Umberto Fedrizzi

Hegel, Marx e il calcolo infinitesimale

STUDI E RICERCHE
29

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRENTO
Dipartimento di Lettere e Filosofia

Negli ultimi anni, le ricerche dedicate al rapporto tra Hegel e Marx da una parte e la matematica dall'altra si sono moltiplicate a vista d'occhio, contribuendo a raggiungere su questo tema una posizione decisamente più equilibrata rispetto al passato. Tuttavia, tali studi rimangono ancora oggi piuttosto limitati e sono molti gli aspetti che avrebbero bisogno di ulteriori approfondimenti. Mentre, ad esempio, quasi tutte le indagini compiute in passato hanno messo in luce il particolare interesse che Hegel e Marx nutrirono nei confronti del calcolo infinitesimale e del problema della sua fondazione, entrando nei dettagli delle posizioni sostenute dai due filosofi a questo proposito, ancora oggi il rapporto tra il pensiero hegeliano e quello marxiano sul calcolo rimane sostanzialmente inesplorato. Il presente volume nasce con l'intento di colmare, almeno in parte, questa lacuna, facendo emergere somiglianze e differenze tra le riflessioni dei due autori e rivelando in modo particolare il profondo debito che, in questo campo, Marx nutre nei confronti di Hegel.

Umberto Fedrizzi è attualmente professore di storia e filosofia nelle scuole secondarie del Trentino. Nel corso dei suoi studi ha partecipato al programma di doppia laurea tra l'Università degli Studi di Trento e la Technische Universität Dresden, laureandosi nel 2020 con una tesi dedicata alle riflessioni di Hegel e Marx sul calcolo infinitesimale, di cui questo volume rappresenta una rielaborazione.

Studi e Ricerche

29

UNIVERSITÀ
DI TRENTO
Dipartimento di
Lettere e Filosofia

Collana Studi e Ricerche n. 29
Direttore: Andrea Giorgi
Redazione: Krzysztof Pawlikowski - Ufficio Editoria Scientifica di Ateneo

Dipartimento di Lettere e Filosofia
via Tommaso Gar, 14 - 38122 Trento
tel. 0461 281722
http://www.lettere.unitn.it/221/collana-studi-e-ricerche
e-mail: editoria.lett@unitn.it

ISBN 978-88-8443-999-4

Edizione digitale: dicembre 2022

Umberto Fedrizzi

Hegel, Marx e il calcolo infinitesimale

Prefazione di Paola Giacomoni

Università degli Studi di Trento
Dipartimento di Lettere e Filosofia

Il presente volume è stato sottoposto a procedimento di *peer review*.

Alla mia famiglia

Sommario

Prefazione

Il volume di Umberto Fedrizzi su Hegel, Marx e il calcolo infinitesimale è una novità rilevante nell'ambito degli studi sui due grandi filosofi tedeschi, tradizionalmente considerati lontani o anche completamente estranei alle più avanzate ricerche matematiche. Le affermazioni di Hegel nella *Fenomenologia dello spirito* sulla matematica sono a lungo apparse come una critica radicale e anche liquidatoria, una presa di distanza definitiva nei confronti della matematica e hanno pesato su un'antica vulgata riguardo a una supposta estraneità di Hegel rispetto alla scienza in generale. L'interesse di Hegel per il calcolo infinitesimale e per le sue applicazioni è stato quasi sempre trascurato dagli storici della matematica e dai filosofi della scienza, o addirittura messo in dubbio, o criticato, in particolare da Karl Popper e Bertrand Russell. L'interesse di Marx per l'economia politica d'altro canto sembrava spiegare il suo apparentemente marginale interesse per la matematica, il suo supposto analfabetismo in quel campo.

Questa immagine a lungo prevalente tuttavia non spiega l'ampio spazio destinato al calcolo nella *Scienza della logica* del 1812, in cui Hegel dedica una lunga nota al concetto dell'infinito matematico nella *Dottrina dell'essere*, e addirittura tre analisi dettagliate nella seconda edizione, del 1832. Il lavoro di Fedrizzi analizza a fondo i testi e arriva a conclusioni originali, che forniscono una luce nuova sull'interesse e la competenza di Hegel nel campo, e sulla rilevanza degli studi di Marx sul tema. Il volume argomenta tenendo presenti i testi matematici cui facevano riferimento i due filosofi, e le problematiche della formazione del calcolo infinitesimale nell'era moderna. Illustra inoltre il rapporto in cui si trova la proposta di Marx rispetto a quella di Hegel, mostrandone sia il collegamento, sia la discontinuità, cosa molto poco sottolineata anche dagli studi internazionali più recenti.

A differenza di precedenti interpretazioni che vedevano l'interesse di Marx per il calcolo determinato esclusivamente dalle sue ricerche di economia politica, il lavoro di Fedrizzi mostra che l'attenzione al tema al contrario non era strumentale, ma nasceva da un vero, e col tempo crescente, interesse teoretico che lo sollecitava a una riflessione specifica sui metodi dell'analisi matematica dell'era moderna. Mentre l'interesse di Hegel per il calcolo era di tipo prevalentemente filosofico, quello di Marx aveva anche carattere scientifico, specifico, come è risultato chiaro dalla pubblicazione dei *Manoscritti matematici*: il suo intento originario era quello di migliorare il calcolo, fornendo a esso una fondazione rigorosa, cosa che tuttavia, per i limiti della sua preparazione specifica, non gli riuscirà.

Il testo di Fedrizzi inserisce l'interesse di Hegel e di Marx per il calcolo infinitesimale in un'ampia cornice in cui si dà conto anche degli sviluppi successivi. Molto opportunamente si precisa che la conoscenza del calcolo da parte di Hegel si ferma ai lavori di Joseph-Louis Lagrange e di Sylvestre-François Lacroix, senza arrivare alla fondazione del calcolo col concetto di limite elaborata da Augustin-Louis Cauchy, punto di partenza per l'analisi classica dell'Ottocento. Marx si attesta sostanzialmente sullo stesso periodo della ricerca matematica anche se vive nel secondo Ottocento e quindi avrebbe potuto potenzialmente conoscere le teorie di Cauchy: in realtà Hegel rappresenta il punto di partenza per la sua speculazione in questo campo e al suo ambito storico egli si attiene. Marx, trasferitosi in Inghilterra, era infatti privo di rapporti con l'ambiente matematico inglese, e per questo motivo era costretto a ricorrere, per i suoi studi sul calcolo, a manuali divulgativi in cui le idee di Cauchy faticavano ancora a trovare spazio. Per questo il suo autentico interesse teoretico per il tema, che lo distingue da Hegel, non arriva ai risultati che lui auspicava, dato che le soluzioni scientifiche già disponibili gli rimangono precluse.

La ricerca di Fedrizzi va molto a fondo nell'analisi dei testi dei due filosofi e arriva a una conclusione generale decisamente innovativa, che mette in luce la loro importanza sia dal punto di vista filosofico sia da quello matematico. L'interesse per la matematica dell'infinito ha infatti implicazioni filosofiche molto significative per i due autori: entrambi vedono operante nel calcolo infinitesimale il metodo dialettico. Hegel sostiene, con argomentazioni pertinenti, il nesso tra il metodo dialettico e i concetti di 'differenziale', di derivazione leibniziana, e di 'evanescente', di derivazione newtoniana. Marx, entrando a fondo nelle questioni specifiche, mostra come il calcolo stesso esiga una logica diversa da quella tradizionale, e richieda, per la sua stessa articolazione interna, una dimensione dialettica. Non si tratta dunque, da parte di Marx, della ricerca di una legittimazione matematica – cioè scientifica al massimo livello – della dialettica, ma al contrario del riconoscimento delle novità logiche interne allo stesso procedimento matematico. Per questo, anche per gli studiosi di filosofia della matematica questa ricerca può essere interessante, sostiene Fedrizzi, perché consente «di riflettere sui rapporti tra matematica e filosofia, mostrando la possibilità di un dialogo proficuo tra questi due mondi apparentemente così distanti», ma in realtà da Platone in poi sempre legati. Anche la matematica infatti, a differenza di quanto si pensa comunemente, può essere un terreno di 'conferma' delle teorie filosofiche, e non solo viceversa: in altre parole, i rapporti tra matematica e filosofia non sono unilaterali, ma possono essere bilaterali, di conferma o sconferma reciproche.

Il lavoro, che rielabora e amplia una tesi di doppia laurea magistrale tra l'Università di Trento e la Technische Universität di Dresda, raggiunge dunque risultati estremamente innovativi, è ottimamente documentato sui testi originali e sulla letteratura secondaria internazionale disponibile, ponderato nelle valutazioni presentate, e fornisce un contributo rilevante su una tematica ancora poco frequentata dalla critica, e superficialmente considerata marginale rispetto alla riflessione dei due autori.

Paola Giacomoni

Prefazione dell'autore

Non voglio qui dilungarmi troppo sul contenuto del testo, a cui tra l'altro ha già ampiamente accennato la Professoressa Giacomoni nella sua Prefazione e su cui ritornerò a breve nell'Introduzione, quanto piuttosto presentarne velocemente linee guida e articolazione.

In primis, è bene precisare che ho cercato, per quanto possibile, di focalizzare la mia attenzione esclusivamente sul tema in questione, ovvero il rapporto tra le riflessioni di Marx e quelle di Hegel sul calcolo, senza cadere nella tentazione di ampliare il discorso a un confronto più generale tra il pensiero dei due autori, che esula dagli obiettivi di questo lavoro.

In secondo luogo, l'approccio che ho deciso di adottare all'interno del testo è stato, conformemente al mio percorso di formazione, prevalentemente di taglio storico-filosofico, anche se non mancheranno – e non avrebbe ovviamente potuto essere altrimenti, visto l'argomento trattato – delle parti matematiche. Il ricorso al linguaggio formale della matematica non è naturalmente fine a se stesso, ma funzionale allo sviluppo del discorso ed è stato impiegato laddove ciò è stato ritenuto necessario per agevolare la comprensione del pensiero dei due autori e del loro confronto, tenendo presente che – come afferma Stephen Hawking nella prefazione del suo capolavoro *Dal Big Bang ai buchi neri: breve storia del tempo* – ogni formula in un libro dimezza il numero di potenziali lettori.[1]

Infine, è importante sottolineare che, al di là di quanto si potrebbe pensare di primo acchito, la questione del rapporto tra il

[1] Cfr. Hawking 1998, 5: «Qualcuno mi disse che ogni equazione che avessi incluso nel libro avrebbe dimezzato le vendite. Decisi perciò che non avrei usato alcuna equazione. Alla fine, però, ho fatto un'eccezione per la famosa equazione di Einstein $E=mc^2$. Spero che essa non spaventerà metà dei miei potenziali lettori».

pensiero di Marx e quello di Hegel sul calcolo differenziale, nonostante la sua specificità, presenta molteplici motivi di interesse, che qui presento brevemente:

1. In primo luogo può essere interessante per gli studiosi del pensiero di Hegel e del pensiero di Marx, perché permette di mettere in luce un lato della loro personalità filosofico-intellettuale (quello matematico-scientifico) spesso sconosciuto o comunque ancora poco considerato all'interno dell'immensa letteratura secondaria dedicata a questi autori, ma capace di fornire nuove chiavi di lettura (a proposito del metodo dialettico ad esempio, ma non solo) spendibili anche in altri ambiti di ricerca sul pensiero di Marx e di Hegel. Particolarmente interessante in questo senso sarà, ad esempio, cercare di capire come si declina all'interno di un campo specifico come quello della riflessione filosofica sulla matematica il rapporto tra i due, che troppe volte è stato ricondotto semplicisticamente (e con non poche forzature) allo schema interpretativo suggerito dalle celeberrime parole di Marx nel *Poscritto* alla seconda edizione del *Capitale*:

> La mistificazione alla quale soggiace la dialettica nelle mani di Hegel non toglie in nessun modo che egli sia stato il primo ad esporre ampiamente e consapevolmente le forme generali del movimento della dialettica stessa. In lui essa è capovolta. Bisogna rovesciarla per scoprire il nocciolo razionale entro il guscio mistico. (*MEW* 23, 27 [45])

Da questo punto di vista, infatti, i *Manoscritti matematici* – come suggerisce Alcouffe –[2] sembrano aprire una nuova prospettiva all'interno del dibattito sul rapporto tra Marx e Hegel, dimostrando, al contrario di quanto sostenuto per molto tempo da parecchi studiosi (anche e soprattutto appartenenti alla tradizione marxista), l'inesistenza di una rottura definitiva tra il pensiero dei

[2] Alcouffe 1985, 95: «L'image de la dialectique hegelienne qu'il suffirait de remettre sur ses pieds a été prise dans un sens trop littéral, elle ne rend pas compte de la complexité du rapport Hegel/Marx». Su questo punto cfr. sempre Alcouffe 1985, 61.

due filosofi. Significativo a questo proposito il fatto che anche Smith, pur appartenendo manifestamente a questa tradizione e pur insistendo nel sottolineare la distanza che separa il materialismo marxiano dall'idealismo hegeliano, riconosca, proprio a partire dall'analisi dei *Manoscritti matematici*, l'esistenza in Marx (e anche in Engels) di un continuo, incessante riferimento a Hegel:

> Se consideriamo questo lavoro nel suo insieme, ci colpisce un'altra caratteristica comune: il modo in cui Marx ed Engels ritornano a Hegel per avere dei chiarimenti. Il marxismo è la negazione dell'idealismo assoluto – ma nel senso hegeliano di simultanea abolizione e conservazione. Contrariamente a quanto sostengono le varie scuole revisioniste, Marx non ruppe mai con Hegel una volta per tutte, ma ritornò continuamente a Hegel per negare il suo idealismo, come fecero Lenin e Trotsky dopo di lui. [trad. it. mia][3]

2. Può essere interessante per gli studiosi di storia della matematica. Le riflessioni di Hegel e di Marx sul calcolo sono infatti una critica dello stato effettivo della matematica della loro epoca (quanto meno fino a Lagrange), condotta con rigore, accuratezza di giudizio e competenza, tenendo conto non solo delle opere più importanti dei matematici presi di volta in volta in considerazione, ma anche della ricezione critica che tali opere avevano avuto nell'ambiente scientifico e filosofico del tempo.

Naturalmente, per poter apprezzare il contributo di Hegel e di Marx in questo campo, è di fondamentale importanza[4] non commettere l'errore di attualizzare le loro riflessioni sul calco-

---

[3] Smith 1983, 270: «When we look at this work as a whole, another common feature is striking: the way Marx and Engels return to Hegel for clarification. Marxism is the negation of absolute idealism – but in the Hegelian sense of simultaneous abolition and preservation. Contrary to the contention of various revisionist schools, Marx did not make a single, once-for-all break with Hegel, but continuously returned to Hegel to negate his idealism, as did Lenin and Trotsky after him».

[4] Cfr. – tra gli altri – Galuzzi-Guerraggio 1979, 254 e Moretto 1991, 229: le parole degli autori si riferiscono qua esplicitamente a Hegel (nel caso di Moretto, il discorso riguarda addirittura la *Naturphilosophie* hegeliana e non le sue riflessioni sulla matematica), ma possono essere tranquillamente estese anche a Marx.

lo, considerandoli in qualche modo precursori di sviluppi che si sarebbero verificati solo successivamente.[5] Quello che non dobbiamo fare è cercare di interpretare le considerazioni di Marx e di Hegel come schemi adatti anche per la matematica contemporanea o di epoche successive, senza prendere in considerazione il rapporto essenziale che sussiste tra le idee dei due autori e la matematica del loro tempo. Insomma, le riflessioni di Hegel e di Marx vanno sempre considerate e valutate all'interno del contesto storico di appartenenza, tenendo conto che la loro cultura matematica rimaneva condizionata dallo stadio di sviluppo che questa disciplina aveva raggiunto alla fine del Settecento (quando cioè Cauchy e Weierstrass ancora non avevano elaborato quelle teorie che saranno fondamentali per la moderna concezione del calcolo differenziale).

3. Può essere interessante, infine, per gli studiosi di filosofia della matematica, perché consente di riflettere sui rapporti tra matematica e filosofia, mostrando la possibilità di un dialogo proficuo tra questi due mondi apparentemente così distanti, che ancora oggi, nonostante gli sforzi compiuti negli ultimi decenni, spesso faticano a comunicare tra loro. Pur senza lasciare un segno tangibile nella storia della matematica, Marx e Hegel hanno infatti saputo far emergere con maestria le contraddizioni presenti nella pratica matematica della loro epoca, pretendendo, come molti altri dentro e fuori la matematica, una definizione più rigorosa dei metodi di calcolo (contribuendo in questo modo allo sviluppo della matematica stessa) e traendone al contempo – oltre a spunti di riflessione estremamente originali – un'importante conferma 'empirica' delle loro teorie logico-filosofiche.

---

[5] Guerraggio 1982, 228: «Sostenere che un matematico ha anticipato brillantemente quelle idee che avrebbero trovato pieno riconoscimento solo successivamente è affermazione che a volte trova qualche appoggio nei testi ma che più spesso risulta pericolosa e fuorviante».

Ciò detto e prima di passare al nucleo centrale del mio lavoro, presento qui brevemente la struttura e il contenuto dei capitoli che seguiranno.

All’interno del primo capitolo, mi propongo anzitutto di far emergere la notevole conoscenza matematica di Hegel e di Marx (con il supporto di numerosi elementi biografici) e di smentire in questo modo la tesi di chi ha visto in loro – per utilizzare un termine inglese che non ha corrispondenze efficaci nella lingua italiana – degli *innumerate*. Cercherò poi di chiarire – senza pretesa di esaustività – quale considerazione Marx e Hegel avessero della matematica. Sebbene infatti entrambi siano stati considerati degli incompetenti in campo matematico, spesso si è insistito, anche all’interno della tradizione di studi marxista e addirittura hegeliana, nel sottolineare l’esistenza di un diverso atteggiamento da parte di Marx e di Hegel nei confronti della matematica: positivo (anche se strumentale) nel primo caso, fortemente negativo e critico nel secondo. Sarà qui importante far emergere come, a differenza di quanto si potrebbe pensare a prima vista (e come una lettura superficiale, o meglio, parziale, dei testi hegeliani, in particolare della *Fenomenologia* e della *Scienza della logica*, sembrerebbe confermare), l’atteggiamento dei due filosofi nei confronti della matematica e in particolare del calcolo differenziale e integrale sia in realtà simile. A questo proposito sarà fondamentale specificare i motivi che spinsero Hegel e Marx a interessarsi di calcolo infinitesimale. Se non è così difficile mostrare l’origine filosofica dell’interesse hegeliano nei confronti del calcolo, per quanto riguarda Marx la questione si fa decisamente più complessa. Tradizionalmente si è pensato, infatti, che Marx si fosse dedicato allo studio del calcolo nell’ambito delle sue ricerche di economia politica. Si tratterà di mostrare che in realtà l’interesse di Marx nei confronti del calcolo non è dettato esclusivamente da queste ragioni, ma anche (e forse soprattutto) da motivi puramente matematici e in parte filosofici. Per farlo occorrerà contestualizzare brevemente le opere alle quali farò principalmente riferimento all’interno di questo lavoro: i *Manoscritti matematici* di Marx – consultati oltre che nell’edizione italiana, anche in quella inglese e soprattutto nella versione originale tedesca, che compare nell’edizione russa del 1968 – e la *Scienza della logica* di Hegel (la scelta di far riferimento principalmente a quest’opera, nonostante Hegel abbia discusso di calcolo infinitesimale anche in altri scritti, è motivata dal fatto che Marx si ispira chiaramente alle considerazioni hegeliane contenute in questo testo). A questo proposito, nel tentativo di snellire il testo e rendere più scorrevole la lettura, ho deciso di utilizzare delle sigle per alcune delle opere di Hegel e di Marx tra le più citate (*in primis* ovviamente la *Scienza della logica* e i *Manoscritti matematici*), il cui elenco si può trovare nella bibliografia finale. Le pagine corrispondenti delle traduzioni italiane (anch’esse citate in bibliografia) sono state poste tra parentesi quadre dopo l’indicazione delle pagine del testo in lingua originale. Anche per le opere di altri autori stranieri di cui non esiste la traduzione italiana, ho riportato il riferimento al testo originale mettendo tra parentesi quadre il riferimento ai testi in cui ho rinvenuto la traduzione (che in alcuni casi ho realizzato io stesso).

