cfr. *infra* lettera I).

Infatti, le obbligazioni "coupon reset", aventi scadenza (T) molto lunga, pari a quelle dei *rfrn*, pagano t cedole certe di importo c_i (generalmente superiori ai livelli correnti del mercato) e (T-t) cedole che dipendono dal tasso swap r_s a X anni, rilevato poco prima dello stacco della prima cedola non predeterminata. Si avrà che se $r_s > \bar{r}$ (tasso fisso predeterminato) l'obbligazione diventa uno *zero coupon* a (T-t) anni con prezzo di rimborso $P_T > 100$ per ogni 100 lire di valore nominale. Se al contrario, $r_s \leq \bar{r}$, l'obbligazione pagherà T-t cedole a tasso fisso (K_{T-t}) e avrà un prezzo di rimborso alla pari. Il livello di \bar{r} e di P_T , nonché la scelta di X (profilo temporale di \bar{r}) sono strutturate in modo tale

che il rendimento dell'obbligazione sia decisamente più favorevole per il sottoscrittore nel caso in cui $r_s < \bar{r}$.

In tal modo egli "scommette" sulla stabilità (o ribasso) dei tassi di interesse in un arco di tempo decisamente ampio, o quantomeno al momento della revisione della struttura cedolare.

Per effettuare una valutazione del titolo, possiamo scomporre l'obbligazione in una componente certa (S) data dalle prime t cedole certe e dal prezzo di rimborso comunque assicurato a 100 e da una incerta (U), costituita dalle ultime $(T-t)$ cedole e dalla differenza di rimborso rispetto alla pari. Pertanto il valore dell'obbligazione è pari a:

$$V = V(S) + V(U) \quad (33)$$

Il calcolo di $V(S)$, data la curva dei tassi swap r_i , è decisamente banale ed è pari a:

$$V(S) = \sum_{i=1}^t \frac{c_i}{(1+r_i)^i} + \frac{100}{(1+r_T)^T} \quad (34)$$

mentre $V(U)$ è data da:

$$V(U) = \begin{cases} V_A = \frac{P_T - 100}{(1+r_T)^T} & \text{se } r_s > \bar{r} \\ V_B = \sum_{i=t+1}^T \frac{K_t}{(1+r_t)^t} & \text{se } r_s \leq \bar{r} \end{cases} \quad (35)$$

Un metodo *naïf* per valutare $V(U)$ consiste nella media ponderata dei valori V_A e V_B , utilizzando come pesi la probabilità p che il tasso swap r_s sia inferiore o uguale a \bar{r} , ovvero superiore $(1-p)$ a \bar{r} . In tal modo il *pricing* dell'obbligazione è pari a:

$$V(U) = V(S) + p \cdot V_A + (1-p) \cdot V_B \quad (36)$$

Si accenna al fatto che una valutazione non *naïf* della componente aleatoria $V(U)$ può essere ottenuta dal suo valore atteso calcolato non già in base a delle probabilità soggettive, bensì secondo la misura attualizzata *forward risk neutrale*, pari a:

$$V(U) = P_t^0 E[V(r_t)] = P_t^0 \int_0^{\infty} p(r_t) \cdot V(r_t) dr_t \quad (37)$$

con P_t^0 il fattore di attualizzazione e $p(r_t)$ la densità di probabilità per il tasso *swap* al tempo t e $V(r_t) = V(U)$. Per stimare $p(r_t)$ si può utilizzare il modello di Black, basato sull'utilizzo dei tassi *forward*. In particolare, Black rileva che $f_{t,t}$ (prezzo forward al tempo t con consegna in t su un bene A) è uguale al valore a pronti di A . Inoltre, nel modello di Black si assume che i tassi *forward* seguano una distribuzione log-Normale. Perciò, le equazioni che completano la (37) sono date da:

$$\begin{cases} r_t = f_{t,t} \\ \ln(f_{t,t}) \approx N \left[\ln(f_{t,0}) - \frac{1}{2} \sigma^2 t, \sigma \sqrt{t} \right] \end{cases} \quad (38)$$

con $f_{t,0}$ il tasso *swap forward risk neutrale* calcolato al tempo 0.

Dal punto di vista del sottoscrittore il profilo di rischio rilevante è facilmente individuabile nell'elevata *duration* del titolo (in entrambe le ipotesi), che espone l'intermediario ad un notevole rischio di tasso.