Ritornando alla presentazione della struttura del saggio, all’interno del secondo capitolo tenterò invece di mettere in luce alcuni aspetti del contesto storico-matematico contemporaneo a Hegel e Marx. Naturalmente non sarà possibile entrare nel dettaglio della questione (data l’ampiezza dell’argomento), ma sarà essenziale far emergere quanto il tema della fondazione del calcolo infinitesimale fosse sentito all’epoca anche e soprattutto all’interno della comunità dei matematici. Questo a dimostrazione del fatto che Hegel e Marx affrontano una questione rilevante per la matematica del loro tempo, diversamente da quanto accaduto a molti filosofi della matematica del passato e del presente, che si sono spesso dedicati a questioni considerate ininfluenti dagli stessi matematici. Sarà importante, ai fini del confronto tra le posizioni dei due filosofi, sottolineare inoltre che le conoscenze di Hegel e di Marx sul tema erano di fatto le stesse (tutti e due si arrestavano infatti alla matematica di Lagrange), nonostante i lavori di Marx sul calcolo risalissero principalmente agli anni ’70-’80 dell’Ottocento, cioè quasi cinquanta anni dopo la seconda edizione della *Scienza della logica* di Hegel. Entrambi ignorano quindi i fondamentali contributi di Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) e di Karl Weierstrass (1815-1897) che inaugurano la cosiddetta analisi moderna e danno, almeno in parte, risposta alle questioni sollevate dagli stessi Marx e Hegel.

Infine, all’interno del terzo e ultimo capitolo, passerò a confrontare più nello specifico le posizioni di Marx e Hegel sul calcolo infinitesimale. Partendo dal presupposto che è praticamente impossibile individuare tutte le somiglianze/differenze tra le posizioni dei due autori, ho deciso di concentrarmi solo su alcuni aspetti, ovvero quelli che ho ritenuto particolarmente interessanti da un punto di vista prettamente filosofico. Ne anticipo qui brevemente alcuni. Innanzitutto, Marx e Hegel sono concordi nell’individuare nella problematica definizione degli infinitesimali (e del rapporto infinitesimale) il limite fondamentale dei metodi di calcolo elaborati fino a quel momento. Si tratterà qui di far emergere analogie e differenze nell’interpretazione marxiana e hegeliana su questo punto. Allo stesso modo Marx e Hegel hanno opinioni in parte diverse e in parte simili sulla collocazione del calcolo infinitesimale rispetto alla matematica precedente, ovvero alla cosiddetta matematica elementare e all’algebra. Vedremo poi come entrambi vedano operante nel calcolo differenziale il metodo dialettico e come proprio questo sia stato uno dei motivi – se non il motivo principale – che li spinse a dedicarsi allo studio del calcolo. Sia Marx che Hegel inoltre, nell’affrontare la questione, adottano un approccio storico: in entrambi i casi non si tratta di un’esibizione autocelebrativa del proprio bagaglio culturale, ma di un passaggio fondamentale per lo sviluppo delle proprie argomentazioni. Infine, sarà importante sottolineare come le idee di Marx e Hegel sul calcolo, apparentemente originali, siano in realtà spesso rivisitazioni di idee già espresse o formulate all’interno del panorama matematico-filosofico della loro epoca.

Per la pazienza, la disponibilità e i preziosi suggerimenti offerti sia nella fase di produzione che di revisione del testo, senza i quali sarebbe stato difficile portare a termine questo lavoro, ringrazio di cuore il Professor Antonio Moretto, le cui ricerche su Hegel e la matematica sono state per me una costante fonte di ispirazione.

Infine rivolgo un particolare ringraziamento alla Professoressa Paola Giacomoni per i suoi preziosi consigli e per la fiducia che ha riposto nei miei confronti fin dal primo momento.

Hegel, Marx e il calcolo infinitesimale

Introduzione

A dispetto di quanto si potrebbe immaginare, esiste un aspetto del pensiero di Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770-1831) e di Karl Marx (1818-1883) che, ancora oggi – nonostante gli innegabili progressi compiuti negli ultimi anni – non ha ricevuto la giusta considerazione da parte degli studiosi di filosofia (e non solo). Sto parlando delle loro riflessioni sulla matematica. Che questi due pensatori, conosciuti universalmente per la grandezza dei loro sistemi filosofici, si siano occupati, tra le altre cose, anche di aritmetica, di geometria, di algebra e soprattutto, come vedremo, di analisi superiore è infatti qualcosa che non solo il grande pubblico – com'è d'altronde lecito aspettarsi –, ma anche buona parte degli specialisti ha ignorato per molto tempo e spesso continua a ignorare. Se ci pensiamo in effetti, è difficile trovare, nelle numerose monografie dedicate a questi autori, degli accenni alle loro considerazioni sulla matematica e anche nei rari casi in cui se ne fa menzione, il tutto viene liquidato in poche righe come un aspetto secondario, marginale e del tutto trascurabile del loro pensiero. Persino gli studi specialistici dedicati a questo argomento, soprattutto se confrontati con quelli rivolti ad altri aspetti della filosofia di Hegel e Marx, sembrano scarseggiare, sebbene negli ultimi decenni, più o meno a partire dagli anni Settanta-Ottanta del Novecento, la questione abbia catturato l'attenzione di un numero sempre crescente di studiosi.[1]

Questo disinteresse ha avuto, storicamente, diverse ragioni, ma un fattore determinante è stato senza dubbio l'affermarsi di una sorta di mito 'anti-matematico' nei confronti di Hegel e – anche se in misura decisamente minore – di Marx. Questo mito, come avremo modo di vedere più approfonditamente nel primo capitolo del libro, si è sviluppato sostanzialmente in due direzioni:

---

[1] Per una panoramica dei principali contributi sull'argomento, rimando alla bibliografia in calce al volume.

1. da un lato sono state messe in discussione le conoscenze e le competenze matematiche dei due filosofi, a lungo considerati – per utilizzare un'espressione quasi sinestetica – dei veri e propri 'analfabeti matematici';

2. dall'altro è stata sottolineata la presenza di un atteggiamento fortemente pregiudiziale (nel caso di Hegel) o strumentale (nel caso di Marx) nei confronti della matematica stessa e delle sue possibilità conoscitive.

In realtà, questa versione, pur non essendo del tutto priva di fondamento – come dimostrano in particolare alcune pagine della *Fenomenologia* e della *Scienza della logica* di Hegel – è frutto di una prospettiva, se non completamente falsa, quanto meno parziale. Come vedremo infatti, non solo Hegel e Marx si dedicarono con grande applicazione allo studio della matematica, tanto da essere al corrente dei risultati più recenti (quelli a loro accessibili naturalmente) conseguiti dalla ricerca scientifica in questo campo, ma il loro atteggiamento nei confronti di questa disciplina non fu mai, in ultima istanza, di totale chiusura (al massimo di severa critica), bensì di manifesto apprezzamento (per lo meno nei confronti di alcuni settori della matematica e in modo particolare proprio del calcolo differenziale).

Ora, se è vero che recentemente, come detto, le ricerche dedicate al rapporto tra Hegel e Marx da una parte e la matematica dall'altra si sono moltiplicate a vista d'occhio, contribuendo a raggiungere su questo tema una posizione decisamente più equilibrata rispetto al passato, è altrettanto vero che questi studi rimangono ancora oggi piuttosto limitati e sono molti gli aspetti che avrebbero bisogno di ulteriori approfondimenti. Mentre, ad esempio, quasi tutti gli studi dedicati a questo argomento hanno messo in luce il particolare interesse che Hegel e Marx nutrirono nei confronti del calcolo infinitesimale e del problema della sua fondazione, entrando nei dettagli delle posizioni sostenute dai due filosofi a questo proposito, «rimane quasi del tutto da chiarire – come Antonio Moretto constatava già nel lontano 1978 – in quale rapporto si trovi il pensiero di Marx sul calcolo rispetto a quello di Hegel» (Moretto

1978, 217). Sebbene siano passati più di quaranta anni da quando l'articolo da cui sono tratte queste parole venne pubblicato, da allora la situazione è rimasta sostanzialmente la stessa.

Questo fatto, già di per sé abbastanza sorprendente, lo è ancor di più se pensiamo che le prove dell'esistenza di uno stretto rapporto tra le riflessioni sul calcolo dei due pensatori sono pressoché inconfutabili, nonostante Hegel non venga mai esplicitamente nominato da Marx all'interno dei *Manoscritti matematici*[2] (nemmeno nella brevissima sezione bibliografica che vi compare). Ciò, infatti, non significa per forza di cose escludere che Marx si sia ispirato alle considerazioni hegeliane sul calcolo per comporre le proprie, così come non significa – al contrario di quanto sostenuto da buona parte degli studiosi di tradizione marxista – che Marx abbia voluto tener nascosto a tutti i costi l'evidente debito nei confronti di Hegel (e quindi, indirettamente, il legame con il suo idealismo). Piuttosto, per spiegare la mancanza di riferimenti espliciti a Hegel all'interno delle pagine marxiane, è sufficiente ricordare che nelle intenzioni del loro autore gli scritti sul calcolo non dovevano essere destinati alla pubblicazione. Fu semmai Friedrich Engels (1820-1895) a pensare di pubblicarli assieme ai risultati delle sue ricerche scientifiche, come annunciato nella *Prefazione* alla seconda edizione dell'*Antidühring*,[3] senza poi trovare il tempo di portare effettivamente a compimento tale proposito. Che Marx non avesse mai nutrito il desiderio di rendere pubblici tali scritti risulta evidente dal fatto che gran parte del materiale successivamente raccolto all'interno dei *Manoscrit-*

---

[2] Questo è il nome che i curatori dell'edizione sovietica del 1968 hanno deciso di dare alla raccolta degli scritti matematici di Marx. Sulla questione della pubblicazione dei *Manoscritti*, cfr. *infra*.

[3] Cfr. *MEW* 20, 12-13: «Ich muß mich vorderhand mit den in der vorliegenden Schrift gegebnen Andeutungen begnügen und abwarten, ob sich später einmal Gelegenheit findet, die gewonnenen Resultate zu sammeln und herauszugeben, vielleicht zusammen mit den hinterlassenen höchst wichtigen mathematischen Manuskripten von Marx». Il passo riportato non compare nella traduzione italiana del testo.

ti matematici è costituito da appunti e abbozzi, costellati di aggiunte e caratterizzati da numerose cancellature e sovrapposizioni. Solo due saggi, *Sul differenziale* (Über das Differential) e *Sul concetto di funzione derivata* (Über den Begriff der abgeleiteten Funktion), sembrano possedere una forma più o meno definitiva, tanto che Marx decise di sottoporli alla lettura di Engels,[4] senza tuttavia alludere, nemmeno in questo caso, a una loro possibile pubblicazione. Se pensiamo quindi che gli scritti dedicati a questioni matematiche non furono composti da Marx in vista di una loro pubblicazione, ma solo ed esclusivamente a uso privato (o tutt'al più di Engels), il fatto che al loro interno egli non avesse menzionato esplicitamente tutte le fonti dalle quali aveva tratto ispirazione per redigerli non deve assolutamente sorprenderci. Alla luce di quanto detto, è infatti logico pensare che Marx si limitò a citare solo quelle opere che non erano note a Engels e con le quali egli stesso non aveva grande confidenza: tra queste ovviamente non rientrava Hegel, con cui sia Marx che Engels avevano all'epoca grande familiarità. Questa ipotesi è confermata anche da una lettera inviata dallo stesso Engels a Marx il 18 agosto 1881, poco dopo aver ricevuto dall'amico i manoscritti dei due saggi sopra menzionati. Al di là dell'aspetto particolare a cui Engels fa riferimento in questo passo, che non ci interessa qui approfondire, è significativo notare come, nonostante il nome di Hegel non venga mai citato esplicitamente, Engels – come osservano giustamente Ponzio[5] e Alcouffe –[6] riconosca immediatamente l'influenza delle riflessioni hegeliane sulle pagine di Marx:

[4] Come testimoniato dalla dicitura 'Per il generale' apposta sui manoscritti, con riferimento al soprannome che la famiglia di Marx aveva dato a Engels.

[5] Ponzio 2005, 18: «Questi manoscritti erano destinati a Engels, che conosceva bene la *Logica* di Hegel e con il quale c'era dunque una comune familiarità con i lavori matematici hegeliani; comune familiarità che permette a Engels di cogliere nel manoscritto *Sul concetto di funzione derivata*, senza che il nome di Hegel sia menzionato da Marx, il riferimento alla *Scienza della logica* e in particolare alla sezione *L'infinito quantitativo*».

[6] Cfr. Alcouffe 1985, 60.

> Il vecchio Hegel aveva dunque indovinato del tutto giusto quando diceva che la differenziazione aveva per condizione fondamentale che le due variabili dovessero essere di una potenza diversa e che per lo meno una dovesse essere alla 2 o $\frac{1}{2}$ potenza. Ora sappiamo anche perché. (*MEW* 35, 24 [vol. 6, 331])

Ma è un'altra lettera di Engels, questa volta inviata al sociologo e filosofo Friedrich Albert Lange (1828-1875) qualche anno prima (29 marzo 1865), a confermare ulteriormente, e in modo forse ancor più palese, l'esistenza di un nesso tra il pensiero di Hegel e quello di Marx sul calcolo. Scrive infatti Engels:

> Non posso lasciarla senza menzionarla, un'osservazione sul vecchio Hegel, al quale Lei nega una profonda conoscenza matematica e scientifica; Hegel sapeva tanta matematica che nessuno dei suoi scolari fu in grado di pubblicare i numerosi manoscritti matematici da lui lasciati. L'unico uomo che, per quanto io sappia, capisce abbastanza di matematica e filosofia, per essere in grado di farlo è Marx. (*MEW* 31, 467-468 [trad. it. in Guerraggio 1982, 242])

Al di là di queste testimonianze, che, per quanto importanti, da sole non sono certo sufficienti a provare in maniera definitiva l'esistenza di un rapporto tra le riflessioni sul calcolo di Hegel e Marx, le analogie tra le due posizioni sono, come vedremo, molto più strutturali e riguardano alcuni aspetti fondamentali della questione al centro dell'interesse dei due filosofi.[7] Persino il vocabolario e i riferimenti bibliografici di Marx – come fa opportunamente notare Alcouffe –[8] risentono chiaramente dell'influenza della lettura delle pagine di Hegel sul calcolo. Questa tesi trova conferma non tanto nel fatto che entrambi facciano riferimento a

---

[7] Alcouffe 1985, 59: «En effet, si une analyse forcément rapide mais scrupuleuse nous a conduit à écarter parmi les motivations de Marx un souci d'utilisation immédiate en économie, plusieurs éléments marquant une relation Hegel-Marx sautent aux yeux quand on examine les conditions dans lesquelles Marx s'est intéressé au calcul différentiel et plus encore, le contenu de ses travaux».

[8] Come si rende evidente, ad esempio, nella distinzione tra *Realität* e *Wirklichkeit* e nella decisione di impiegare il termine *die Zahl* – letteralmente 'numero, cifra' – al posto del più corretto *die Wert*, per indicare il valore di una funzione. Cfr. Alcouffe 1985, 59-61; 61, n. 78.

Newton, Leibniz, Lagrange e alle loro opere (da cui non possiamo trarre alcuna indicazione sulle possibili fonti di ispirazione di Marx, dal momento che questi autori venivano citati regolarmente in tutte le bibliografie degli studi sul calcolo dell'epoca), quanto piuttosto nel fatto – questo sì particolarmente significativo – che Marx indichi esplicitamente tra i testi da lui consultati le opere del matematico inglese John Landen (1719-1790)[9] e del matematico svizzero Simon L'Huilier (1750-1840), nomi molto meno noti, ma espressamente menzionati da Hegel nella *Scienza della logica*.[10]

Ora, sebbene non sia così difficile, come abbiamo potuto dedurre già da questi brevi accenni iniziali, cogliere l'origine hegeliana delle ricerche di Marx sul calcolo differenziale, gli studi che si sono dedicati a indagare più nello specifico la questione sono, come ricordato in precedenza, molto pochi. Tra di essi, vanno sicuramente ricordati i saggi *Hegel and Mathematics*[11] di Sofya Yanovskaja ed Ernst Kolman; *Hegel, Marx and Calculus*[12] di Cyril Smith; *Marx, Hegel et le "Calcul"*[13] di Alain Alcouffe e infine *Lo strumento matematico in Marx*[14] di Angelo Guerraggio. Questi contributi, pur fondamentali per la mia ricerca, risultano tuttavia, per diverse ragioni, limitati, o meglio parziali, nella

---

[9] Cfr. Smith 1983, 257, n.: «Perhaps Marx's references to Newton's *Principia* were prompted by those of Hegel. His references to John Landen certainly were».

[10] Cfr. per entrambi *WdL I*, 171.

[11] Kolman-Yanovskaja 1983, 235-255. Il saggio è citato nella traduzione contenuta nell'edizione inglese dei *Manoscritti matematici* del 1983. L'articolo originario (in russo) risale al 1931, quando venne pubblicato all'interno della rivista *Pod Znamenem Marksizma (Sotto le bandiere del marxismo)*. Yanovskaja e Kolman sono tra l'altro i curatori principali della prima edizione dei *Manoscritti matematici*, apparsa nel 1968. Cfr. *infra*.

[12] Smith 1983, 256-270. Il saggio venne scritto proprio in occasione della pubblicazione dell'edizione inglese dei *Manoscritti matematici*, curata dallo stesso Smith.

[13] Cfr. Alcouffe 1985, 9-109. Il saggio compare come prefazione all'edizione francese dei *Manoscritti matematici*, apparsa nel 1985 a cura dello stesso Alcouffe.

[14] Cfr. Guerraggio 1982, 139-260.

loro interpretazione del rapporto tra Marx e Hegel sul calcolo. Val la pena spendere due parole a questo proposito. Il saggio di Yanovskaja-Kolman, pur riconoscendo esplicitamente l'origine hegeliana dei lavori matematici di Marx, è caratterizzato da un forte pregiudizio nei confronti dell'idealismo hegeliano, di cui vengono continuamente messe in luce le deviazioni e gli errori, spesso travisando il significato delle parole dello stesso Hegel.[15] Anche il saggio di Smith risente, in parte, di quel pregiudizio anti-hegeliano (o meglio, 'anti-idealista'), condiviso da una certa tradizione di stampo marxista, ma la sua posizione risulta molto più equilibrata di quella di Yanovskaja e Kolman. Smith, infatti, riconosce apertamente la palese influenza esercitata da Hegel sui *Manoscritti matematici*, senza paura di commettere, così facendo, un crimine di 'leso-materialismo' (per riprendere una bella espressione di Alcouffe).[16] La sua analisi delle pagine hegeliane dedicate al calcolo appare tuttavia piuttosto superficiale (il tutto si riduce a un paio di pagine in cui Smith insiste solo su alcuni punti della teoria di Hegel)[17] e la valutazione finale sul rapporto Marx-Hegel non può che risentirne.

Come si è potuto intuire già da queste prime pagine – e come emergerà anche successivamente – il saggio di Alcouffe ha rappresentato senza alcun dubbio un punto di partenza fondamentale per approfondire il tema del rapporto tra il pensiero di Marx e quello di Hegel sul calcolo differenziale. L'unico limite dell'analisi di Alcouffe sta forse, come sottolinea Ponzio,[18] nell'aver

---

[15] Alcouffe 1985, 95: «Il s'efforcent, littéralement, de séparer le bon grain dialectique de l'ivraie idéaliste. Leur critique consiste à soutenir qui'il y a un objet – une matière – des mathématiques que Hegel n'aurait pas reconnu du fait de son "idéalisme". Restant, ainsi, dans son système philosophique, à côté ou extérieur à la mathématique, il aurait été conduit à des "déformations ou mystifications"».

[16] Cfr. Alcouffe 1985, 95, n. 138.

[17] Cfr. Smith 1983, 260-262.

[18] Ponzio 2005, 17: «Certamente, bisogna riconoscere che il rapporto con Hegel gioca un ruolo non marginale nei manoscritti matematici di Marx, senza però che sia il caso di enfatizzarlo come tende invece a fare Alcouffe».

accentuato eccessivamente l'importanza delle riflessioni hegeliane nella stesura degli scritti marxiani sulla matematica (in controtendenza rispetto a quanto accade solitamente negli studi dedicati ai *Manoscritti matematici* e quasi a voler compensare l'esclusiva insistenza sulla loro origine economica), ma ciò non toglie che la sua analisi sia stata un riferimento importante per il mio lavoro. A Guerraggio infine va sicuramente riconosciuto il merito di aver messo in rilievo, più di molti altri studiosi che si sono dedicati all'argomento, il debito di Marx nei confronti di Hegel,[19] ma anch'egli affronta questo aspetto solo marginalmente e, pur dedicandogli parecchie pagine, non entra mai realmente nello specifico della questione, che d'altronde esula dagli obiettivi del suo lavoro. Insomma, volendo tracciare un bilancio complessivo, possiamo dire che allo stato attuale, la ricerca su questo aspetto del pensiero di Marx e Hegel sembra ancora oggi lontana dall'aver raggiunto dei risultati soddisfacenti e definitivi. Obiettivo principale di questa pubblicazione è proprio quello di tentare di colmare, almeno in parte, questa lacuna, cercando nello specifico di mettere in luce le principali similitudini e differenze tra le posizioni dei due filosofi su questo tema.

---

[19] Cfr. Guerraggio 1982, 140: «La posizione hegeliana ha indubbiamente influenzato Marx e la sua conoscenza costituisce pertanto uno degli strumenti principali per cogliere con chiarezza alcune problematiche presenti nei manoscritti marxiani».

1. Hegel, Marx e la matematica

Uno dei motivi (se non il motivo principale) che ha per molto tempo rallentato – e che in parte tutt'ora rallenta – la ricerca sulla filosofia della matematica di Marx e soprattutto di Hegel è stata la convinzione – frutto di pregiudizi e stereotipi rafforzatisi nel tempo – che i due non disponessero di una preparazione tale da potersi esprimere con pertinenza su argomenti di natura matematica. In altre parole, in molti hanno sostenuto che le riflessioni di Marx e di Hegel sulla matematica non dovessero essere prese sul serio perché formulate da chi di matematica non sapeva e non capiva sostanzialmente nulla. Matematicamente parlando, Marx e Hegel sarebbero stati cioè dei veri e propri incompetenti, che, di conseguenza, si sarebbero espressi a sproposito su argomenti di cui, di fatto, non avevano nessuna conoscenza. Questa tesi – la cui falsità, come avremo modo di vedere tra poco, non è così difficile da dimostrare – ha conosciuto storicamente un'enorme diffusione, al punto che persino alcuni tra i più importanti studiosi del pensiero marxiano e hegeliano hanno messo in discussione la cultura matematica dei due filosofi. In realtà, è sufficiente ripercorrere il percorso di studi compiuto da Hegel e da Marx per rendersi conto che i due non solo possedevano alcuni rudimenti in aritmetica, geometria e algebra – come al massimo ci si potrebbe aspettare – ma padroneggiavano perfettamente la matematica elementare e conoscevano addirittura il calcolo differenziale e integrale, anche nelle sue elaborazioni più recenti (a esclusione, come ricordato anche in precedenza, delle teorie di Cauchy). Che Marx e Hegel nutrissero un serio interesse nei confronti della matematica è dimostrato peraltro dal fatto che entrambi si dedicarono allo studio di questa disciplina non solo in età giovanile, semplicemente perché prevista all'interno dei curricula liceali dell'epoca (anzi, Hegel si occupò privatamente di matematica persino durante il periodo ginnasiale)[1]

[1] Cfr. Rosenkranz 1974, 32.

ma anche e soprattutto in età adulta. Basti pensare a questo proposito che la prima menzione esplicita degli interessi matematici di Marx risale a una lettera a Engels dell'11 gennaio 1858, quando cioè Marx aveva già ben 40 anni.

Questo interesse da parte di Hegel e di Marx per la matematica si spiega, in parte, facendo riferimento a quello che potremmo chiamare, per utilizzare un'espressione di chiara origine hegeliana, lo 'spirito del tempo' (*Zeitgeist*) dell'epoca. Non dobbiamo dimenticare in effetti che il rapporto tra matematica e filosofia rappresenta una delle cifre caratteristiche del pensiero filosofico del Seicento, del Settecento e anche della prima parte dell'Ottocento (come, ad esempio, nel periodo del Romanticismo). Basti citare a questo proposito i nomi di Galilei, Descartes, Spinoza, Leibniz, Newton, Wolff, Lambert o ricordare i temi su cui era incentrato gran parte del dibattito filosofico del tempo: la differenza tra analisi e sintesi, la possibilità di una filosofia *more geometrico demonstrata*, la fondazione della geometria euclidea e soprattutto del calcolo infinitesimale. Particolarmente significativo a questo proposito il concorso indetto nel 1761 dall'Accademia delle Scienze di Berlino, che chiedeva di dimostrare se le verità metafisiche potessero raggiungere lo stesso grado di evidenza delle verità matematiche.[2] Potremmo prendere in considerazione tutta un'altra serie di prove dell'esistenza di uno strettissimo legame tra la filosofia e la matematica dell'epoca, ma sarebbe superfluo proseguire oltre, dal momento che su questo punto sono stati pubblicati negli anni un numero incalcolabile di studi. Sebbene quindi si possa tranquillamente affermare che questo clima generale ebbe una certa influenza anche su Hegel e Marx, spingendoli a occuparsi in prima persona di matematica e a riflettere su alcune delle questioni filosofico-matematiche più urgenti dell'epoca, il loro interesse – in particolare nei confronti del calcolo – è in qualche modo sospinto da un'esigenza per così dire personale e ha, come vedremo tra poco, delle motivazioni ben più profonde, che affondano le proprie radici nell'intimo del pensiero di questi due autori.

---

[2] Per maggiori informazioni cfr. Moretto 1984, 17, n. 29.

§1.1 *Hegel e la matematica*

Tra i due filosofi, Hegel fu senza alcun dubbio quello la cui preparazione matematico-scientifica venne messa maggiormente in discussione. Ciò accadde non solo all'interno della tradizione positivista e neopositivista – come del resto ci potremmo aspettare – ma anche all'interno di quella che si ispirava apertamente alla filosofia hegeliana. L'insistenza sulla presunta incompetenza scientifico-matematica di Hegel fu molto probabilmente una conseguenza delle severe critiche che egli rivolse alla matematica e alle altre scienze positive all'interno di opere come la *Fenomenologia*, la *Scienza della logica* e l'*Enciclopedia*; critiche alle quali molti – dentro, ma anche fuori l'ambiente matematico-scientifico – reagirono screditando la sua preparazione in questo campo: solo chi ignorava, chi non conosceva veramente il modo di procedere della matematica e delle scienze, poteva sostenere certe posizioni nei loro confronti. Questo mito, che di fatto «sanciva uno iato tra il pensiero di Hegel e le scienze matematiche, fisiche, chimiche e naturali» (Moretto 1984, 11), ha goduto, nel corso dei decenni, di grandissima fortuna, persino tra alcuni protagonisti della filosofia e della scienza del Novecento, come Karl Popper (1902-1994) e Bertrand Russell (1872-1970). All'interno del suo capolavoro *La società aperta e i suoi nemici* (pubblicato per la prima volta nel 1946), Popper ad esempio polemizza – con ironia nemmeno troppo velata – contro coloro che hanno lodato le ricerche di Hegel in campo scientifico:

> La fama di Hegel è stata fatta da coloro che preferiscono una rapida iniziazione nei più profondi segreti di questo mondo ai faticosi tecnicismi di una scienza che, dopo tutto, può solo deluderli con la sua capacità di svelare tutti i misteri. Infatti essi ben presto scoprirono che nulla poteva essere applicato con tanta facilità a qualsivoglia problema e nello stesso tempo con tanto impressionante (anche se solo apparente) difficoltà e con un così rapido ma imponente successo, nulla poteva essere usato a così buon mercato e con così piccola conoscenza e formazione scientifica, e nulla poteva dare una così spettacolare aria scientifica, quanto la dialettica hegeliana, l'arcano metodo che sostituiva la 'sterile logica formale'. (Popper 1981, 42)

Dopo essersi fatto beffe della teoria hegeliana del suono e del calore, che cita con il preciso intento «di scoraggiare in anticipo il lettore dal prendere troppo sul serio il linguaggio enfatico e mistificante di Hegel» (*ibidem*), Popper arriva addirittura a definire «un bluff» (Popper 1981, 43) la lettera che Hegel – il 30 luglio 1814 – scrive a Heinrich Paulus (1751-1851), in cui il filosofo confida all'amico di trovarsi attualmente impegnato nello studio del calcolo infinitesimale.[3]

Russell[4] è, se possibile, ancor più drastico di Popper nella sua considerazione del lavoro di Hegel in campo matematico:

> Hegel si è aggrappato a ciò che vi era di oscuro nei fondamenti della matematica, trasformandolo in contraddizioni dialettiche, e risolvendo quest'ultime con sintesi prive di senso. […] I conseguenti enigmi [della matematica] furono tutti risolti nel diciannovesimo secolo, non da eroiche dottrine filosofiche come quella di Kant o quella di Hegel, ma da una paziente attenzione ai dettagli. (Russell 1956, 368-369 [trad. it. mia])

Posizioni analoghe a quelle di Popper e di Russell sono state sostenute, nel corso dei decenni, da molti altri studiosi, concordi nel ritenere che «le molte pagine che egli [Hegel] dedica alla chiarificazione dei problemi scientifici sarebbero confusioni, fraintendimenti, "errori"; comunque portatrici di contenuti concettuali diversi, distanti dal procedere della scienza» (Galuzzi-Guerraggio 1979, 251). Vale la pena citare come esempio paradigmatico di questo atteggiamento le parole del filosofo e chimico francese Èmile Meyerson (1859-1933), che all'interno della sua opera *De l'explication dans les sciences* del 1921 – pur riconoscendo espressamente la possibilità di trarre importanti insegnamenti dalle riflessioni scientifiche di Hegel – scrive:

> Hegel, nei confronti del quale – sembra – la natura si era mostrata piuttosto parsimoniosa dal punto di vista del dono matematico, […], ha dovu-

---

[3] Cfr. *infra*.

[4] Pinkard 1981, 452: «Russel's comment to the fact that it was Hegel's stupidity in mathematics which drove him away from Hegel's philosophy are by now part of the Hegel legend».

> to provare di fronte a ragionamenti piuttosto elementari, quel sentimento di 'abrupt' che il matematico prova davanti ai ragionamenti di Galois. (Meyerson 1921, vol. 1, 141-142 [trad. it. in Guerraggio 1982, 243])

E nel secondo volume, Meyerson rincara la dose, parlando di «una sorta di mancanza innata di senso matematico, forse aggravata da un'educazione in cui la matematica aveva poco spazio e per colmare le cui lacune non sono bastati gli sforzi successivi» (Meyerson 1921, vol. 2, 43 [trad. it. in Guerraggio 1982, 243]).

Ora, se è vero che gli studiosi del pensiero hegeliano, o quanto meno quelli che hanno messo al centro delle proprie ricerche il rapporto tra Hegel e la matematica, si sono resi ben presto conto dell'infondatezza di questo mito,[5] è anche vero che tale consapevolezza ha faticato a imporsi al di là di questa cerchia ristretta di specialisti, al punto che ancora oggi sono molti (sia all'interno del mondo filosofico, sia all'interno del mondo scientifico) a vedere in Hegel, se non propriamente un nemico, comunque un convinto oppositore del pensiero matematico, a dimostrazione che – come scrive giustamente Pinkard – «myths die hard» (Pinkard 1981, 452), i miti muoiono difficilmente.

Eppure, dimostrare la falsità di chi considera Hegel un incompetente dal punto di vista matematico non è così difficile come si potrebbe pensare. Per mettere quanto meno in dubbio questa tesi, basterebbe prendere in considerazione le testimonianze di chi sostiene un'altra verità rispetto a quella spacciata per tale, tra gli altri, da Russell e Popper, come ad esempio Engels (pensiamo alle parole citate precedentemente)[6] oppure Karl Friedrich Rosenkranz (1805-1879), il quale nella monumentale biografia dedicata all'amico, scrive che Hegel «non disprezzava affatto le cosiddette scienze esatte, ma si sottoponeva con la più volenterosa tenacia al loro apprendimento, tanto da non tralasciare, come mostrano i numerosi e ampi estratti ancora esistenti, di studiare

[5] Cfr. a questo proposito – tra gli altri – Petry 1987; Houlgate 1998 e Cohen-Wartofsky 1984.

[6] Cfr. *supra*.

nessuna delle opere più famose di matematici, fisici e fisiologi» (Rosenkranz 1974, 170). Proprio il caso della matematica rappresenta da questo punto di vista un esempio paradigmatico.

Come accennato poco sopra, Hegel si dedicò allo studio della matematica fin da giovanissimo (già nel periodo trascorso presso il Ginnasio di Stoccarda tra il 1777 e il 1788), principalmente da autodidatta, formandosi in particolare sui testi di Abraham Gotthelf Kästner (1719-1800),[7] come riportato anche da Rosenkranz: «l'aritmetica, la geometria e la matematica applicata sono ricavate principalmente dagli scritti del Kästner; possediamo del resto i quaderni di geometria, meccanica ed ottica di Hegel tenuti in uno stato di grande pulizia». (Rosenkranz 1974, 35-36)[8]

Le testimonianze più significative dell'interesse che Hegel nutriva all'epoca per la matematica sono senza alcun dubbio i due manoscritti autografi, datati 23 settembre 1800, passati alla storia con il nome di *Geometrische Studien*. Qui Hegel si sofferma sul problema della fondazione della geometria euclidea, prendendo in considerazione le prime proposizioni (dalla I alla XXXI) del I libro degli *Elementi* e muovendo alcune critiche (poi riprese sia nella *Logica di Jena*, sia nella *Scienza della logica*) alla teoria della congruenza e a quella delle parallele proposte da Euclide.[9] Questo scritto è particolarmente significativo perché in esso è già

---

[7] A.G. Kästner fu geometra (studioso di Euclide), storico della matematica e soprattutto autore di saggi critici sul calcolo infinitesimale, tra cui ricordiamo gli *Anfangsgründe der Analysis des Unendlichen*. Kästner faceva parte di quel numero di matematici che all'epoca si stava dedicando alla sistemazione critica delle riflessioni di Newton e di Leibniz sull'analisi, che finiscono di conseguenza per rappresentare anche la base degli studi di Hegel. Per maggiori informazioni cfr. Boyer 1949, 250-254.

[8] Come riporta Moretto (1984, 49, n. 123) nel *Tagebuch* (diario) che Hegel teneva ai tempi del Ginnasio troviamo un cenno alla lettura della *Kästner Mathem.*, ma anche allo studio della trigonometria sferica sul testo *Lorenzens Mathematik*. Johann Friedrich Lorenz (1738-1807) fu, come vedremo nel terzo paragrafo, autore della traduzione tedesca degli *Elementi* di Euclide e punto di riferimento costante per gli studi matematici di Hegel.

[9] Hegel si dimostra fin da subito sensibile alle questioni considerate urgenti dai matematici del suo tempo: proprio il V postulato di Euclide (quello sulle

presente quell'ambivalenza – o meglio quella complessità – che caratterizzerà anche negli anni a venire il rapporto di Hegel con la matematica: se da una parte infatti risultano evidenti la curiosità e l'interesse che Hegel nutriva nei confronti di questa disciplina, dall'altra emergono altrettanto chiaramente alcuni di quei motivi che saranno poi ricorrenti nella critica hegeliana alla matematica. I rimproveri che Hegel rivolge a Euclide infatti riguardano anzitutto l'assenza del concetto di determinatezza della figura, cui il geometra – chiamato a stabilire l'uguaglianza tra due figure – cerca di far fronte confrontandole semplicemente tra di loro. Non potendo contare sul concetto (e questa, come vedremo,[10] è una delle mancanze più gravi della matematica secondo Hegel) il matematico non può far altro che operare esternamente alla cosa.

Nonostante l'interesse dimostrato fin da subito nei confronti di questa disciplina, fu soprattutto negli anni compresi tra il 1800 e il 1814 che Hegel si dedicò in modo particolare allo studio della matematica. Durante il periodo trascorso a Jena (dove si era trasferito nel 1801 su invito dell'amico Schelling), Hegel tenne infatti – a partire dal semestre invernale 1805-1806 e per ben tre semestri consecutivi (esattamente negli anni in cui era impegnato nella stesura della *Fenomenologia dello spirito*, nella cui *Prefazione*, come detto, non mancano duri attacchi alla matematica) – alcuni corsi di aritmetica e geometria, come testimoniato dall'annuncio delle lezioni per il *Wintersemester* 1805-1806: «Ge. Wilh. Frid. Hegel, D.a) Mathesin puram et quidem Arithmeticam, ex libro: Stahls Anfangsgründe der reinen Arithmetik, 2te Auflage. Geometriam ex libro Lorenz erster Cursus der reinen Mathematik, 2te Auflage».[11] Che Hegel avesse preso sul serio questo impegno, è dimostrato

---

rette parallele) era infatti all'epoca al centro di un acceso dibattito, che sarebbe culminato di lì a poco nella nascita delle cosiddette geometrie non euclidee.