I] LE OBBLIGAZIONI "CUM TRADING WARRANT"

Si tratta di obbligazioni in assoluto innovative. Si configurano come titoli a media scadenza (tre o cinque anni) che, oltre ad un rendimento minimo garantito pagato alla scadenza del contratto (generalmente inferiore alle

condizioni di mercato), offrono in pagamento il saldo di un'attività di *trading* virtuale svolta su un altro titolo (per esempio su un Btp decennale) per un limitato periodo di tempo (t) durante la vita dell'obbligazione (T). Se il saldo è negativo, nulla è dovuto dal sottoscrittore all'emittente.

La facoltà di esercitare il trading virtuale è riconosciuta da un *warrant* (con scadenza t), negoziabile separatamente, che consente di assumere una posizione speculativa virtuale non superiore in controvalore all'ammontare delle obbligazioni sottoscritte.

Il trading virtuale viene svolto dai sottoscrittori istituzionali, cui tali prestiti si rivolgono, direttamente con l'emittente che in tal modo diventa *market maker* del titolo sottostante.

Il prezzo di tale obbligazione diventa definibile solo dopo la scadenza t del *warrant*; infatti, possiamo valutare tale titolo come la somma della componente zero coupon e i risultati virtuali del trading, ossia (per 100 lire di nominale):

$$P = \frac{100(1+i)}{(1+r)^{T-t}} + \max\left[\frac{\Pi - 100 \cdot i}{(1+r)^{T-t}}; 0\right] \quad (39)$$

essendo i il rendimento minimo garantito, r il tasso *risk free* sulla scadenza $T-t$ e Π il saldo dei profitti e delle perdite realizzati alla scadenza del *warrant*.

Prima di t è possibile valutare il titolo solo ricorrendo ad ipotesi specifiche sul comportamento del sottoscrittore nell'attività di trading (per esempio, ricorrendo ad un'analisi storica della redditività della negoziazione effettuata su titoli sottostanti simili). È chiaro quindi che in questo caso la valutazione del titolo risulterebbe

estremamente soggettiva, variando da sottoscrittore a sottoscrittore.

La rischiosità del titolo risulta abbastanza contenuta. Infatti, il rischio principale incide sul livello della cedola futura pagata a scadenza: se infatti dopo t risulta che $100 \cdot i \geq \Pi$, il sottoscrittore impiega liquidità a tassi inferiori alle condizioni di mercato, determinando, in caso di rialzo dei tassi, una riduzione della componente zero coupon proporzionale alla vita residua ($T-t$) del titolo.

Del pari, vi può essere una trasformazione del rischio di credito, in quanto, se il titolo sottostante oggetto di trading è rappresentato da titoli di Stato o enti sovranazionali primari, il sottoscrittore deve accettare il rischio relativo all'emittente di titoli cum trading warrant.

Contemporaneamente, però, tale titolo consente di effettuare attività di trading su valori mobiliari a scadenza lunga, sottoscrivendo attività finanziarie che invece sono caratterizzate da scadenza medio-breve.

Quanto all'emittente, le opportunità associate a tali prestiti sembrano risiedere nella sua abilità a svolgere attività di *market maker* sul titolo sottostante.²⁰

²⁰ "In genere i market maker quotano pubblicamente i prezzi a cui sono disposti a comperare (denaro o bid) e a vendere (lettera o ask o anche offer) [...]. Subiscono gli ordini della clientela che possono soltanto condizionare con la manovra delle quotazioni. In condizioni normali, si aspettano di conseguire sulle compravendite chiuse un margine pari alla metà dello spread denaro-lettera. La necessità di rispondere sempre agli ordini in arrivo senza esporsi ad eccessivi rischi di posizione li costringe ad un atteggiamento difensivo: devono rispettare limiti massimi di posizione e di perdita realizzata (stop loss) e, di norma, chiudono la giornata con rischi pareggiati. Per lo stesso motivo sono molto sensibili al prezzo corrente: sono disposti ad acquistare ad un prezzo se prevedono di poter effettuare poco dopo una vendita a un prezzo più alto, e viceversa. Pertanto, in un mercato con *trend*, i market makers proiettano in su le quotazioni in caso di rialzo, le proiettano in giù in caso di ribasso, e possono cercare di anticipare le richieste della clientela assumendo nei confronti di altri market makers posizioni di segno contrario a quello degli ordini attesi", L. Erzegovesi, 1997, *op.cit.*

CONCLUSIONI

Le innovazioni introdotte nell'industria finanziaria internazionale negli ultimi anni hanno certamente creato nuove opportunità per gli intermediari italiani, ma contemporaneamente hanno loro aperto la strada a problematiche in parte nuove. È indubbio, infatti, che nel nostro Paese la forte spinta a tali innovazioni, per i motivi esposti in premessa, sia provenuta dalle grosse banche estere.

Rispetto ad esse, la maggior parte degli intermediari italiani si è trovata talvolta ad operare su segmenti di mercato senza avere sviluppato un pari *know how*, spesso nelle vesti di semplici collocatori presso altre banche o presso gli investitori *retail*.

In tale contesto, si è cercato in questo lavoro di illustrare brevemente le problematiche sottese a queste innovazioni, nonché di fornire delle procedure di valutazione per le principali "obbligazioni strutturate" presenti sui mercati italiani.

Soprattutto, dalla prospettiva che è più rilevante per l'autore, si è tentato di scomporre i profili di rischio cui gli intermediari sono esposti dalle innovazioni in parola.

La possibilità di pervenire ad una piena consapevolezza del rischio in ogni forma in cui esso si presenta (o, in questi casi, si cela) e la capacità di fondare analisi appropriate prima che esso venga assunto sono per l'intermediario condizioni imprescindibili per una gestione sana e prudente.

APPENDICE A**Le segnalazioni statistiche di Vigilanza alla Banca
d'Italia sui titoli "strutturati": due esempi**

In questa sezione si intendono fornire degli esempi sulle modalità con le quali le banche o le imprese finanziarie sottoscrittrici di titoli strutturati sono tenute a rassegnare alla Banca d'Italia le periodiche segnalazioni statistiche di Vigilanza.

A prescindere dalle singole e limitate casistiche di seguito riportate, si evidenzia come per tali titoli la matrice dei conti preveda espressamente l'obbligo di rilevazione come combinazione dei contratti di base da cui sono composti (cfr. "Manuale per la compilazione della matrice dei conti", Avvertenze Generali, pagg. 75-78).

al Acquisto di un titolo reverse floater.

In riferimento alla scomposizione di tali obbligazioni illustrata al punto A) del testo, i valori nozionali dell'IRS e dell'opzione cap nella matrice dei conti devono essere rilevati, rispettivamente, nelle sottovoci 3039.56 "contratti derivati - operazioni senza scambio di capitale - IRS:acquisti" e 3039.76 "contratti derivati - operazioni senza scambio di capitale - opzioni acquistate dalla banca segnalante: vendite".

Relativamente alla classificazione per vita residua dell'IRS e dell'opzione cap - ipotizzando che la segnalazione sia riferita al 31.12 dell'anno t+1, che la data di decorrenza di entrambi gli strumenti sia il 31.12 dell'anno t+2, che la durata contrattuale sia 10 anni e che la data di regolamento (coincidente con quella di revisione del tasso di

interesse indicizzato) sia il 31.12 di ogni anno - occorre seguire la seguente impostazione segnaletica:

- con riferimento all'IRS, la banca deve rilevare nella sottosezione III.6 della matrice dei conti una posizione lunga nello scaglione "da oltre 10 anni a 15 anni" (corrispondente ad una vita residua di 11 anni) e una posizione corta nello scaglione "da oltre 6 mesi a 1 anno", mentre ai fini del calcolo del requisito patrimoniale per il rischio generico del portafoglio non immobilizzato²¹ una posizione lunga nello scaglione "da oltre 10,6 anni a 12 anni" e una posizione corta nello scaglione "da oltre 6 mesi a 12 mesi";

- con riferimento all'opzione cap, si rileva innanzitutto che essa è assimilabile a una serie di opzioni su FRA (*caplets*), di numero pari alle relative scadenze, in cui la banca cede il tasso fisso e riceve il valore corrente del tasso di riferimento²². Pertanto, limitatamente al primo FRA la banca deve segnalare, in base al "delta value", nella sottosezione III.6 della matrice dei conti una posizione lunga nello scaglione "da oltre 6 mesi a 1 anno" e una posizione corta nello scaglione "da oltre 18 mesi a 2 anni", mentre ai fini del calcolo del requisito patrimoniale per il rischio generico, sempre in base al "delta value", una posizione lunga nello scaglione "da oltre 6 mesi a 12 mesi" e una posizione corta nello scaglione "da oltre 1 anno a 2 anni"; analoghe modalità di rilevazione vanno applicate ai rimanenti FRA's.