[10] Cfr. *infra*.

[11] Cfr. Kimmerle 1967, 55. I due testi a cui Hegel fa riferimento sono *Reine Mathematik, Arithmetik und Geometrie, Th. 1: Anfangsgründe der Arithmetik zum Gebrauche bey Vorlesungen* (1802) di Conrad Diedrich Martin Stahl (1771-1833) e *Grundrisse der reinen und angewandten Mathematik oder der*

dalla lettera inviata il 24 marzo 1812 all'amico e collega Friedrich Immanuel Niethammer (1766-1848), in cui scrive:

> Avrei in mente già da tempo di redigere un compendio circa il modo di svolgere l'insegnamento teoretico della geometria e dell'aritmetica nei ginnasi, perché tanto a Jena che qui [all'epoca Hegel si trovava a Norimberga] ho trovato nelle mie lezioni che questa scienza, senza mescolarvi la filosofia che non c'entra, può essere trattata in modo più intelligibile e sistematico del solito, mentre in genere non si riesce a scorgere da dove provenga il tutto e dove sia diretto, dal momento che non vi è indicata norma teoretica alcuna. (*Briefe*, Bd. 1, 398 [132-133])

Ma oltre all'insegnamento, Hegel si stava dedicando all'epoca anche allo studio della matematica e in particolare del calcolo infinitesimale, la cui importanza viene riconosciuta esplicitamente da Hegel nella lettera spedita a Pieter Gabriël van Ghert il 18 dicembre 1812, in cui scrive che «per penetrare più profondamente in questo campo [l'astronomia] si esige prontezza nel calcolo differenziale e integrale, in particolare secondo le nuove esposizioni francesi» (*Briefe*, Bd. 1, 426 [135]). Al di là di quanto Hegel afferma qui, non sono certo i suoi studi astronomici, come vedremo, a rappresentare il motivo principale che lo spinse a occuparsi di calcolo. Sta di fatto che negli anni successivi Hegel si applicò con grandissima dedizione allo studio di questa materia, come conferma la lettera[12] inviata, il 30 luglio 1814, al teologo Heinrich Eberhard Gottlob Paulus (1761-1851), dove è lo stesso Hegel a riconoscere espressamente l'importanza di possedere una buona conoscenza della materia prima di potersi esprimere – o meglio, di poter filosofare – a proposito:

> Lei sa che mi sono occupato moltissimo non soltanto di letteratura antica, ma anche di matematica, e recentemente di analisi superiore, del calcolo differenziale, di fisica, di storia naturale, di chimica – al fine di non farmi afferrare dalle vertigini della filosofia della natura, cioè di

---

erste Cursus der gesamten Mathematik. Th.1: Die reine Mathematik. Grundriß der Arithmetik und Geometrie (1798) del già citato Lorenz.

[12] È proprio questa la lettera di cui Popper mette in dubbio l'autenticità. Cfr. *supra*.

> non filosofare senza conoscenze e mediante l'immaginazione, e di non scambiare per pensieri le stesse vacue fantasie del delirio. (*Briefe*, Bd. 1, 31 [154])

In realtà fu già a partire dai primissimi anni dell'Ottocento che l'interesse di Hegel si spostò in maniera sempre più decisa verso il calcolo infinitesimale. Ne è testimonianza la *Dissertatio philosophica de orbitis planetarum* del 1801, in cui Hegel, nel discutere la fisica newtoniana, finisce per criticare l'uso che Newton fa del calcolo infinitesimale[13] nei *Principia* (secondo il metodo delle prime e ultime ragioni), arrivando ad affrontare temi come il problema della composizione del continuo, il metodo degli indivisibili e gli sviluppi in serie di funzioni. Fondamentale per la riflessione hegeliana sul calcolo è l'opera *Fede e Sapere* del 1802, dove, sulla base della reinterpretazione e rivalutazione di un passaggio dell'*Epistola XII* di Spinoza, Hegel giunge per la prima volta a distinguere tra vera infinità da un lato e infinità astratta (ed empirica) dall'altra. Questa distinzione tra vera e cattiva infinità viene ripresa da Hegel anche nella sezione *Rapporto Semplice* della *Logica di Jena* (1804-1805), dove – tra le altre cose – possiamo trovare importanti riflessioni sul concetto di grandezza, di funzione e di infinitesimo.

I temi trattati nella *Logica di Jena* e ancor prima in *Fede e Sapere* vengono approfonditi nell'ampia nota[14] intitolata *Der Begriff des mathematischen Unendlichen*[15] (*Il concetto dell'infinito matematico*) all'interno del primo volume della *Scienza della logi-*

---

[13] In realtà nei *Principia* Newton non ricorre al calcolo infinitesimale vero e proprio, ma a quella che si potrebbe definire una sorta di 'geometria infinitesimale'. Cfr. Boyer 1949, 198: «the *Principia* is written in the old synthetic geometric manner».

[14] Giuspoli-Castegnaro-Livieri 2009, XCIX: «L'importanza attribuita da Hegel all''infinito quantitativo' è difficilmente sottovalutabile, già ad una prima considerazione esteriore: la sottosezione dedicata a questo tema, una delle nove in cui è articolata la sezione Quantità, costituisce oltre il 50% dell'estensione di questa sezione».

[15] Cfr. *WdL I*, 153-178.

ca pubblicato nel 1812.[16] Queste pagine sono testimonianza dell'estensione degli studi storico-matematici di Hegel che spazia da alcune considerazioni sul metodo di esaustione e su quello degli indivisibili ai precursori del calcolo come Fermat e Barrow fino ad arrivare ovviamente a Newton (l'attenzione di Hegel è rivolta soprattutto al concetto di 'grandezza evanescente', di 'momento' e al metodo dei 'limiti') e a Leibniz. Ma all'interno delle riflessioni di Hegel trovano spazio anche altri autori – come i già citati Landen, L'Huilier e soprattutto Eulero (con il suo metodo degli infinitesimi considerati come zeri) – e temi – come il metodo dei limiti (proposto, tra gli altri, da d'Alembert, che tuttavia non viene qui mai nominato), quello della funzione derivata (elaborato da Lagrange) e quello delle serie infinite (nei confronti delle quali Hegel si dimostra sempre particolarmente critico).

L'importanza che Hegel attribuiva al tema del calcolo infinitesimale è provata anche dal fatto che, nella riedizione del primo libro della *Scienza della logica* del 1831 – pubblicata a Stoccarda presso l'editore Cotta nel 1832 – oltre ad apportare alcune modifiche alla sezione dedicata alla *Quantità*[17] e alla nota appena citata,[18] aggiunse altre due note dedicate all'infinito matematico. Nella seconda, intitolata *Gli scopi del calcolo infinitesimale dedotti dalla sua applicazione* (*Der Zweck des Differentialkalkulus aus seiner Anwendung abgeleitet*), Hegel prende in considerazione più nello specifico i vari procedimenti di calcolo, dedicando particolare attenzione ai metodi degli infinitesimi e degli indivisibili di Keplero e soprattutto di Cavalieri. Proprio Cavalieri sarà grande protagonista anche all'interno della terza nota, intitolata

[16] Il riferimento è qui alla *Dottrina dell'essere* della *Scienza della logica*. La pubblicazione della *Dottrina dell'essenza* risale al 1813, quella della *Dottrina del concetto* al 1816.

[17] Wahsner 2000, 272: «Die Ergänzungen, die Hegel der zweiten Auflage der Logik hinzufügte, betreffen an erster Stelle den Quantitätsabschnitt».

[18] La nota, che viene in parte modificata e ampliata nel contenuto, cambia anche titolo: *Die Begriffsbestimmtheit des mathematischen Unendlichen*, ovvero *La determinatezza concettuale dell'infinito matematico*.

Ancora altre forme connesse colla determinatezza qualitativa della grandezza (*Noch andere mit der qualitativen Größenbestimmtheit zusammenhängende Formen*).

Dal quadro appena tracciato emerge un'immagine molto diversa da quella proposta da Popper, da Russell e in generale da tutti quegli studiosi che periodicamente hanno messo in dubbio la competenza matematica di Hegel, arrivando a considerarlo un vero e proprio nemico della matematica. Non solo, infatti, Hegel aveva una adeguata conoscenza della matematica elementare e dell'algebra – che aveva studiato fin da giovanissimo e di cui era stato addirittura insegnante universitario a Jena –, ma era al corrente dei più recenti sviluppi della matematica della sua epoca, come dimostra l'ampia conoscenza che egli possedeva del calcolo infinitesimale e degli autori che ne avevano dato le prime esposizioni. Le numerose pagine dedicate nelle sue opere a questioni matematiche[19] attestano – oltre al fervido e sincero interesse che Hegel nutriva nei confronti di questa disciplina – «una notevole attenzione per la storia della matematica, congiunta con il riconoscimento della necessità di una documentazione diretta sulla teoria» (Moretto 1984, 54), come d'altronde emerge anche dalle parole dello stesso Hegel nella già citata lettera a Paulus.[20] Questa sensibilità verso la matematica e la sua storia risulta evidentemente incompatibile con l'immagine di Hegel 'anti-matematico' accettata tradizionalmente e ne esige – se non il rifiuto – quanto meno una revisione. Da questo punto di vista, l'aver mostrato che Hegel nutriva un serio interesse per la matematica e poteva contare su una solida preparazione in questo campo rappresenta solo un primo passo verso quella che potremmo definire una sorta

---

[19] Basti ricordare a questo proposito, oltre a quelli già citati, i passaggi della *Fenomenologia*, della *Propedeutica filosofica*, dell'*Enciclopedia* e soprattutto della *Scienza della logica* in cui Hegel affronta i temi del 'conoscere analitico', del 'conoscere sintetico', della 'definizione', della 'classificazione', del 'teorema', senza dimenticare lo spazio dedicato, in varie opere, alla filosofia della natura e in particolare alla meccanica.

[20] Cfr. *supra*.

di ‘redenzione matematica’ del filosofo. Il grosso del lavoro in questo senso starà infatti nel dimostrare che i durissimi attacchi rivolti da Hegel alla matematica e al suo modo di procedere in opere come la *Fenomenologia* e la stessa *Scienza della logica* – seppur innegabili – non devono essere considerati come significativi *tout court* del suo atteggiamento verso la matematica, ma raccontano solo *un* aspetto di un rapporto – quello tra Hegel e la matematica appunto – decisamente più complesso.

Prima di passare a esaminare se anche Marx, come Hegel, potesse contare su una solida preparazione matematica, vale la pena, come accennato nell’introduzione, spendere ancora qualche parola sulla *Scienza della logica*, opera alla quale farò da d’ora in poi principalmente riferimento per illustrare la posizione di Hegel sul calcolo. Perché concentrarsi solo sulle pagine della *Scienza della logica* se, come abbiamo appena visto, Hegel affronta questo tema anche in altri testi, come ad esempio la *Dissertatio* e *Fede e Sapere*? Al di là del fatto che lo spazio dedicato al calcolo all’interno di quest’opera è di gran lunga superiore a tutte le altre, il motivo principale per considerare esclusivamente la *Scienza della logica* nel confrontare le posizioni di Marx e di Hegel su questo punto è che proprio da queste pagine (e non da altre) Marx trasse spunto per elaborare il proprio pensiero sul tema. Al di là delle evidenze testuali e di contenuto, che cercheremo di mettere in luce nel terzo capitolo, ci basti per il momento considerare la lettera inviata da Marx a Engels verso il 16 gennaio 1858 – circa quattro, cinque giorni dopo aver confidato all’amico il suo rinnovato interesse per l’algebra –[21] in cui Marx scrive di aver riletto, per puro caso, la *Logica* di Hegel:

> Quanto al metodo del lavoro mi ha reso un grandissimo servizio il fatto che *by mere accident* – Freiligrath[22] trovò alcuni volumi di Hegel appar-

---

[21] Cfr. *infra*.

[22] Ferdinand Freiligrath (1810-1876) è stato un poeta tedesco. Dopo aver conosciuto Marx in Belgio nel 1845, Freiligrath lavorò nel 1848 per la *Neue Rheinische Zeitung* di cui Marx era all’epoca direttore.

> tenenti a Bakunin[23] e me li mandò in dono – mi ero riveduto la *Logica* di Hegel. (*MEW* 29, 260 [vol. 3, 155])

Ora, sebbene da ciò non si possa in alcun modo concludere l'esistenza di una qualche relazione causale tra gli studi algebrici di Marx e la rilettura della *Scienza della logica*, è anche vero che questa coincidenza – come la definisce Alcouffe –[24] non va trascurata. L'interesse che in quel momento Marx dimostrava per la matematica e la concomitante rilettura della *Scienza della logica* potrebbero in effetti averlo spinto a considerare con particolare attenzione le pagine hegeliane dedicate al calcolo, che, come abbiamo visto, proprio all'interno di quest'opera occupano uno spazio considerevole.[25] Questa ipotesi sembra trovare conferma nel progressivo spostarsi degli interessi matematici di Marx – che sino a quel momento si erano limitati all'algebra e alla matematica elementare – verso il calcolo infinitesimale, a cui Marx cominciò a dedicarsi seriamente proprio verso i primi anni Sessanta dell'Ottocento. Una spiegazione che risulta tanto più plausibile, quanto più è difficile trovare un altro motivo capace di spiegare in modo altrettanto convincente questa svolta così improvvisa e inaspettata dei suoi studi.[26]

Sebbene Marx nella lettera precedentemente citata parli semplicemente di *Logica*, senza specificare, come del resto anche in altre circostanze, a quale versione dell'opera di Hegel intendesse

---

[23] Michail Aleksandrovič Bakunin (1814-1876) è stato un anarchico, filosofo e rivoluzionario russo, considerato uno dei fondatori dell'anarchismo moderno.

[24] Cfr. Alcouffe 1985, 22.

[25] Che in quel preciso momento Marx fosse particolarmente sensibile alle riflessioni di Hegel contenute nella *Scienza della logica* è confermato anche dalla lettura dei *Lineamenti fondamentali della critica dell'economia politica* (*Grundrisse der Kritik der Politischen Ökonomie*) – manoscritti composti da Marx proprio durante quegli anni (1857-1858) – dove l'influenza delle pagine hegeliane risulta particolarmente evidente. Cfr. a questo proposito Uchida 1988.

[26] Yanovskaja 1983, X: «Given the full texts of all Marx's mathematical manuscripts in the second part of our book, it still does not fully answer the question of what impelled Marx to proceed to the differential calculus from the study of algebra and commercial arithmetic».

alludere, abbiamo dato per scontato che egli stesse facendo riferimento alla *Scienza della logica* (la cosiddetta *Greater Logic*)[27] e non – come sarebbe stato tuttavia possibile – alla prima parte dell'*Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio* (la cosiddetta *Shorter/Lesser Logic*, pubblicata per la prima volta nel 1817). Come mai abbiamo escluso di principio questa possibilità, nonostante Marx, nel corso della sua carriera, – come fa opportunamente notare Carver –[28] fece ricorso a entrambe le opere hegeliane, prendendo spunto talvolta dall'una e talvolta dall'altra a seconda dei periodi e soprattutto dei temi trattati? Mentre per altre opere può essere difficile stabilire se Marx abbia fatto riferimento alla *Greater* o alla *Shorter Logic*, per quanto riguarda i *Manoscritti matematici* questo problema, di fatto, non si pone, dal momento che nell'*Enciclopedia* Hegel tocca solo marginalmente il tema del calcolo infinitesimale, con argomenti dai quali difficilmente Marx avrebbe potuto trarre particolare ispirazione. Un'ulteriore conferma in questo senso ci arriva inoltre dalla lettura dei *Lineamenti fondamentali della critica dell'economia politica* (i cosiddetti *Grundrisse*) – manoscritti alla cui stesura Marx stava lavorando proprio nel periodo a cui risale l'inizio dei suoi interessi matematici – in cui l'influenza della *Scienza della logica* emerge in modo piuttosto evidente.[29]

Ben più interessante (e allo stesso tempo difficile), nell'ottica di un confronto tra le posizioni di Marx e di Hegel sul calcolo infinitesimale, sarebbe capire quale delle due edizioni della *Scienza della logica* (o meglio, della *Dottrina dell'essere*, dato che Hegel non fece in tempo a rivedere la *Dottrina dell'essenza* e la *Dottrina del concetto*) Marx avesse per le mani. Un dettaglio che per il

---

[27] Prendo in prestito questa terminologia dagli studiosi hegeliani di lingua anglosassone. Cfr. Carver 1976.

[28] Cfr. Carver 1976, 59.

[29] Uchida 1988, 145: «There are two texts of Hegel's *Logic*: the so-called "*Major Logic*" (*Science of Logic*) and the "*Minor Logic*" (a section from the *Encyclopaedia of the philosophical sciences*). The *Logic* which Marx read whilst writing the *Grundrisse* is assumed to have been the "*Major Logic*"».

tema del calcolo differenziale ha – a differenza di altri casi – un certo peso, dal momento che, come detto in precedenza, proprio la sezione dedicata alla *Quantità* e in particolare le pagine sul calcolo conobbero nella versione del 1831 importanti modifiche rispetto a quella del 1812.[30] Una preziosa indicazione in questo senso si può trovare nelle cosiddette *Marx-Engels Werke* (*MEW*), in particolare nella sezione (inserita al termine di ogni volume) dedicata ai riferimenti bibliografici alle opere di terzi citate da Marx e da Engels all'interno degli scritti di volta in volta considerati.[31] Da un attento confronto tra i diversi testi marxiani, in cui viene menzionata la (*Scienza della*) *Logica* di Hegel – come ad esempio i già citati *Grundrisse*[32] e la *Sacra Famiglia*,[33] oltre ad alcuni volumi della corrispondenza Marx-Engels –,[34] risulta che il testo è stato consultato da Marx sempre nell'edizione del 1831, sebbene non nella versione originaria (ultimata da Hegel appunto nel 1831 e uscita postuma nel 1832 presso l'editore Cotta di Stoccarda), bensì in quella pubblicata da Leopold von Henning (1791-1866) tra il 1833 e il 1834 nell'ambito dell'edizione completa delle opere di Hegel curata dai suoi discepoli più fedeli (o tutt'al più nella ristampa di quest'opera datata 1841). Questo non ci deve sorprendere più di tanto, se pensiamo che di fatto – come sottolineano Hogemann e Jaeschke –[35] fu solo nell'edizione di von Henning che la rivisitazione della *Dottrina dell'essere* ebbe una certa diffusione (tutt'oggi esistono pochissimi esemplari dell'edizione curata in prima persona da Hegel e fino a poco tempo fa non si sapeva nemmeno con certezza se questa edizione

[30] Giuspoli-Castegnaro-Livieri (2009, LV) parlano di «più di 100 pagine di integrazioni e chiarimenti relativi a problemi matematici».

[31] I curatori dei vari volumi delle *MEW* precisano peraltro che hanno cercato, laddove possibile, di specificare a quale edizione del testo Marx ed Engels avessero fatto riferimento.