Inoltre, i differenziali negativi relativi all'IRS vanno segnalati in conto economico nella sottovoce 4021.22 "oneri

²¹ Quest'ultima indicazione va osservata dalla banca, sempreché la stessa sia tenuta al calcolo dei rischi del portafoglio non immobilizzato (cfr. il fascicolo "Istruzioni per la compilazione delle segnalazioni sul patrimonio di vigilanza e sui coefficienti prudenziali", pag. 7.1.5.).

²² Cfr. il fascicolo "Istruzioni per la compilazione delle segnalazioni sul patrimonio di vigilanza e sui coefficienti prudenziali", pag. 7.3.8., nota 1.

di contratti derivati - altri oneri: tassi di interesse". Gli eventuali differenziali positivi relativi all'opzione cap vanno ricondotti nella sottovoce 4145.52 "proventi di contratti derivati - altri proventi: tassi di interesse".

b) Emissione bancaria di un titolo reverse convertible.

-In assenza di una specifica voce di evidenza nel passivo dei "dati patrimoniali" della matrice dei conti, i rc dalle banche devono essere allocati convenzionalmente nella sottovoce 1715.10 "altri fondi raccolta da clientela ordinaria - altre operazioni" ovvero nella voce 1831 "altre sovvenzioni passive non regolate in c/c da istituzioni creditizie", a seconda della natura del sottoscrittore.

-Gli interessi passivi vanno ricondotti in conto economico nelle sottovoci, rispettivamente, 4001.18 "interessi passivi e oneri assimilati su rapporti intrattenuti con clientela ordinaria altre forme di provvista" e 4007.18 "interessi passivi e oneri assimilati su rapporti intrattenuti con istituzioni creditizie - altri rapporti passivi".

a) Il premio incassato relativo all'opzione, non essendo formalmente definito nel contratto, può non essere esplicitato e segnalato;

b) Nel caso in cui, invece, la banca emittente i titoli negozi un'opzione di copertura, il premio figurativo può convenzionalmente essere assunto pari a quello relativo all'opzione di copertura. Esso va ricondotto nell'attivo dei "dati patrimoniali" nella sottovoce 1227.50 "premi pagati per opzioni" accreditando in contropartita gli interessi passivi (sottovoci di conto economico 4001.18 e 4007.18, a seconda

della natura dei sottoscrittori dei titoli); questi saranno poi riscontati, utilizzando la sottovoce 1965.18 "ratei e risconti passivi - risconti passivi: altre partite", per la quota non maturata nel periodo di riferimento della segnalazione;

c) il rischio di controparte gravante sull'opzione, da calcolarsi in base al metodo del valore corrente, va indicato negli "impegni e rischi", voce 1599 "contratti derivati";

d) Il valore nozionale dell'opzione deve essere rilevato nella sottovoce 3039.18 "contratti derivati - operazioni con scambio di capitale - opzioni acquistate dalla banca segnalante - vendite".

Nel calcolo di coefficienti prudenziali l'esposizione creditizia per il rischio di controparte relativa all'opzione implicita nei titoli emessi va convenzionalmente assimilata ad un'attività di rischio garantita da depositi di contanti presso la banca segnalante e conseguentemente sottoposta a fattore di ponderazione 0%.

Riguardo al bilancio, occorre applicare modalità di rilevazione analoghe a quelle sin qui indicate. In particolare, si precisa che:

1) i titoli emessi vanno ricondotti nella sottovoce 30.c "debiti rappresentati da titoli - altri titoli" del passivo dello stato patrimoniale;

2) i valori nozionali dell'opzione implicita nei titoli e di quella di copertura devono formare oggetto di rilevazione nella tabella 10.5 "Operazioni a termine" della parte B, sezione 10 della nota integrativa, rispettivamente, tra i "contratti derivati con scambio di capitali - titoli -

vendite", colonna "altre operazioni" e i "contratti derivati con scambio di capitali -titoli - acquisti", colonna "di copertura".

APPENDICE B

1. Il modello di Black

Il modello è stato derivato da Black nel 1976 sulla base del modello in precedenza elaborato con Scholes. Tale modello, originariamente studiato per determinare il prezzo di contratti di opzione su *commodities*, è stato successivamente trasferito anche all'ambito delle opzioni su contratti *futures* avente per oggetto tassi di interesse. In estrema sintesi, formulando alcune ipotesi di base²³, Black perviene alla seguente equazione per il calcolo del valore teorico del call di equilibrio (liquidato a scadenza)

$$C_T = S_{T,0} \cdot N(d_1) - E \cdot N(d_2) \quad (A)$$

Essendo:

C_T il valore di equilibrio del call;

$S_{T,0}$ il prezzo a termine del titolo sottostante alla data iniziale (nel nostro caso tale prezzo sarà approssimato in base al tasso *forward* implicito nella struttura dei tassi spot ed E lo strike price;

$T-t$ il tempo residuo del call in frazioni di anno

²³ Precisamente si assume che:

- il mercato è perfetto, senza costi di transazione, tasse ed altri vincoli;
- gli investitori si comportano razionalmente;
- i titoli sottostanti l'opzione possono essere acquistati e venduti liberamente in qualsiasi quantità;
- l'attività di *trading* è continua;
- il tasso di interesse *risk free* r è costante;
- i prezzi si evolvono casualmente secondo il seguente processo:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma \varepsilon \sqrt{dt}, \text{ con } \varepsilon \sim N(0,1) \text{ e } \sigma \text{ volatilità del titolo.}$$

$N(d_1)$ e $N(d_2)$ valori della funzione di densità cumulativa²⁴ di una variabile casuale normale standardizzata calcolata in d_1 e d_2 tali che:

$$d_1 = \frac{\ln\left[\frac{S_T}{E}\right] + \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}; \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)} \quad (B)$$

dove σ è la volatilità del titolo, che si suppone costante per tutta la durata dell'opzione.

Si può affermare che σ è la variabile problematica nella determinazione di C_T . Infatti, le diverse modalità di stima della stessa (su base storica o implicita) aprono all'analista degli spazi discrezionali di valutazione. Operativamente, per valutare σ su base storica, è possibile utilizzare le serie storiche dei prezzi giornalieri che vanno da uno a sei mesi. Su questa serie si applica il logaritmo naturale ad ogni valore, si misurano le differenze giornaliere tra i logaritmi dei prezzi, si calcola la media di tali differenze, successivamente la varianza giornaliera ed infine la deviazione standard (s), rapportandola su base annuale ($\sigma = s * \sqrt{gg \text{ lavorativi annui}}$).

Più semplicemente, inoltre, è possibile utilizzare σ implicita quotata dai vari contributori in *Reuters*, *Bloomberg*, ovvero in altre fonti finanziarie specialistiche a disposizione degli intermediari. Come già evidenziato nel testo, tuttavia, in questo caso si pone il problema della significatività di una volatilità ricavata da strumenti "liquidi" per stimare il *pricing* di contratti che invece non sono negoziabili.

Analogamente il valore di equilibrio del put secondo la formula di Black risulta essere:

²⁴ Essa è definita come la probabilità con la quale la variabile casuale X considerata assume valori inferiori a x : $N(x) = \text{Prob}\{X \leq x\}$. Se la distribuzione è una variabile casuale standardizzata vale $N(x) = 1 - N(-x)$.

$$P_T = E \cdot N(-d_2) - S_{T,0} \cdot N(-d_1). \quad (C)$$

Terminiamo infine questa breve illustrazione del modello di Black fornendo la duration di un'opzione call (cap) sui tassi di interesse di valore pari a C. Essa risulta pari a:

$$\text{Duration}_c = + \frac{\partial C}{\partial i} \cdot \frac{(1+i)}{C} = \text{Delta} \cdot \frac{(1+i)}{C} \quad (D)$$

Per Delta, cfr. *infra*, punto 2.

2. Il modello di Black e Scholes

Per la stima del valore di opzioni call/put su azioni o indici azionari che pagano un *dividend yield* pari a q% annuo, si può fare riferimento a tale modello, di cui quello di Black in precedenza presentato risulta essere un'applicazione particolare. In base a tale modello si ha che il valore del call con premio liquidato a pronti, *strike price* pari a E, con prezzo a pronti del titolo pari a S, scadenza pari a T e valutato in t, è dato da

$$C_T = S e^{-q(T-t)} N(d_1) - E e^{-r(T-t)} N(d_2) \quad (E)$$

essendo

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{X}\right) + (r - q + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \quad (F)$$

dove r rappresenta il tasso di interesse a breve in regime di capitalizzazione continua²⁵.

In caso di opzioni su valute, si dimostra che il premio di equilibrio si ottiene sostituendo a q della (F) il tasso *risk free* della valuta estera di riferimento.