[32] Cfr. *MEW* 42, 881.

[33] Cfr. *MEW* 2, 680.

[34] Cfr. *MEW* 29, 742.

[35] Cfr. Hogemann-Jaeschke 2008, X.

fosse realmente esistita). Il fatto che Marx non abbia consultato direttamente il testo hegeliano non rappresenta comunque in alcun modo un problema, dal momento che – a parte alcuni piccoli errori di decifrazione e di uniformità della punteggiatura e dell'ortografia – von Henning non ha apportato nessuna modifica sostanziale all'originale di Hegel.

§1.2 *Marx e la matematica*

Sebbene in misura decisamente minore rispetto al suo predecessore, anche Marx fu soggetto per molto tempo allo stesso pregiudizio 'anti-matematico' che colpì Hegel.[36] Furono in particolare alcuni grossolani errori di calcolo[37] compiuti da Marx all'interno del *Capitale* (soprattutto nel secondo e nel terzo volume, usciti postumi rispettivamente nel 1885 e nel 1894) – e messi in luce dalle ricerche di accademici del calibro di Ladislas van Bortkiewicz[38] (1868-1931), Francis Ysidro Edgeworth[39] (1845-1926) e Vilfredo Pareto[40] (1848-1923), risalenti alla fine dell'Ottocento e ai primissimi anni del Novecento – a convincere gli studiosi di una scarsa attitudine di Marx nei confronti della matematica.[41]

Questo mito conobbe una discreta fortuna tra gli studiosi del pensiero di Marx (anche all'interno della stessa tradizione marxista) per tutta la prima metà del Novecento,[42] fino alla compar-

---

[36] Matthews 2002, 4-5: «Marx's durable but undeserved reputation as a poor mathematician, one for whom even arithmetic was difficult».

[37] Per evitare di dilungarmi troppo su una questione che esula dagli obiettivi del presente volume, ho preferito non scendere nel dettaglio. Per un approfondimento, rimando ai testi citati nelle note successive.

[38] Cfr. van Bortkiewicz 1907.

[39] Cfr. Edgeworth 1925.

[40] Cfr. Pareto 1974.

[41] van Bortkiewicz 1907, 48: «Wie man sieht, steht Marx mit der elementaren Mathematik auf gespanntem Fuss».

[42] Smolinski 1973, 1192: «The belief that Marx was a mathematical ignoramus is well entrenched in Western literature».

sa, nel 1968, dell'edizione sovietica dei *Manoscritti matematici* (*Matematičeskie rukopisi*), in cui vennero raccolti tutti gli scritti marxiani dedicati a questioni matematiche, rimasti fino a quel momento inediti.[43] Se la posizione di chi sosteneva che Marx fosse, matematicamente parlando, un incompetente, poteva trovare effettivamente qualche legittimazione nel *Capitale* – che fino al 1968 rappresentò di fatto l'unica opera alla quale si poteva far riferimento per saggiare le doti matematiche del filosofo –[44] la pubblicazione integrale dei *Manoscritti matematici* aprì una nuova prospettiva sul rapporto tra Marx e la matematica. L'estensione degli studi contenuti – redatti principalmente tra gli anni Settanta e Ottanta dell'Ottocento – rendeva infatti difficile – se non addirittura impossibile – mettere in discussione la notevole cultura matematica di Marx, che spaziava dall'aritmetica alla geometria, passando per l'algebra fino ad arrivare all'analisi superiore. Per rendersene conto, è sufficiente dare una rapida occhiata ad alcuni dei temi trattati da Marx all'interno dei *Manoscritti*. Nella *Prefazione* all'edizione russa del 1968, Yanovskaja[45] specifica che i manoscritti matematici di Marx hanno carattere vario: in alcuni

---

[43] I manoscritti *Sul differenziale* e *Sul concetto di funzione differenziata* furono in realtà pubblicati in russo già nel 1933 – in occasione del cinquantesimo anniversario della morte di Marx – all'interno della rivista «Pod snamenem marxisma» (1933, n. 1, 15-73) e nella raccolta *Marxism jestjestwosnanije* (1933, 5-61). Cfr. Yanovskaja 1983, VII.

[44] Prima di questa data, le notizie sui *Manoscritti matematici* di Marx erano in effetti molto scarse: Engels ne aveva dato notizia già nella seconda edizione dell'*Antidühring* (1885), ma la loro pubblicazione – sebbene annunciata più volte come imminente a partire dal 1927 dall'Istituto Marx-Engels di Mosca (cfr. Guerraggio 1982, 139) – venne posticipata fino al 1968, quando uscì il testo bilingue (russo e tedesco) a cura di Yanovskaja e Kolman. Questa edizione, seppur parziale e non inserita nelle *MEW*, è, ancora oggi, quella di riferimento per i *Manoscritti matematici*, di cui purtroppo – nonostante gli auspici degli studiosi (cfr. Alcouffe-Wells 2009, 12) – manca ancora l'edizione critica (inserita nella *MEGA*). Tutte le traduzioni dei *Manoscritti matematici* in altre lingue (compresa, naturalmente, quella italiana) tengono conto dell'originale tedesco pubblicato nell'edizione russa.

[45] Cfr. Yanovskaja 1983, VII-VIII.

casi si ha a che fare con lavori e abbozzi autografi sul calcolo infinitesimale, sulla sua natura e sulla sua storia con relative aggiunte; in altri invece si tratta di semplici riassunti e recensioni dei libri consultati da Marx. Di conseguenza anche l'edizione di tali scritti risulta divisa in due parti. La prima – intitolata *Natura e storia del calcolo differenziale* – contiene, assieme ad alcune aggiunte e abbozzi, quattro lavori: oltre ai due saggi del 1881 precedentemente citati,[46] in cui Marx espone la propria concezione sul calcolo, troviamo anche i manoscritti intitolati *Il corso dello sviluppo storico* e *Sul teorema di Taylor, il teorema di MacLaurin e la teoria delle funzioni derivate di Lagrange*, dedicati alla storia del calcolo infinitesimale. La seconda parte – intitolata *Descrizione dei manoscritti matematici* – contiene invece un'esposizione di tutti i riassunti e di tutte le recensioni di contenuto matematico scritte da Marx, ordinate cronologicamente. Le prime, che risalgono agli anni anteriori al 1870 (circa 20 pagine), riguardano prevalentemente il calcolo algebrico e trigonometrico e questioni di aritmetica commerciale; le altre, redatte negli anni Settanta (circa 190 pagine) e Ottanta (circa 90 pagine), contengono invece note e appunti relativi ai manoscritti sopra ricordati sul calcolo differenziale.

Lo spessore degli studi matematici di Marx e il profondo interesse che egli nutriva nei confronti di questa disciplina trovano conferma anche in alcune lettere tratte dal carteggio con Engels, a partire dalle parole pronunciate da quest'ultimo il 17 marzo 1883 al cimitero londinese di Highgate in occasione dell'orazione funebre per la morte del caro amico:

> In ognuno dei campi in cui ha svolto le sue ricerche – e questi campi furono molti e nessuno fu toccato da lui in modo superficiale –, in ognuno di questi campi, compreso quello delle matematiche, egli ha fatto delle scoperte originali. (*MEW* 19, 336 [trad. it. in Ricci 2018, 21])

[46] Cfr. *supra*.

Marx ricevette una prima infarinatura in matematica presso il Ginnasio di Treviri, città della Renania dove nacque nel 1818. Al momento del diploma, conseguito nel 1835, la sua conoscenza matematica – come riporta Kennedy –[47] era considerata adeguata. Questo significa che, al termine del percorso scolastico, Marx possedeva – come previsto dai programmi liceali dell'epoca – dei rudimenti di aritmetica elementare, di algebra (comprese le equazioni quadratiche) e di geometria piana e solida, ma non è da escludere che egli avesse anche qualche conoscenza di trigonometria, algebra superiore, geometria analitica e persino calcolo infinitesimale. Ciononostante, Marx non proseguì i suoi studi matematici all'università e per i successivi ventitré anni non si hanno notizie di un serio interesse da parte di Marx per la matematica.[48] La svolta si ebbe verso la fine degli anni Cinquanta, quando Marx – che dal 1849 viveva a Londra – ricominciò a dedicarsi allo studio della matematica nell'ambito delle sue ricerche di economia politica, come egli stesso confida all'amico Engels nella lettera dell'11 gennaio 1858:

> Nella stesura dei *principles* economici mi trovo talmente imbrogliato con degli errori di calcolo che per *despair* mi sono di nuovo messo a studiare l'algebra. L'aritmetica mi è restata sempre ostica. Ma per la via traversa dell'algebra mi rimetto rapidamente a posto. (*MEW* 29, 256 [vol. 3, 152])

Almeno inizialmente, il rinnovato interesse di Marx per la matematica risulta quindi legato – per esplicita ammissione dello stesso filosofo – ai suoi lavori economici, che proprio in quegli anni – più o meno a partire dall'autunno del 1856 – avevano ricevuto un nuovo e decisivo impulso. Dall'agosto 1857 al giugno

---

[47] Cfr. Kennedy 1977, 305.

[48] I quaderni di appunti di algebra redatti attorno al 1846, a cui fa riferimento ad esempio Guerraggio (1982, 141), non rappresentano da questo punto di vista delle testimonianze particolarmente affidabili: «Some algebraic expositions had already appeared in notebooks, principally those dated 1846. It does not follow, however, that they could not have been done on loose notebook sheets at a much later time» (Yanovskaja 1983, IX).

1858, Marx lavorò incessantemente al primo abbozzo di quello che sarebbe stato il *Capitale* e fu proprio nell'ambito di queste ricerche che Marx pubblicò, nel 1859, il saggio *Per la critica dell'economia politica* (*Zur Kritik der Pölitischen Ökonomie*). Sempre a questo periodo risalgono inoltre i già citati *Grundrisse* (a cui Marx sembra far esplicito riferimento nella lettera sopra menzionata, parlando di *principles*). La connessione tra interessi economici e interessi matematici è provata inoltre da un quaderno di appunti risalente all'aprile-giugno del 1858 e contenente materiale preparatorio per il saggio *Per la critica dell'economia politica*, in cui si trovano alcuni disegni di geometria elementare e tutta una serie di calcoli con logaritmi e potenze. La preferenza accordata da Marx all'algebra rispetto all'aritmetica e alle sue applicazioni al calcolo commerciale risulta evidente dalla lettera precedentemente citata e trova conferma nelle parole di Engels, che all'interno del secondo volume del *Capitale* scrive:

> La preparazione per le stampe di questo capitolo ha presentato difficoltà non lievi. Marx, quanto era preparato come algebrista, altrettanto era poco pratico di calcolo numerico, segnatamente di calcolo commerciale, sebbene esista un grosso fascio di quaderni nei quali egli si è esercitato largamente in tutti i metodi di calcolo commerciale. Ma conoscenza dei singoli metodi di calcolo e esercizio nel calcolo pratico quotidiano del commerciante non sono affatto la stessa cosa, e così egli si impelagò nei *calcoli della rotazione*[49] a tal punto, che accanto a incompiutezze vennero fuori addirittura svariati errori e contraddizioni. (*MEW* 24, 286 [298-299]; corsivo mio)

Queste parole di Engels rappresentano forse la miglior risposta alle critiche formulate, tra gli altri, da Pareto, Edgeworth e

[49] L'espressione italiana 'calcoli della rotazione' traduce l'originale tedesco *Umschlagsberechnungen*. È importante sottolineare che qui il termine 'rotazione' non va inteso nella sua ben nota accezione meccanica, ma come sinonimo di 'circolazione delle merci' (di cui in effetti Marx si occupa all'interno del *Capitale*). A questo proposito ringrazio per i preziosi suggerimenti il Professor Antonio Moretto e il Dott. Giuseppe Figl, rispettivamente, per la segnalazione della problematicità della traduzione italiana, e per l'interpretazione proposta.

van Bortkiewicz, che, come detto, proprio sulla base degli errori di calcolo presenti nel *Capitale*, avevano messo in discussione l'intera preparazione matematica di Marx. Engels invece, pur ammettendo le difficoltà dell'amico nel calcolo numerico, non solo ne riconosce le doti di fine algebrista, ma distingue inoltre nettamente tra esercizio pratico – in cui risultava piuttosto carente – e conoscenza teorica dei singoli metodi di calcolo, che – per quanto riguarda Marx – non poteva certamente essere messa in dubbio.[50] Da questo punto di vista quindi Engels – le cui parole vanno solitamente prese con cautela, vista la sua vicinanza a Marx – dimostra un atteggiamento molto più consapevole e maturo di Pareto, Edgeworth e van Bortkiewicz, evitando di considerare le insicurezze di Marx nel calcolo come testimonianza di una più generale incompetenza matematica del filosofo.

Pian piano Marx iniziò a dedicarsi sempre più seriamente alla matematica, anche (ma non solo, naturalmente)[51] come diversivo nel tempo libero e durante i sempre più frequenti giorni di malattia, che caratterizzarono in modo particolare gli ultimi anni della sua vita. In una lettera a Engels del 23 novembre 1860, Marx afferma: «Scrivere articoli è per me quasi *out of question*. La sola occupazione con la quale posso conservare la necessaria *quietness of mind*, è la matematica» (*MEW* 30, 113 [vol. 3, 462]). Una tendenza che trova conferma anche in un'altra lettera di qualche anno più tardi, datata 20 maggio 1865 e sempre indirizzata a Engels: «Adesso io lavoro come un mulo [...]. Nelle ore d'intervallo, poiché non si può sempre scrivere, faccio *differential calculus* $\frac{dx}{dy}$. Non ho affatto pazienza d'altronde di leggere qualche altra cosa. Tutte le altre letture mi spingono di nuovo verso la scrivania» (*MEW* 31, 122 [vol. 4, 337]). Durante questo periodo, gli interessi di Marx si spostarono in modo sempre più deciso

---

[50] Smolinski 1973, 1194: «His approach to it (although, as we shall presently see, not his technical skills) is one of a pure mathematician rather than of a social scientist».

[51] Kolman 1932, 349: «Sie widerlegt die sonst verbreitete Meinung, als ob Marx sich mit der Mathematik nur zur Zerstreuung befaßt hat».

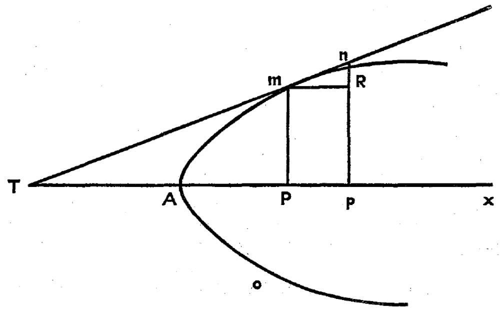
– come già accennato nel paragrafo precedente – verso il calcolo infinitesimale, come dimostra, oltre a quella appena citata, anche la lettera inviata a Engels il 6 giugno 1863, in cui Marx racconta con entusiasmo i suoi progressi all'amico:

> Nel tempo libero studio calcolo differenziale e integrale. A proposito! Di scritti su tale argomento ne ho a esuberanza e te ne manderò uno, se vorrai occupartene. Per i tuoi studi militari li ritengo quasi necessari. Inoltre (per quanto riguarda puramente la tecnica) è questa una parte della matematica molto più facile, ad esempio, dell'algebra superiore. All'infuori delle conoscenze comuni algebriche e trigonometriche non richiede necessariamente studi preliminari, se si eccettua la conoscenza generale delle sezioni coniche. (*MEW* 30, 362 [vol. 4, 189])

L'impegno con il quale all'epoca Marx si stava applicando allo studio del calcolo è testimoniato dall'appendice a una lettera inviata a Engels verso la fine del 1865 e l'inizio del 1866, dopo avergli fatto visita a Manchester, in cui Marx – su richiesta dello stesso Engels – tenta di spiegare all'amico i principi fondamentali del calcolo differenziale. Per farlo Marx ricorre a un esempio illustrato (si tratta del celeberrimo schema del triangolo caratteristico, che venne impiegato nelle proprie dimostrazioni da molti matematici dell'epoca)[52] che permette di definire la derivata, geometricamente, come la pendenza (o, per essere precisi, il coefficiente angolare) della retta tangente alla curva nel punto *m* (o, se vogliamo, della retta secante ai punti *m* e *n*, con *m* e *n* infinitamente vicini). Per ragioni di spazio, riportiamo qui solo l'esordio della lettera (con il disegno utilizzato da Marx), che consigliamo però di leggere nella sua interezza:

> Una volta, durante il mio ultimo soggiorno a Manchester, mi hai chiesto di spiegarti il calcolo differenziale. Nel seguente esempio la questione ti si farà chiara. L'intero calcolo differenziale ha origine innanzitutto dal compito di tracciare la tangente per un punto qualsiasi di una curva qualsiasi. Te ne voglio dare un esempio. (*MEW* 31, 165 [trad. it. mia])

[52] Cfr. Moretto 1984, 273-274.



MEW 31, 165

Questa occorrenza meritava di essere segnalata perché rappresenta uno dei pochissimi casi – se non l'unico – in cui egli ricorre a esempi geometrici per illustrare i principi del calcolo. Ben presto Marx cominciò in effetti a trattare con diffidenza crescente questo genere di rappresentazioni – che probabilmente considerava troppo legate all'evidenza geometrica – e di conseguenza le sue argomentazioni si fecero sempre più astratte, come testimoniano i saggi *Sul differenziale* e *Sul concetto di funzione derivata*, dove Marx ricorre al solo linguaggio analitico.

Trovare una spiegazione a questa improvvisa svolta negli studi matematici di Marx – che da questioni di matematica elementare e di calcolo commerciale passò improvvisamente a occuparsi di calcolo infinitesimale – non è così semplice, anche se, come detto in precedenza, pare che proprio la lettura della *Scienza della logica* di Hegel abbia giocato un ruolo decisivo in questo senso.[53] Torneremo più avanti su questo punto, che, nell'ottica del nostro lavoro, merita un'analisi più approfondita. Per il momento ci limitiamo a segnalare che, a partire dagli anni Sessanta dell'Ottocento, l'interesse di Marx nei confronti della matematica si

[53] Ricci 2018, 23: «A cosa fu dovuto questo cambiamento di attitudine di Marx verso la matematica è difficile stabilire con certezza, ma appare più di una coincidenza il fatto che esso avvenne contemporaneamente alla riscoperta della dialettica hegeliana nella seconda metà degli anni 50».

svincolò progressivamente dalla sua possibile applicazione in economia (che comunque restò costantemente sullo sfondo).[54] Ne sono testimonianza, ad esempio, le annotazioni redatte da Marx nel 1869 dopo aver letto il classico corso di aritmetica commerciale di Friedrich Ernst Feller (1800-1858) e Carl Gustav Odermann (1815-1904) *Das ganze der kaufmännischen Arithmetik* (pubblicato a Lipsia nel 1854). Pur avendo consultato tale opera per fini esplicitamente economici (lo studio della circolazione del capitale e del ruolo delle cambiali nel commercio interstatale), Marx ne trae spunto per esaminare i vari procedimenti matematici di volta in volta impiegati, con l'obiettivo di capirne meglio la costruzione. Questo atteggiamento, che caratterizzerà anche i successivi studi di calcolo commerciale, dimostra come l'interesse di Marx si diriga sempre più manifestamente verso il terreno della matematica pura, come conferma anche Engels all'interno della *Prefazione* al secondo volume del *Capitale*:

> Dopo il 1870, subentrò una nuova pausa, causata principalmente dal cattivo stato di salute. Come di consueto, Marx occupò questo tempo con studi: agronomia, condizioni dell'agricoltura americana e particolarmente di quella russa, mercato monetario e banche, infine scienze naturali: geologia e fisiologia, e specialmente lavori di matematica pura formano il contenuto degli innumerevoli quaderni di estratti di questi tempi. (*MEW* 24, 11 [11])

Negli anni Settanta dell'Ottocento, i riferimenti agli studi matematici all'interno della corrispondenza marxiana diventano rarissimi. L'assenza di notizie su questo fronte – lungi dal segnalare un'interruzione nelle ricerche matematiche di Marx – si spiega – come fa opportunamente notare Alcouffe –[55] con il fatto che Engels (l'unico con il quale sino a quel momento Marx aveva condiviso i propri progressi matematici) si era trasferito proprio

[54] Guerraggio 1982, 143: «Gli studi matematici di Marx vertono dunque sull'algebra e sull'analisi, rivelando un particolare interesse per gli aspetti teorici e la verifica logica dei procedimenti, più che per l'aspetto computistico che pure in un certo senso era costretto a curare per le sue ricerche economiche».