²⁵ Se R è il tasso annuale con frequenza di capitalizzazione pari a m, r è pari a $r = m \cdot \ln(1 + R/m)$. Si può immaginare r come il tasso cui corrisponde una capitalizzazione continua, approssimabile come una capitalizzazione

Analogamente il prezzo di una put liquidato a pronti è dato da:

$$P_T = E \cdot e^{-r(T-t)} \cdot N(-d_2) - S \cdot e^{-q(T-t)} \cdot N(-d_1) \quad (G)$$

Applicando il calcolo differenziale alla (E) e alla (G), si ottiene la sensibilità del valore dell'opzione alle variabili da cui dipende. In modo particolare, se C è il valore dell'opzione (call o put) e S il prezzo del sottostante, si ha:

$$\text{Delta} = \frac{\partial C}{\partial S}; \quad \Theta = \frac{\partial C}{\partial t}; \quad \Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S}; \quad \Lambda = \frac{\partial C}{\partial \sigma}; \quad \text{Rho} = \frac{\partial C}{\partial r};$$

In particolare, per un'opzione call di tipo europeo su un'azione che paga un *dividend yield* pari a q , Delta è pari a

Delta = $e^{-q(T-t)} N(d_1)$, mentre per una put Delta = $e^{-q(T-t)} [N(d_1) - 1]$, mentre Rho è dato da:

Rho = $X(T-t) e^{-r(T-t)} N(d_2)$ e rispettivamente per una put:

$$\text{Rho} = -X(T-t) e^{-r(T-t)} N(-d_2).$$

Attraverso gli indicatori sopra trattati, è possibile scrivere la seguente relazione, basata sulla formula di Taylor sviluppata al primo ordine per tutti i fattori tranne che per il prezzo di cui si considera la derivata seconda:²⁶

$$\Delta C \approx \text{Delta} \cdot \Delta S + \Gamma \cdot \frac{\Delta S^2}{2} + \Lambda \cdot \Delta \sigma + \Theta \cdot \Delta t + \text{Rho} \cdot \Delta r \quad (H)$$

3. Il metodo Monte Carlo per le opzioni asiatiche

Se ϑ è la variabile di riferimento, σ la sua volatilità ed m il suo tasso di crescita, si tratta di dividere T , durata

giornaliera degli interessi. Se $R=10\%$, capitalizzato semestralmente ($m=2$), il corrispondente tasso r è pari al $9,75\%$.

²⁶ Cfr. Erzegovesi (1997), *Ingegneria Finanziaria*, manoscritto dell'Università degli Studi di Trento.

dell'opzione, in N intervalli di ampiezza Δt (tipicamente uno o cinque giorni). Assumendo che ϑ segua un processo di Wiener generalizzato discreto si avrà:

$$\frac{\Delta \vartheta}{\vartheta} = m\Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad , \quad \text{con } \varepsilon \sim N(0,1) \quad (I)$$

Dall'equazione (I) si ricava come $\Delta \vartheta / \vartheta$ è distribuito normalmente con media $m\Delta t$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{\Delta t}$, ossia

$$\Delta \vartheta / \vartheta \sim \varphi(m\Delta t, \sigma\sqrt{\Delta t}) \quad (L)$$

con $\varphi(m,s)$ indicante una normale con media m e deviazione standard σ .

Se consideriamo come indice di riferimento il Mib30, per cui m si assume pari al *dividend yield* del 2% anuo, $\sigma=0,22$, $\Delta t=1/250=0,004$, ne consegue che:

$$\Delta \vartheta / \vartheta \sim \varphi(8 \cdot 10^{-5}, 0,0139) \quad (M)$$

Una traiettoria dell'indice può essere simulata estraendo ripetutamente dei valori campionari da $\varphi(8 \cdot 10^{-5}, 0,0139)$. Una tecnica adottata (cfr. Hull) consiste nell'estrarre inizialmente v_1 da una $\varphi(0,1)$ e successivamente convertire tali valori nei valori v_2 , relativi alla (M), mediante la seguente interpolazione:

$$v_2 = 8 \cdot 10^{-5} + 0,0139 \cdot v_1 \quad (N)$$

Assumendo che il valore iniziale dell'indice sia pari a 30.000 ($\vartheta_0 = 30.000$), il grafico successivo riporta una simulazione dell'andamento dello stesso in $T-t = 3$ anni.

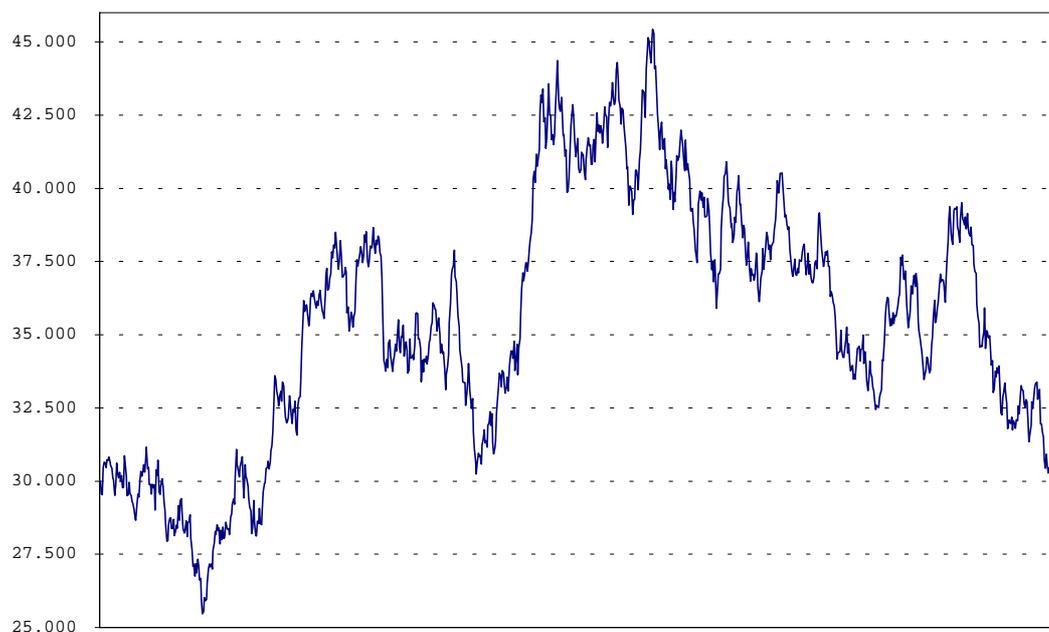


Grafico 1.

Dopo la simulazione di n traiettorie (con n almeno pari a 2.000), ottenute mediante una *routine* in un qualche programma di calcolo, si procede come indicato nella formula (10) del testo.

4. La valutazione di un'opzione *put reverse barrier knock in* di tipo *down and in*.

Si è descritto brevemente nel punto C] del testo che cosa si intenda per opzioni *reverse barrier knock-in* di tipo *down and in*. In questo punto, considerata la diffusione di tali opzioni nelle strutture *reverse convertible*, si vuole soltanto fornire la formula analitica per la valutazione del premio di tali opzioni, rimandando per un approfondimento alla bibliografia già richiamata.

La valutazione delle opzioni a barriera richiede l'utilizzo di una particolare funzione di densità messa a punto in Cox e Miller (1965). Tale funzione di densità consiste in una distribuzione dei prezzi a scadenza condizionata al mancato

raggiungimento della barriera durante tutto l'arco della vita residua dell'opzione.

Tralasciando ogni riferimento analitico, si fornisce di seguito la formula per il calcolo del premio P dell'opzione in parola:

$$\begin{aligned}
 P = & -SN \left(-\frac{\ln(S/H)+rt+\sigma^2t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-rt}KN \left(-\frac{\ln(S/H)+rt-\sigma^2t/2}{\sigma\sqrt{t}} \right) + \\
 & + \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln(H/S)+at+\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-rt}KN \left(\frac{\ln(H/S)+at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right] + \quad (0) \\
 & - \left(\frac{H}{S} \right)^{\frac{2a}{\sigma^2}} \left[-\left(\frac{H^2}{S} \right) N \left(\frac{\ln(H^2/SK)+at+\sigma^2t}{\sigma\sqrt{t}} \right) + e^{-rt}KN \left(\frac{\ln(H^2/SK)+at}{\sigma\sqrt{t}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

essendo S il prezzo *spot* del sottostante, K lo strike dell'opzione, H il livello della barriera, σ la volatilità del sottostante, t la vita residua dell'opzione, r è il tasso *risk free*, mentre d è il tasso pagato sul sottostante (*dividend yield*), mentre a è il *drift* logaritmico $a=r-d-\sigma^2/2$.

BIBLIOGRAFIA

Anolli M., Gualtieri P. (1999), *La misurazione del rischio di credito nella gestione delle banche*, Società Editrice Il Mulino, Bologna.

Banca d'Italia (1997), *I prodotti derivati*, dispensa per la formazione del personale tratta dai contenuti dei corsi degli anni 1996-97, Materiale informativo.