[55] Cfr. Alcouffe 1985, 27-28.

in quel periodo a Londra (1871), vicino a Marx, rendendo così superfluo lo scambio epistolare tra i due (se non in occasione di qualche viaggio dell'uno o dell'altro). Da una delle poche lettere inviate a Engels in questi anni, datata 31 maggio 1873, emerge come Marx – i cui interessi, come detto poco sopra, si stavano indirizzando sempre più verso la matematica superiore – non avesse comunque abbandonato del tutto l'idea di applicare lo strumento matematico ai suoi studi di economia politica, anche se egli stesso sembra in qualche modo riconoscere la sostanziale infruttuosità delle sue ricerche in questo campo:

> Ho comunicato qui a Moore una faccenda, circa la quale mi sono tormentato a lungo *privatim*. Ma egli ritiene che la cosa sia insolubile, o per lo meno lo sia *pro tempore*, a causa dei fattori, numerosi e in gran parte ancora da ritrovare, che vi rientrano. La faccenda è questa: tu conosci le tabelle in cui sono rappresentati in linee a zig-zag ascendenti e discendenti i prezzi, i saggi di sconto ecc. nei loro movimenti durante l'anno, ecc. Ho provato diverse volte a calcolare questi *up and down* come curve irregolari, e credevo (credo tuttora che con un materiale sufficientemente elaborato sia possibile) di definire in base ad esse matematicamente le leggi principali delle crisi. Moore, come ti ho detto, ritiene che la cosa per ora non sia fattibile, e ho deciso di rinunciarvi *for the time being*. (*MEW* 33, 82 [vol. 6, 174])

Nonostante l'insuccesso del suo tentativo di determinare matematicamente le leggi che governavano le crisi finanziarie dell'epoca e più in generale di applicare la matematica alle sue ricerche di economia politica, Marx non rinunciò a dedicarsi allo studio del calcolo differenziale, che anzi, proprio negli ultimissimi anni della sua vita, si fece particolarmente intenso, come dimostrano – oltre alla corrispondenza con Engels – anche i già citati lavori *Sul differenziale* e *Sul concetto di funzione derivata* (che, come detto, risalgono proprio al 1881). Questo dimostra – se ancora ce ne fosse bisogno – che l'interesse di Marx per la matematica si fece, con il passare del tempo, sempre più indipendente dalle sue possibili applicazioni in campo economico, assumendo – come avremo modo di vedere – motivazioni di tutt'altra natura. Engels peraltro reagì con grandissimo entusiasmo ai manoscritti inviatigli da Marx, di cui lodò in modo particolare la chiarezza espositiva, come emerge da questa lettera del 18 agosto 1881:

> Ieri dunque finalmente mi sono fatto coraggio e ho studiato, anche senza l'ausilio di libri, i tuoi manoscritti di matematica; sono stato contento di vedere che non avevo bisogno dei libri. Ti faccio i miei complimenti. La faccenda è talmente chiara come la luce del sole, che non ci si può meravigliare abbastanza perché i matematici insistano con tanta ostinazione nel mistificarla. (*MEW* 35, 23 [vol. 6, 330]).

Dopo una breve allusione alla correttezza dell'intuizione di Hegel sul calcolo,[56] Engels conclude la lettera con un simpatico aneddoto che mostra quanta importanza i due attribuissero all'epoca al tema del calcolo differenziale:

> La cosa mi ha preso talmente che non solo mi si aggira nella testa tutto il giorno, ma nella notte passata ho anche dato, in sogno, a un tipo i miei bottoni da camicia per la differenziazione e costui se l'è svignata con i medesimi. (*MEW* 35, 25 [vol. 6, 332])

Sebbene Marx sia morto prima di poter precisare ulteriormente la propria posizione sul calcolo infinitesimale, la corrispondenza e il materiale a nostra disposizione sono sufficienti per dimostrare che anche Marx – esattamente come Hegel – poteva far affidamento su una conoscenza matematica senza dubbio notevole, come confermato d'altronde dall'estensione – non solo temporale, ma anche contenutistica – dei suoi studi in questo campo.

§1.3 *Il rapporto con la matematica*

Prima di proseguire con il nostro discorso, vale la pena tracciare un velocissimo bilancio di quanto detto finora. Nei primi due paragrafi, abbiamo cercato di mostrare come Hegel e Marx – lungi dall'essere, matematicamente, degli inetti, degli incompetenti, degli *innumerate*, come spesso sono stati descritti in pas-

---

[56] Cfr. *supra*.

sato – potessero contare su una solida preparazione matematica, frutto di studi approfonditi negli anni e condotti su alcuni dei testi originali più importanti della loro epoca.

Ora, se ciò è tutto sommato sufficiente per procedere a una rivalutazione matematica di Marx, per Hegel le cose si fanno un po' più complesse, dal momento che – come abbiamo accennato anche all'interno dell'introduzione e del primo paragrafo – «il riconoscimento della cultura matematica di Hegel viene solitamente accompagnato da un richiamo ad alcuni passi della *Fenomenologia*, dell'*Enciclopedia* e in parte della *Logica*, in cui si ritiene venga espresso, con motivazioni perlomeno discutibili, un giudizio negativo sul valore della matematica attraverso il quale si porta un attacco generalizzato e generico contro il procedere scientifico» (Guerraggio 1982, 146-147). Insomma, oltre a non disporre – come Marx – di un'adeguata conoscenza matematica, Hegel avrebbe per di più manifestato in diverse occasioni un atteggiamento ostile, addirittura di pregiudizio nei confronti di questa disciplina e del suo modo di procedere. Questa tesi – che ha ulteriormente ostacolato la riconsiderazione della filosofia della matematica hegeliana –[57] ha goduto di grandissima fortuna anche all'interno della tradizione marxista, che ha sempre cercato di sottolineare la radicale diversità dell'atteggiamento di Marx rispetto a quello di Hegel.[58]

All'interno di questo paragrafo cercheremo di mostrare che in realtà il giudizio dei due filosofi sulla matematica non è poi così discorde come si è a lungo creduto. Se da un lato, infatti, la posizione hegeliana non può essere semplicisticamente ridotta – come vedremo – alle severe critiche della *Fenomenologia* e del-

[57] Blunden 1984, 2: «Hegel's derisory attitude to mathematics has been reciprocated by the most important mathematicians».

[58] Matthews 2002, 12: «If Marx understood and, for the most part, endorsed Hegel's criticism, he shared none of the latter's obvious disdain for mathematics, a posture that, in the end, limited both Hegel's audience and his influence». Cfr. anche Smith 1983, 257: «Marx, on the other hand, never echoes Hegel's deprecatory attitude to mathematics».

la *Scienza della logica*;[59] dall'altro va sottolineato che il rapporto di Marx con questa disciplina – pur rispecchiando in gran parte l'immagine che la tradizione, in particolare quella marxista, ci ha restituito – si rivela leggermente diverso da quanto si è solitamente sostenuto. Ma procediamo con ordine.

Come tutti i miti che si rispettino, anche il mito dell'Hegel 'anti-matematico' nasconde un fondo di verità. Questa immagine trova effettivamente conferma – come detto – in diverse pagine degli scritti hegeliani, tra cui spiccano senza dubbio alcuni passaggi della *Prefazione* (*Vorrede*) alla *Fenomenologia*, dell'*Enciclopedia*, della *Logica di Jena* e della *Scienza della logica* in cui il filosofo si scaglia esplicitamente contro la matematica e i suoi metodi. Prenderemo qui in considerazione alcuni di questi passaggi, con l'obiettivo di dare un'idea della portata e dei toni della polemica hegeliana.

All'interno della *Prefazione* alla *Fenomenologia*, Hegel, riferendosi alla matematica, afferma che «la manchevolezza peculiare di tale conoscenza riguarda tanto la conoscenza medesima, quanto la sua materia in generale» (*PhG*, 32 [34]). Da queste parole si evince chiaramente come, secondo Hegel, i limiti della matematica riguardino sia l'oggetto, sia il metodo di questa disciplina. Rinunciando in partenza a qualsiasi pretesa di esaustività e riconoscendo fin da subito che in certi casi distinguere tra questi due piani risulta – come vedremo – veramente difficile, prendiamo innanzitutto in considerazione le critiche che Hegel rivolge alla 'materia' di cui si occupa la matematica.

Allineandosi alla tradizione di pensiero della sua epoca e di quelle precedenti,[60] anche Hegel considera la matematica scienza

---

[59] Guerraggio 1982, 167: «Le pagine sull'analisi infinitesimale hanno illustrato come sia priva di fondamento l'obiezione abitualmente rivoltagli di aver giudicato negativamente la scienza e di averla quindi conseguentemente relegata in una posizione del tutto marginale all'interno del suo sistema filosofico».

[60] Cantù 2003, X: «Pur nella varietà dei modi di rapportare il sapere matematico agli altri saperi e nei diversi criteri classificatori adottati, emerge un tratto comune alla concettualizzazione della matematica: essa è perlopiù de-

delle grandezze.[61] La grandezza matematica è per Hegel esemplificazione di ciò che egli chiama quanto (*quantum*), termine utilizzato per distinguere appunto la grandezza – intesa come quantità determinata o limitata – dalla cosiddetta quantità pura (*quantitas*), di cui sono esempi lo spazio, il tempo, la luce, la materia e l'io.[62] Il ricorso al latino è giustificato dal fatto che nella lingua tedesca questi due termini – originariamente distinti – erano diventati sinonimi, al punto da essere indicati entrambi, ambiguamente, con la stessa espressione: *Größe*.[63] La scelta linguistica di Hegel rispecchia la volontà di marcare la differenza originaria tra questi due concetti. Il quanto si distingue infatti dalla quantità pura per il fatto di avere un limite:[64] «il quanto […] è anzitutto la quantità con una determinatezza o limite (*Grenze*) in generale» (*WdL III*, 193 [216]).[65] Come detto, il quanto è esemplificato proprio dalla grandezza matematica,[66] «che la matematica suole definire […] come ciò che può essere aumentato o diminuito» (*Enz. C*, 135

---

finita come scienza delle grandezze o è posta in relazione con il concetto di grandezza. Si potrebbe dire che nonostante tutte le differenze tra i vari autori, le rispettive filosofie e le concezioni epistemologiche, la matematica sia in qualche modo considerata "tradizionalmente" come Scienza delle grandezze».

[61] *PhG*, 33 [35]: «Ciò che la matematica considera è soltanto la grandezza».

[62] Cfr. *WdL III*, 178 [200]; gli esempi proposti mostrano come per Hegel la quantità pura sia ancora un concetto estremamente generale. Scrive Moni (*ibidem*, n. 1): «Che lo spazio, il tempo, la materia, la luce e l'Io possano venir dati come esempi della quantità pura, ciò mostra che in sé la quantità pura non è nessuna di queste cose; altrimenti in quanto fosse p. es. lo spazio, non sarebbe il tempo etc.».

[63] *WdL III*, 174 [197]: «Coll'espressione di grandezza (*Größe*) s'intende il quanto (*Quantum*), come negli esempi addotti, non la quantità (*Quantität*); per cui, per avere un termine che esprimesse questo concetto, si è dovuto far ricorso ad una lingua non germanica». Val la pena sottolineare che questa distinzione è presente anche in Kant. Cfr. Moretto 1999.

[64] *JS II*, 28 [30]: «[Il quanto è] un rapporto dell'unità alla molteplicità, che è limitato».

[65] *WdL III*, 177 [199]: «La quantità pura non ha ancora un limite, ossia non è ancora quanto».

[66] *WdL III*, 175 [197]: «La definizione, che in matematica si dà della grandezza, riguarda anch'essa il quanto».

[285]).[67] Al di là della circolarità che inficia questa definizione, che «contiene di nuovo il termine definito» (*ibidem*),[68] è particolarmente interessante constatare che – agli occhi di Hegel – è la stessa definizione matematica di grandezza a «implicare che la determinazione della grandezza sia posta come mutevole e indifferente (*gleichgültig*) in modo che, nonostante un suo mutamento, un suo aumento in estensione o intensità, la cosa, per es. una casa, un rosso, non cessa di essere casa, rosso» (*Enz. C*, 135-136 [285-286]). Questo significa – in altre parole – che il limite posto dal quanto è un limite indifferente, come Hegel afferma esplicitamente nella *Logica di Jena*: «Il limite del quanto è qualcosa che non tocca per nulla la cosa, e che, dove viene determinato, può venire altrettanto indifferentemente ristretto o esteso» (*JS II*, 17 [21]).[69] Sempre nella *Logica di Jena*, Hegel scrive:

> La determinatezza del quanto non è una <determinatezza> posta mediante la cosa stessa, ovvero non è una <determinatezza> tale da essere nella cosa stessa; nella misura in cui la determinatezza della cosa stessa viene espressa solo come una <determinatezza> esteriore (äusserlich),

[67] Cfr. anche *WdL III*, 175 [197]. Che all'epoca la grandezza matematica fosse comunemente concepita in questo modo è testimoniato dalla definizione che si trova nell'*Encyclopedie* di Diderot e d'Alembert (1751-1765, XLVIII-LI): «On appelle quantité ou grandeur tout ce qui peut être augmenté ou diminué».

[68] *WdL III*, 175 [197]: «Si ha qui una differenza della grandezza in generale da sé stessa, cosicché la grandezza sarebbe quello di cui si può mutar la grandezza. La definizione si dà perciò a vedere come inetta (*ungeschickt*), essendovi adoprata quella determinazione stessa, che si tratta di definire».

[69] *WdL III*, 174 [196]: «Nel qualcosa il limite, come qualità, è essenzialmente la sua determinatezza. Ma quando intendiamo per limite il limite quantitativo, e che per es. un campo muta questo suo limite, allora quello rimane un campo così prima come poi. Quando all'incontro vien mutato il suo limite qualitativo, questo che si muta è la sua determinatezza, per la quale esso è campo, e il campo diventa prato, bosco ecc. – Un rosso, che sia più intenso o più debole, è sempre rosso; ma se cambiasse la sua qualità, cesserebbe di esser rosso, e diventerebbe azzurro ecc. La determinazione della grandezza come quanto, tale, quale ci si è mostrata di sopra, in modo cioè che si abbia come base un essere permanente, il quale è indifferente di fronte alla determinatezza che si ha, si riscontra in qualunque esempio si prenda».

> <il quanto> è soltanto il segno della determinatezza della cosa stessa, la quale può essere designata altrettanto bene attraverso questo quanto come anche mediante un altro. (*JS II*, 17 [20])

Come fa giustamente notare Moretto,[70] questa ‘esteriorità del quanto’ nei confronti della cosa implica che anche la differenza tra quanti le sia esteriore, dal momento che una differenza di grandezze è ancora una grandezza e possiede le stesse identiche caratteristiche delle due di partenza. Ecco perché Hegel afferma che «la differenza quantitativa […] è una limitazione che di fatto non è alcuna limitazione; poiché una <limitazione> assolutamente esteriore non è in ciò e per ciò di cui dev’essere limitazione» (*JS II*, 15 [19]). La differenza quantitativa è quindi «una <differenza> esteriore che non tocca per nulla l’essenza stessa» (*JS II*, 16 [19]) e pertanto non può esprimere «correttamente il modo in cui in generale la differenza è in rapporto all’assoluto, ossia è in sé» (*JS II*, 15-16 [19]), dal momento che «la comprensione della natura di una cosa determinata consiste solo in questo, che la sua determinatezza viene conosciuta come una determinatezza in se stessa, non come una <determinatezza> accidentale (*zufällige*) cioè quantitativa» (*JS II*, 17 [20]).[71] Eppure – ammette Hegel – «ogni opposizione è soltanto quantitativa, fu per qualche tempo una proposizione capitale della filosofia moderna» (*WdL III*, 227 [255]), come dimostrano ad esempio le riflessioni di Fichte (1762-1814)[72] e di Schelling (1775-1854).[73]

---

[70] Cfr. Moretto 1984, 146.

[71] Kolman-Yanovskaja 1983, 239: «According to Hegel mathematics is the science of quantity, i.e. of a determination of objects which does not describe them as such, in what makes them specifically different from other objects and from themselves at another stage in their development, but only from the side that is external and indifferent towards change».

[72] Cfr. *WdL III*, 227 [254-255].

[73] Inwood 2017, 239: «He criticizes Schelling for applying quantitative considerations to the Absolute, making its bifurcation into nature and spirit depend on the quantitative predominance of the objective over the subjective, or vice versa, and using the mathematical notion of a “power” (*Potenz*) for a stage of being or development».

Quale considerazione Hegel potesse avere della matematica in quanto scienza delle grandezze è presto detto. All'interno della *Prefazione* alla *Fenomenologia* infatti scrive:

> Fine o concetto della matematica è la grandezza. Ma questa è appunto la relazione inessenziale e aconcettuale (*unwesentliche, begrifflose Verhältniß*). Perciò qui il movimento del sapere procede in superficie, non tocca la cosa stessa, l'essenza o il concetto, e non è quindi per nulla un atto concettivo (*kein Begreifen*). (*PhG*, 33 [35])

Il concetto (*Begriff*), ciò che la cosa è in sé,[74] rimane quindi impenetrabile per la matematica, le è completamente estraneo e ciò ne compromette inevitabilmente il valore conoscitivo:

> L'evidenza di questo manchevole conoscere, della quale la matematica va superba facendosene un'arma anche contro la filosofia, si basa sulla povertà del fine e sulla deficienza del contenuto della matematica, ed è quindi così fatta, da suscitare disprezzo da parte della filosofia. (*PhG*, 33 [35])

Quando poi Hegel afferma che «la materia intorno alla quale la matematica garantisce il suo consolante tesoro di verità è lo spazio e l'Uno» (*PhG*, 33 [35]) risulta chiaro come egli nelle sue critiche stia facendo riferimento alle grandezze finite della geometria e dell'aritmetica. Proprio spazio e tempo (anche se non in quanto tale, ma nel suo trapasso nella determinazione negativa dell'Uno) sono infatti per Hegel oggetto, rispettivamente, della scienza sintetica della geometria e di quella analitica dell'aritmetica.[75]

Come Hegel sostiene nella *Prefazione* alla *Fenomenologia*, la matematica considera lo spazio come qualcosa di «ineffettuale (*unwirklich*)», come «un esserci nel quale il concetto iscrive le sue differenze come in un elemento morto e vuoto dove esse sono

---

[74] *WdL III*, 33 [31]: «Quello che è in sé e per sé è concetto saputo, e che il concetto come tale è quello che è in sé e per sé (*an und für sich seyende*)».