Banca d'Italia, *Istruzioni di Vigilanza per le banche*, pubblicate in www.bancaditalia.it

Banca d'Italia, *Manuale per la compilazione della matrice dei conti*, Avvertenze Generali.

Banca d'Italia, *Provvedimento del 30.7.99*, "Raccolta in titoli delle banche. Trasparenza".

Black F., Scholes M. (1973), *The pricing of Options and Corporate Liabilities* in *Journal of Political Economy*.

Bonollo M., Mattuzzi E. (1999), *Le obbligazioni strutturate: tecniche di gestione e di pricing*, Bancaria n.5/99.

Consob, *Comunicazione n.98097747 del 24.12.98*, "Scambi organizzati di strumenti finanziari".

Cox D.R., Miller H.D. (1965), *The Theory of Stochastic Processes*, Chapman & Hall.

Dozio R. (1997), *Dual currency bond*, *Capital Market Notes*, n.11-97, Banca Commerciale Italiana.

Dozio R. (1998), *Titoli obbligazionari con swaption*, *Capital Market Notes*, n.5-98, Banca Commerciale Italiana.

Erzegovesi L. (1997), *Ingegneria Finanziaria*, Alea-Centro di ricerca sui rischi finanziari, Università degli Studi di Trento.

Esposito M. (1997), *Valutazione di opzioni su medie aritmetiche discrete: una soluzione in forma (quasi) chiusa*, *Capital Market Notes*, n.5/97, Banca Commerciale Italiana.

Esposito M., Dozio R. (1998), *Reverse floater*, Ufficio Studi e Analisi Finanziaria della Banca Commerciale Italiana, R98-4.

Hull J. (1992), *Options, Futures and other Derivatives Securities*, Prentice Hall.

Laruccia E. (1998), *I reverse convertible bond*, *Capital Market Notes*, n.8/98, Banca Commerciale Italiana.

Longo M., Siciliano G. (1999), *La quotazione e l'offerta al pubblico di obbligazioni strutturate*, *Quaderni di Finanza* n°35, Agosto 99, Consob.

Sguera F. (1999), *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, *Alea - Centro di ricerca sui rischi finanziari*, *Tech Report N.1*, Università degli Studi di Trento.

Siniscalco P. (1999), *Un "quanto-basket" reverse floater: il titolo Crediop*, *Capital Market Notes*, n.15/99, Banca Commerciale Italiana.

Siniscalco P. (1999), *Titoli obbligazionari "coupon reset": due esempi*, *Capital Market Notes*, n.1/1, Banca Commerciale Italiana.

Tasca R. (1991), *Le opzioni sui titoli obbligazionari e sui tassi di interesse*, in P.L. Fabrizi, *La gestione integrata dell'attivo e del passivo nelle aziende di credito*, Giuffrè, Milano.

Turnbull S.M., Wakeman L.M. (1991), *A Quick Algorithm for Pricing European Average Options*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 26,3, p. 377-389.

Wilmott P., Howison S., Dewynne J. (1999), *The Mathematics of Financial Derivatives*, Cambridge University Press.

Collana ALEA Tech Reports

- Nr.1 F. Sguera, *Valutazione e copertura delle opzioni binarie e a barriera*, Marzo 1999.
- Nr.2 A. Beber, *Introduzione all'analisi tecnica*, Marzo 1999.
- Nr.3 A. Beber, *Il dibattito su dignità ed efficacia dell'analisi tecnica nell'economia finanziaria*, Marzo 1999.
- Nr. 4 L. Erzegovesi, *Capire la volatilità con il modello binomiale*, Luglio 1999.
- Nr. 5 G. Degasperi, *La dinamica delle crisi finanziarie: i modelli di Minsky e Kindleberger*, Agosto 1999
- Nr. 6 L. Erzegovesi, *Rischio e incertezza in finanza: classificazione e logiche di gestione*, Settembre 1999
- Nr. 7 G. Degasperi, L. Erzegovesi, *I mercati finanziari come sistemi complessi: il modello di Vaga*, Settembre 1999.
- Nr.8 A.Beber e L.Erzegovesi, *Distribuzioni di probabilità implicite nei prezzi delle opzioni*, dicembre 1999.
- Nr.9 M.Filagrana, *Le obbligazioni strutturate nel mercato italiano: principali tipologie e problematiche di valutazione e di rischio*, marzo 2000.

I Tech Reports possono essere scaricati gratuitamente dal sito di ALEA:
<http://www.cs.unitn.it/grupE>. Dalla Home Page seguire il collegamento [ALEA Tech Reports](#).