[75] Moretto 2004, 81: «Stando alle precisazioni di *Wissenschaft der Logik* del 1832, le fondamentali classi di grandezze considerate dalla matematica sono le grandezze spaziali e le grandezze numeriche».

altrettanto immote e prive di vita (*unbewegt und leblos*)» (*PhG*, 33 [35]), o – così nell'*Enciclopedia* del 1817 – come «una pura forma, cioè un'astrazione, più precisamente quella dell'esteriorità immediata» (*Enz. A*, 116 [122]). In uno spazio di questo tipo, «in un elemento così ineffettuale non può *esserci*[76] che un Vero ineffettuale, fatto di proposizioni rigide e morte; dopo ognuna di queste proposizioni si può far punto; la seguente ricomincia per conto proprio, senza che la prima accenni a muoversi verso l'altra e senza che a questo modo sorga una connessione necessaria (*ein nothwendiger Zusammenhang*) attraverso la natura della cosa stessa» (*PhG*, 33 [35]; corsivo mio).

Il tempo non è immediatamente, come si potrebbe immaginare, «l'oggetto dell'altra parte della matematica pura» (*PhG*, 34 [37]), dal momento che, a detta di Hegel, «il principio della grandezza, – differenza senza concetto, – e il principio dell'eguaglianza, – astratta unità non vitale, – non riescono a occuparsi di quella inquietudine della vita (*Unruhe des Lebens*) e distinzione assoluta, che è il tempo» (*ibidem*).[77] Per questo motivo, l'aritmetica si basa sulla considerazione che l'intelletto fa del tempo – ovvero del fluire del punto – trasformandolo in uno statico Uno: «il principio del tempo ottiene però questa capacità per il fatto che viene paralizzato e la sua negatività viene abbassata dall'intelletto a uno» (*Enz. A*, 120 [127]). Solo in questo modo è possibile sottoporre il tempo a trattazione matematica:

> questo morto uno, ora la più alta esteriorità del pensiero, è capace della combinazione esteriore, e queste combinazioni, le figure dell'aritmetica, sono di nuovo capaci della determinazione intellettuale secondo eguaglianza e diseguaglianza, dell'identificazione e della distinzione. Perciò

---

[76] Mi sono permesso di apportare qui una modifica alla traduzione di De Negri, che ha scelto di tradurre con l'italiano *capire* l'originale tedesco *gibt es*. Mi sembra che una traduzione più letterale come quella da me proposta riesca a restituire meglio il senso del passo hegeliano.

[77] Qui Hegel sta riprendendo, anche se in forma decisamente diversa, il ragionamento espresso da Kant nell'*Estetica trascendentale* della *Critica della Ragion Pura*. Cfr. Moretto 2004, 139.

> la scienza che ha l'uno come principio costituisce a geometria la scienza che sta contrapposta. (*Enz. A*, 120-121 [127])[78]

Una materia di questo tipo – sia essa lo spazio di cui si occupa la geometria, sia esso l'uno di cui si occupa l'aritmetica – non è altro che un «mortuum» che «non muove sé medesimo, non giunge alle differenze dell'essenza, non all'opposizione o ineguaglianza essenziale, e quindi neanche al passaggio dell'opposto nell'opposto (*Uebergange des Entgegengesetzten in das Entgegengesetzte*) e tanto meno al movimento qualitativo e immanente, all'automovimento (*Selbstbewegung*)» (*PhG*, 33 [35-36]). Come Hegel afferma all'interno della *Scienza della logica*, l'aritmetica (ma questa è un'osservazione che, alla luce di quanto detto, può essere estesa anche alla geometria e all'algebra e quindi all'intera matematica elementare o ordinaria)

> non ha un oggetto concreto che possieda in sé rapporti interni, celati sulle prime per il sapere, non dati cioè nell'immediata rappresentazione dell'oggetto, ma da mettersi in luce solo mediante lo sforzo del conoscere. Non solo l'aritmetica non contiene il concetto, epperò nemmeno il compito per il pensiero concettivo (*das begreiffende Denken*), ma ne è l'opposto. A cagione della indifferenza che quel che vien collegato ha per un collegamento cui manca la necessità, il pensiero si trova qui in un'attività, la quale è in pari tempo l'estrema esteriorazione del pensiero, che è l'assenza stessa del pensiero, e di collegar quello che non è capace di alcuna necessità. L'oggetto è il pensiero astratto dell'esteriorità stessa. (*WdL III*, 203-204 [230])

Ma se, nel contesto della matematica elementare, «tutti i collegamenti e tutte le differenze che si manifestano nel suo oggetto non risiedono in questo stesso», allora questi collegamenti e queste differenze non possono che essergli «imposti in maniera completamente estrinseca» (*ibidem*), al punto da poter affermare

[78] *PhG*, 34 [37]: «Quindi, soltanto come paralizzata (*paralysirt*), ossia come l'Uno, questa negatività diviene il secondo oggetto di un tale conoscere; esso, esteriore operare (*ein äusserliches Thun*), abbassa a materia l'automovimento, nel quale riesce ora ad avere un indifferente contenuto esterno e non vitale (*einen gleichgültigen, äusserlichen unlebendigen Inhalt*)».

che «nel conoscere matematico la considerazione è un operare che, per la cosa, vien da fuori (*ein für die Sache äusserliches Thun*)» (*PhG*, 32 [34]). È precisamente in questo punto che la critica al contenuto, alla ‘materia’, all’oggetto della matematica, si lega a quella del suo metodo, del suo modo di procedere e di operare. La polemica di Hegel si rivolge *in primis* al modo in cui vengono condotte le dimostrazioni geometriche,[79] come emerge ad esempio nella critica al teorema di Pitagora:

> Il movimento della dimostrazione matematica non appartiene all’oggetto, ma è un operare esteriore alla cosa. Ad esempio, la natura del triangolo rettangolo non si dispone essa stessa così, come si rappresenta nella costruzione necessaria a dimostrare quel teorema, esprimente il rapporto del triangolo medesimo: qui tutto il processo dal quale scaturisce il resultato non è che un mezzo della conoscenza. (*PhG*, 32 [33])

L’apparente necessità che sembra caratterizzare le dimostrazioni matematiche non è altro che un inganno, un tentativo – mal riuscito – di mascherare quell’arbitrarietà e quella contingenza che in realtà le contraddistinguono:[80]

> Per quel che riguarda la conoscenza, la necessità della costruzione, anzitutto, non viene intesa nei giusti termini. Essa necessità non scaturisce dal concetto del teorema, anzi viene imposta; e si deve ciecamente ubbidire alla prescrizione di tirare certe linee, mentre se ne potrebbero tirare infinite altre: tutto questo con una ignoranza pari soltanto alla fede che ciò andrà a buon fine per la condotta della dimostrazione. […] Così la dimostrazione percorre una via che si fa cominciare a un punto qua-

[79] Moretto 2022, 380: «Da Hegel viene messo in evidenza il fatto che lo svolgimento della dimostrazione matematica nell’uso delle nozioni coinvolte non corrisponde allo svolgimento del concetto, ad esempio di quello della pianta, che rimanendo sé stessa passa attraverso le fasi del germoglio, del fiore e del frutto».

[80] Non a caso la prima sezione della *Logica di Jena*, che contiene una durissima critica alla quantità, è intitolata da Hegel *Rapporto semplice* (*einfache Beziehung*). Il titolo fa evidentemente riferimento a una connessione che, pur sforzandosi di apparire necessaria, è in realtà in tutto e per tutto accidentale. Questa accidentalità scaturisce dalla povertà concettuale dei termini in questione, che rende ogni rapporto tra di essi un ‘semplice’ accostamento, non necessario.

> lunque, senza sapere in che rapporto stia con il resultato che deve venir fuori. Una tale dimostrazione assume nel suo corso certe determinazioni e certi rapporti e ne scarta altri, senza che si possa immediatamente rendere conto della necessità per cui ciò avviene; una finalità esteriore (*ein äusserer Zweck*) regge un tale movimento. (*PhG*, 32-33 [34-35])[81]

Le stesse critiche che qui, all'interno della *Prefazione* alla *Fenomenologia*, Hegel rivolge alle dimostrazioni geometriche, vengono riferite, in alcuni passi della *Scienza della logica*, al modo di procedere dell'aritmetica:

> A cagione del suo principio, che è l'uno, il numero è in generale una raccolta estrinseca, una figura assolutamente analitica, che non contiene alcun nesso interno. Il numero essendo così generato solo estrinsecamente, ogni calcolare è un produr numeri, un numerare o più determinatamente, un connumerare. Una diversità di questo procedere estrinseco, che fa sempre lo stesso, non può risiedere che nella differenza, fra loro, di quei numeri che s'hanno a numerare assieme. Una tal differenza deve prendersi essa stessa da qualche altra parte, e da una determinazione estrinseca.[82] (*WdL III*, 197 [221])

Pertanto, il calcolare «diventa una occupazione priva di pensiero, meccanica (*gedankenloses, mechanisches*)» in cui «lo sfor-

[81] Moretto 2022, 380: «In altri termini: alla fine si vede che la cosa sta così, ma non si capisce cosa ha motivato la scelta della dimostrazione. Alla base c'è una questione effettiva. Come fa il geometra a scegliere la via dimostrativa? Si procede per tentativi oppure c'è una *ars inveniendi*? In effetti non è detto che sia possibile avere un procedimento meccanico per la dimostrazione, né che esista un'unica dimostrazione; e tra diverse dimostrazioni la scelta viene sovente fatta con criteri di semplicità e di eleganza».

[82] Alla luce di queste affermazioni non stupisce che Hegel prenda le distanze da Kant, che nella *Critica della ragion pura* aveva considerato le proposizioni del tipo '7+5=12' come esempi di giudizi sintetici a priori. Cfr. *WdL III*, 199 [223]: «La somma di 5 e 7 significa l'unione inconcettuale (*die begrifflose Verbindung*) dei due numeri; quel contare in questa maniera inconcettuale cominciando da sette e andando fin che siano esauriti i cinque si può chiamare un comporre, un sintetizzare (*ein Zusammenfügen, ein Synthesiren*), precisamente come il contare cominciando dall'uno, – un sintetizzare, che però è interamente di natura analitica, in quanto che il nesso è affatto artificiale (*gemachter*), né vi è nulla, né nulla vi entra, che non si abbia dinanzi in guisa del tutto estrinseca». Su questo punto cfr. Moretto 2004, 127-128.

zo consiste soprattutto nel fissare ciò ch'è vuoto di concetto (*Begriffloses*), e nel combinarlo in maniera vuota di concetto» (*WdL III*, 207 [234]), come dimostra il fatto che «si son potute costruire macchine, che compiono nella maniera più perfetta le operazioni aritmetiche» (*WdL III*, 208 [235]). Per questo motivo, mettere il calcolo al centro del sistema educativo è per Hegel semplicemente deleterio e non avrebbe altro effetto se non quello di «vuotare e ottundere lo spirito» (*WdL III*, 208 [234-235]) sottoponendolo «alla tortura di perfezionarsi fino a diventare una macchina» (*WdL III*, 207 [235]). Altrettanto assurdo è naturalmente pensare di «togliere a prestito categorie matematiche affin di trarne determinazioni per il metodo o per il contenuto della scienza filosofica» (*WdL III*, 207 [233-234]), come invece molti pensatori della sua epoca e di quelle precedenti – ad esempio i Pitagorici – avevano suggerito.[83] Hegel si oppone con forza a questa possibilità, osservando che «sarebbe una fatica assai superflua e ingrata voler impiegare per l'espressione dei pensieri un tale medium recalcitrante ed inadeguato come sono le figure dello spazio e i numeri, e far loro violenza a questo scopo; il concetto determinato sarebbe sempre per loro un qualcosa di appiccicato esteriormente» (*Enz. A*, 121-122 [127]).[84]

Sebbene all'interno delle opere di Hegel (a partire dalla *Scienza della logica*), sia possibile rintracciare molti altri passi simili a quelli considerati fino a questo momento, crediamo che queste brevi citazioni siano sufficienti a far emergere la durezza e l'asprezza della polemica hegeliana e a mostrare le ragioni di chi ha sostenuto

[83] *WdL III*, 203 [229]: «Anche recentemente si usavano nella filosofia i numeri e le forme delle loro relazioni, come le potenze etc., affin di regolare in conseguenza di ciò i pensieri o di esprimerli con cotesto mezzo». Su questo punto, cfr. Verra 2007, 31-54.

[84] *Enz. A*, 122 [127]: «Nel caso di concetti più ricchi questi mezzi diventano del tutto insufficienti, poiché la loro composizione esteriore e l'accidentalità della connessione sono in generale inadeguate alla natura del concetto, e ciò rende del tutto equivoco quali dei molti rapporti, che sono possibili in figura e numeri di maggior complessità, devono essere mantenuti».

che Hegel – per utilizzare un eufemismo – «indulge a una certa dose di denigrazione della matematica» (Findlay 1972, 178).

Ma se le cose stanno effettivamente così, perché abbiamo definito apertamente un mito la posizione di tutti coloro che, nel corso dei decenni, hanno considerato Hegel un nemico della matematica? Rispondere a questa domanda è tutto sommato semplice: perché le critiche che abbiamo appena richiamato rappresentano solo una faccia della medaglia, una parte – seppur considerevole – delle riflessioni hegeliane sulla matematica.[85] L'errore è stato insomma quello di generalizzare – in modo del tutto indebito e al di là delle intenzioni dello stesso Hegel – affermazioni rivolte «non alla matematica in sé, intesa come corpo unico e monolitico, bensì ai limiti che caratterizzano alcune sue espressioni – quale ad esempio l'aritmetica – e che si ripresentano, come un 'ritornare a quella inetta infanzia', ogniqualvolta si rimane chiusi in un 'pervertito formalismo matematico', celando dietro ad un'esteriore correttezza sintattica la mancanza delle 'determinazioni di pensiero'» (Guerraggio 1982, 149). In effetti non è difficile rendersi conto che le considerazioni di Hegel, a ben vedere, si rivolgono a «una matematica estremamente povera, che limitava la sua operatività nella visuale permessa dalla sola definizione delle grandezze» (Moretto 1984, 147).

Ma oltre a questa matematica, «caratterizzata in senso statico e dogmatico come tipica scienza dell'intelletto» (Guerraggio 1982, 147),[86] esiste anche un altro tipo di matematica – quella dell'analisi superiore – che Hegel dimostra invece di apprezzare

---

[85] Moretto 2004, 51: «Questa critica non manca di fondamento per ciò che riguarda alcuni aspetti delle considerazioni hegeliane. Ha però il torto di essere solo una critica negativa, che ha solitamente evitato un'indagine del quadro complessivo del discorso hegeliano […], limitandosi a generalizzare a tutto il discorso hegeliano alcuni riscontri negativi. […] Ma, come è risaputo, le generalizzazioni degli enunciati singolari o particolari non sono sempre felici: il fatto di trovare un corvo bianco o alcuni corvi bianchi non basta a garantire che tutti i corvi siano bianchi».

[86] *Enz. A*, 121 [127]: «Poiché la matematica è la scienza delle determinazioni finite di grandezza, che devono permanere e valere nella loro finitezza, non trapassare, così essa è essenzialmente una scienza dell'intelletto».

particolarmente perché capace di cogliere alcuni concetti filosofici – *in primis* quello della vera infinità del quanto – meglio di quanto non sia stata in grado di fare la stessa filosofia.[87] La matematica – oltre a fornire esempi di cattiva infinità, intesa meramente come illimitatezza (come nel caso delle serie infinite) –[88] fornisce infatti anche esempi di vera infinità, come dimostrano le nozioni matematiche di insieme (e di luogo geometrico, esemplificato dall'esempio spinoziano dei due cerchi),[89] di rapporto di grandezze evanescenti, di funzione.[90] Tutti questi esempi sono capaci – secondo Hegel – di dissolvere l'opposizione tra l'uno e l'infinitamente molto, tra il finito e l'infinito, dando forma unitaria all'infinitamente molteplice e proprio questo «concetto di una pluralità compresa nell'unità […], in cui le determinatezze che fan parte della pluralità divengono momenti» (Moretto 1984, 312-313) è il modo corretto di intendere l'infinità secondo Hegel.

---

[87] *WdL III*, 237 [264-265]: «Dal punto di vista filosofico l'infinito matematico è però importante per questo, che, nel fatto, vi sta in fondo il concetto del vero infinito, e ch'esso sta molto al di sopra del cosiddetto infinito metafisico, in base al quale si muovono le obiezioni contro il primo».

[88] *WdL III*, 244 [272]: «Di che specie sia ora l'infinità della serie, è chiaro di per sé: è la cattiva infinità del progresso (*die schlechte Unendlichkeit des Progresses*). […] Al numero di volte, che è espresso nella serie, manca sempre qualcosa, cosicché per raggiungere la determinatezza richiesta si deve oltrepassare quello che è stato posto». Sulla critica hegeliana alle serie infinite, cfr. Moretto 1984, 110-115.

[89] *WdL III*, 248-249 [277]: «L'incommensurabilità (*die Incommensurabilität*), che sta nell'esempio di Spinoza, racchiude in generale in sé le funzioni delle linee curve, e conduce più precisamente a quell'infinito che la matematica ha introdotto in tali funzioni, e in generale nelle funzioni delle grandezze variabili, e che è il vero infinito matematico, l'infinito quantitativo (*das warhafte mathematische, quantitative Unendliche*), al quale pensava anche Spinoza». Su questo punto, cfr. Moretto 2004, 88-89.

[90] Moretto 1984, 203: «Sin dall'analisi del *Rapporto semplice* emerge la consapevolezza di Hegel che la matematica non può essere ristretta solo a schemi quantitativi, suggeriti dalla stessa definizione di grandezza. La matematica che prende in considerazione le funzioni (più in generale le relazioni) si pone ad un più alto livello: l'infinità del quanto non è più ridotta all'artificio intellettualistico dell'iterazione senza fine del finito».

Hegel dimostra insomma di apprezzare l'impostazione relazionale della matematica moderna, con la quale si supera il punto di vista semplicemente quantitativo,[91] legato alla definizione della grandezza e ai suoi limiti, al punto che nel calcolo infinitesimale – e più in generale nella matematica superiore – non si ha nemmeno più a che fare con dei veri e propri quanti:[92]

> L'analisi dell'infinito, ma particolarmente il calcolo differenziale e integrale, considera grandezze infinite, ossia tali che non hanno più il significato di grandezze finite o completamente determinate, ma sono grandezze scomparenti (*verschwindende Größen*), le quali hanno puramente il loro valore nella loro ultima relazione o al loro limite, cioè solo nelle relazioni. (*PhEnz*, 81 [trad. it. in Moretto 2004, 45])

Nel concetto matematico di relazione (*das Verhältnis*), la grandezza assume infatti un aspetto qualitativo,[93] che la rende – oltre a una grandezza specifica (*spezifische Größe*) – «una specificazione di grandezze, che sono al tempo stesso grandezze determinate l'una di fronte all'altra e hanno un rapporto qualitativo, o il cui quoziente è il loro rapporto e sta in relazione rispettivamente come qualitativo. Poiché qui le grandezze non solo sono tolte come finite, ma lo stesso loro esser-tolte è posto come la loro legge qualitativa, questo è la loro vera, attuale infinità (*wahre, gegenwärtige Unendlichkeit*)» (*PhEnz*, 65 [trad. it. in Moretto 2004, 46]). Come vedremo più nello specifico all'interno del terzo capitolo, questo togliersi del quanto avviene nella maniera più pura proprio nel rapporto differenziale $\frac{dy}{dx}$, dove «esso

---

[91] Moretto 1984, 145: «Da questi emerge, accanto all'inadeguatezza degli schemi puramente quantitativi, la potenza degli schemi relazionali e qualitativi, di cui fanno uso la matematica superiore e le scienze fisiche, chimiche e naturali nell'era moderna».

[92] *JS II*, 22 [24]: «È stato mostrato che il quanto come limite del molto è in sé indeterminato, e come questa determinazione esteriore, accidentale diviene nel calcolo differenziale una determinatezza della cosa stessa, mediante l'annientare della medesima come di un quanto».

[93] *JS II*, 22 [25]: «[I numeri] sono per sé puri quanti, ma nella loro relazione reciproca sono posti in modo qualitativo».

cessa in generale di essere un quanto ed è, per sé, uguale a zero. Esso possiede un significato positivo solo come determinazione di una relazione, in cui non è più un quanto, ma soltanto una determinazione in relazione ad un altro; questo è il più genuino concetto dell'infinito matematico» (*Logik 1810-11*, 225 [trad. it. mia]).[94] La matematica superiore rappresenta agli occhi di Hegel il superamento del tentativo dell'intelletto di far prevalere schemi puramente quantitativi, che – a differenza di quelli (anche) qualitativi – si dimostrano, come abbiamo detto, incapaci di cogliere e di comprendere ciò che è essenziale.

Va detto tuttavia che accanto a questi riscontri estremamente positivi, Hegel non manca di mettere in luce anche i limiti della matematica superiore. Pur riconoscendo che la matematica ha una giusta intuizione dell'infinito filosofico, egli precisa infatti che essa non è comunque in grado di trattare adeguatamente tale concetto, e che questo compito spetta alla filosofia:

> Altre determinazioni matematiche, come l'infinito, le sue relazioni, l'infinitamente piccolo, fattori, potenze ecc. hanno i loro veri concetti nella filosofia stessa; è maldestro volerle attingere e prendere a prestito dalla matematica, dove esse vengono assunte prive di concetto, anzi spesso prive di senso, e devono piuttosto attendere la loro correzione e il loro significato. (*Enz. A*, 122 [127])

Non è quindi sbagliato dire che in ultima istanza Hegel «classifica la scienza matematica secondo i tre livelli fondamentali con cui egli ritiene si attui necessariamente il percorso della filosofia: quello della sensibilità, quello dell'intelletto e quello della ragione» (Moretto 2004, 63). La matematica nei suoi esordi si colloca al piano della sensibilità, dato che, per giustificarsi, ha bisogno di ricorrere ancora all'intuizione sensibile, come dimostrano, ad esempio, il ricorso agli abachi in aritmetica e quello al movimento – per spiegare la congruenza tra le figure – in geometria[95]. Al livello suc-

[94] Per la traduzione del passo, ho fatto riferimento a quella proposta da Moretto in Moretto 2004, 47.

[95] Seppur in misura minima per quanto riguarda gli *Elementi* di Euclide.

cessivo – quello dell'intelletto – appartengono invece l'aritmetica, l'algebra ordinaria e la geometria classica greca, in una parola la matematica elementare. Questa matematica, che si ispira alle categorie dell'intelletto e che si avvale di schemi puramente quantitativi, viene fortemente criticata da Hegel, che – come abbiamo visto – non esita a metterne in luce l'insufficienza e la limitatezza. Ciononostante, anche la matematica – come tutte le altre scienze empiriche e deduttive, e anzi ancor più delle altre, visto il suo status di scienza dell'intelletto per eccellenza – gode di un campo d'indagine proprio, all'interno del quale essa può e deve procedere in piena autonomia, senza che la filosofia pretenda di intervenirvi.

Ben diverso è invece il giudizio che Hegel esprime nei confronti di quella matematica che si eleva dalla sfera quantitativa a una relazionale-qualitativa. È la 'matematica della ragione', che si contraddistingue per alcune intuizioni (infinito in atto, grandezze evanescenti) capaci di illustrare il concetto filosofico del vero infinito meglio di quanto sia riuscita a fare la stessa filosofia. Tuttavia, anche questa matematica non è in grado di andare oltre l'intuizione dell'infinito attuale, dimostrandosi incapace – per sua stessa natura – di darne un'adeguata rappresentazione. Questo è il compito della filosofia.

Da tutto ciò «risulta la complessità del rapporto hegeliano verso la matematica: non già un'ambivalenza di 'amore-odio', ma il rifiuto di una matematica aconcettuale e l'apprezzamento dell'aspetto concettivo che essa presenta in taluni suoi rami» (Moretto 1984, 12). Insomma, ciò che Hegel afferma sul calcolo infinitesimale e più in generale sulla matematica superiore non è inconciliabile con ciò che egli scrive invece a proposito delle dimostrazioni matematiche e dell'aritmetica, «ma, nella misura in cui rompe un concetto ristretto della matematica come scienza della quantità, dà luogo ad una contraddizione feconda che genera una posizione complessiva molto interessante» (Guerraggio 1982, 149).

Anche il rapporto tra Marx e la matematica è piuttosto complesso: forse non quanto quello di Hegel, ma sicuramente più di quello che gli studiosi hanno tradizionalmente sostenuto. Storicamente si è dato infatti per scontato che il giudizio di Marx sulla matematica fosse positivo e aproblematico, ma in realtà questo punto di vista è frutto di una banalizzazione o quanto meno di una semplificazione della posizione marxiana, che risulta invece, come vedremo, decisamente più articolata. Innanzitutto, va detto che in Marx manca una teorizzazione esplicita del ruolo della matematica come quella che invece troviamo in Hegel. I *Manoscritti matematici* rappresentano d'altronde una raccolta di appunti, di abbozzi e di recensioni su questioni specifiche e talvolta anche tecniche, dove non trovano spazio riflessioni di più ampio respiro sul significato della matematica. Tutto ciò che possiamo dire sul rapporto tra Marx e la matematica va quindi dedotto in parte dalle testimonianze di Engels e di altri suoi conoscenti (che però vanno trattate naturalmente con la dovuta cautela) e in parte da ciò che lo stesso Marx ha lasciato trapelare indirettamente dai suoi scritti. È peraltro interessante notare – a conferma del fatto che il giudizio marxiano sulla matematica sia tutt'altro che scontato – che uno dei rarissimi passaggi in cui Marx discute apertamente tale questione – una lettera al padre risalente al 10 novembre 1837 – riprende, sia nel lessico, sia nei contenuti, la *Prefazione* alla *Fenomenologia* di Hegel.[96] Per quanto importante, il significato di questa testimonianza non deve tuttavia essere sopravvalutato. Non dobbiamo dimenticare infatti che quando scrisse questa lettera, Marx

[96] *MEW* 40, 5: «Dabei war die unwissenschaftliche Form des mathematischen Dogmatismus, wo das Subjekt an der Sache umherläuft, hin und her räsoniert, ohne daß die Sache selbst als reich Entfaltendes, Lebendiges sich gestaltete, von vornherein Hindernis, das Wahre zu begreifen. Das Dreieck läßt den Mathematiker konstruieren und beweisen, es bleibt bloße Vorstellung im Räume, es entwickelt sich zu nichts Weiterem, man muß es neben anderes bringen, dann nimmt es andere Stellungen ein, und dieses verschieden an dasselbe Gebrachte gibt ihm verschiedene Verhältnisse und Wahrheiten. Dagegen im konkreten Ausdruck lebendiger Gedankenwelt, wie es das Recht, der Staat, die Natur, die ganze Philosophie ist, hier muß das Objekt selbst in seiner Entwicklung belauscht, willkürliche Einteilungen dürfen nicht hineingetragen, die Vernunft des Dinges selbst muß als in sich Widerstreitendes fortrollen und in sich seine Einheit finden».

era uno studente di soli diciannove anni, che ovviamente doveva ancora maturare il proprio pensiero su molti temi e spesso si limitava a rispecchiare acriticamente le posizioni assunte da Hegel. Non possiamo dunque sapere se Marx in effetti condividesse o meno le riflessioni di Hegel, anche perché quanto scritto al padre non trova né conferma né smentita nei suoi scritti successivi. Da questo punto di vista, il fatto che Marx più tardi si sia dedicato con grande zelo allo studio della matematica, non ha particolare importanza, dal momento che – come abbiamo sottolineato in precedenza riferendoci a Hegel – queste parole non vanno in ogni caso interpretate come una condanna definitiva nei confronti della matematica *tout court*, ma tutt'al più come rifiuto di un certo tipo di matematica, o – se vogliamo – di ingenuo matematismo.

Sebbene, come detto, i *Manoscritti matematici* non contengano di fatto elementi utili a ricostruire il rapporto tra Marx e la matematica, la loro pubblicazione fu comunque decisiva non solo perché aprì «uno stimolante dibattito sul significato di questo interesse marxiano», ma anche perché contribuì a mostrare che «l'attenzione di Marx verso la matematica non si era limitata a qualche episodio ma era stata presente per un lungo periodo, per intensificarsi e produrre i risultati più interessanti proprio quando le ricerche di economia politica raggiungevano la forma più compiuta e rigorosa» (Guerraggio 1982, 215). Questo fatto non è stato ritenuto una semplice coincidenza: gran parte degli studiosi del pensiero marxiano ha in effetti sostenuto che gli studi matematici di Marx fossero indissolubilmente legati ai suoi interessi economico-politici. Marx si sarebbe cioè occupato di matematica solo in vista di una possibile applicazione della stessa all'interno delle sue ricerche di economia-politica. I sostenitori di questa tesi hanno fatto leva in modo particolare sulla testimonianza di Paul Lafargue (1842-1911) – giornalista e critico letterario francese di chiara ispirazione socialista[97] e genero di Marx (aveva sposato

[97] Lafargue fu tra le altre cose membro della Prima Internazionale e promotore del partito operaio francese (1880). Curò, assieme alla moglie Laura,

la figlia Laura nel 1868, con Engels nel ruolo di testimone) – secondo cui il suocero avrebbe sostenuto che una scienza non può considerarsi realmente sviluppata finché non impiega la matematica.[98] Queste parole, per quanto provengano da una fonte molto vicina a Marx, sembrano tuttavia sopravvalutare il ruolo che quest'ultimo aveva attribuito alla matematica. Tralasciando il fatto che in Marx «non si trovano elaborazioni di carattere generale sull'adattabilità della matematica alle scienze sociali, sulla prudenza con la quale la si deve impiegare o sulle speranze che l'utilizzo dei suoi procedimenti deve alimentare» (Guerraggio 1982, 233),[99] vanno fatte alcune precisazioni anche per quanto riguarda il rapporto tra matematica ed economia politica.

Mettere in discussione l'esistenza di un legame tra gli studi matematici e quelli economici di Marx – come alcuni studiosi hanno tentato di fare –[100] risulta molto difficile: non solo Marx – come egli stesso ammette nella lettera inviata a Engels l'11 gennaio 1858 –[101] ricominciò a studiare matematica nell'ambito delle sue ricerche economiche, ma più in generale non escluse mai categoricamente la possibilità di applicare lo strumento matematico all'economia, anzi. Ne è conferma, oltre alla consultazione del

---

le traduzioni in francese dell'*Antidühring* di Engels e l'edizione spagnola del I volume del *Capitale* di Marx e in generale contribuì alla divulgazione delle loro opere. Fu autore nel 1880 di un celebre pamphlet satirico contro la società moderna intitolato *Il diritto alla pigrizia*, che fu apprezzato anche da Marx.

[98] La testimonianza di Lafargue si trova nella rivista «Neue Zeit», IX (1891), 10-17. Una traduzione inglese si trova invece in Marx 1994, 398: «He was of the opinion, that so long as a science does not get used to the use of mathematics, it can not be called a truly mature science».

[99] Alcouffe 1985, 41: «Les *MMM* ne contiennent pas explicitement d'examen des possibilités d'application des mathématiques dans les sciences sociales».

[100] Smolinski 1973, 1192: «The "inapplicability thesis" was advanced by a number of orthodox Marxist economists who claimed that, although he was an accomplished, creative mathematician, Marx held mathematical tools to be inapplicable to the study of economic phenomena on methodological ground. Economic relationships, the argument runs, are too complex to be studied by quantitative methods which barely scratch their surface and cannot penetrate their essence».

[101] Cfr. *supra*.

libro di aritmetica commerciale di Feller e Odermann, il manoscritto intitolato *Trattazione matematica del saggio di profitto e del saggio di plusvalore* (*Mehrwertsrate und Profitrate mathematisch behandelt*) del 1875 (pubblicato solo nel 2003),[102] a cui Engels fa riferimento nella *Prefazione* al terzo libro del *Capitale*:

> Subito all'inizio è esposto l'intero computo matematico del rapporto fra saggio di plusvalore e saggio di profitto (che costituisce il nostro capitolo 3). […] Per il capitolo 3 vi era tutta una serie di elaborazioni matematiche incomplete, ma anche un intero quaderno, quasi completo, scritto negli anni dopo il 1870, che espone mediante equazioni il rapporto tra saggio del plusvalore e saggio del profitto. Il mio amico Samuel Moore, che ha curato anche la maggior parte della traduzione inglese del primo Libro, si assunse l'elaborazione di questo quaderno in vece mia, lavoro per il quale, da vecchio matematico di Cambridge, era molto più adatto di me. Dal suo riassunto, e utilizzando saltuariamente il manoscritto base, io ho poi preparato il capitolo 3. (*MEW* 25, 11-12 [11-12])

Da questo punto di vista, la tesi di chi ha sostenuto che proprio l'influenza di Marx fu alla base del ritardo con cui nei Paesi sovietici si sviluppò un'economia di tipo matematico,[103] non trova alcuna conferma negli scritti marxiani,[104] dove la possibilità di applicare lo strumento matematico allo studio dell'economia politica – seppur non affermata esplicitamente – non viene di fatto mai smentita.[105]

---

[102] Interessante a questo proposito anche l'esistenza di un manoscritto intitolato *La teoria dello sviluppo del quoziente e del logaritmo sono applicabili ai problemi del calcolo della rendita del denaro* (*Die Theorie der Progressionen by Quotient und die der Logarithmen sind anwendbar auf Geldzinsprobleme*) citato da Guerraggio (1982, 220) all'interno del suo saggio e presente nell'edizione sovietica dei *Manoscritti matematici*. Cfr. *MR*, 372.

[103] Smolinski 1973, 1189: «According to a widely held view, it was Marx's influence that has delayed by decades the development of mathematical economics in the economic systems of the Soviet type, which, in turn, is said to adversely affect the efficiency with which they operate».

[104] Matthews 2002, 5: «The sense that mathematical methods are somehow inconsistent with Marxian economics has no doubt also limited interest in the archives».

[105] Smolinski 1973, 1201: «But not a single injunction against mathematical economics can be found in Marx's published or unpublished writings».

Tuttavia «sarebbe riduttivo ritenere che l'interesse di Marx per la matematica e in particolare per il calcolo differenziale fosse unicamente funzionale al suo lavoro di critica dell'economia politica» (Ponzio 2005, 14). Come abbiamo visto nel secondo paragrafo, infatti, a partire dagli anni Sessanta – quando cioè cominciò a dedicarsi allo studio del calcolo – l'interesse di Marx per la matematica si sganciò lentamente dalle sue ricerche economiche, rivelando una crescente curiosità per le questioni di matematica pura. A questo proposito è estremamente interessante notare che, pur non escludendo del tutto la possibilità di sfruttare gli strumenti offerti dalla matematica e dal calcolo infinitesimale all'interno delle sue indagini economiche – come dimostra la già citata lettera a Engels del 31 maggio 1873 –,[106] nelle sue opere – *in primis* il *Capitale* – Marx non ne fa quasi mai ricorso.[107] Una delle poche eccezioni in questo senso è rappresentata, come detto, dal manoscritto *Trattazione matematica del saggio di profitto e del saggio di plusvalore*, che tuttavia – come fa notare Smolinski –[108] non contiene nessuna traccia di equazioni differenziali o di qualsiasi altro metodo riconducibile alla matematica superiore. Come spiegare questo apparente paradosso? Perché Marx, pur lasciando intendere in diverse occasioni la possibilità di applicare la matema-

[106] Cfr. *supra*. Vale la pena citare a questo proposito anche alcune righe della lettera inviata da Marx a Engels l'8 gennaio 1868 (*MEW* 32, 11-12 [vol. 5, 132]) in cui Marx sembra riconoscere l'esistenza di un legame tra le strutture del calcolo differenziale e quelle dell'analisi economica: «che il salario è rappresentato per la prima volta come forma fenomenica irrazionale di un rapporto celantesi dietro ad essa, e che questo fatto è illustrato con precisione in entrambe le forme del salario: salario a tempo e salario a cottimo. (Mi è stato di giovamento che nell'alta matematica si trovino abbastanza spesso simili formule)».

[107] Smolinski 1973, 1193: «And yet, despite his emphatically stated original intent, one finds surprisingly few actual applications of mathematical methods to economic or, for that matter, to any practical problems in Marx's mathematical manuscripts». Cfr. su questo punto, anche Alcouffe 1985, 35-36. Ponzio (2005, 14) sbaglia nell'affermare che «gli studi matematici e in particolare sul calcolo differenziale di Marx trovarono applicazione nelle sue analisi economiche».

[108] Cfr. Smolinski 1973, 1195.

tica allo studio dell'economia, poi di fatto non ne fa mai utilizzo? Nel corso dei decenni, i tentativi di rispondere a questa domanda si sono sprecati. Guerraggio[109] suggerisce ad esempio che una spiegazione a tale anomalia potrebbe risiedere nelle difficoltà da parte di Marx a impiegare strumenti di calcolo meno elementari di quelli algebrici, ma questa ipotesi è contraddetta dalle parole dello stesso filosofo, che nella lettera a Engels del 6 giugno 1863 precedentemente citata,[110] riconosce esplicitamente la maggior semplicità del calcolo rispetto all'algebra superiore. Burkhardt[111] ritiene invece che Marx abbia deciso di non ricorrere alla matematica nelle sue opere per paura che in questo modo potessero risultare incomprensibili ai più. Anche questa spiegazione tuttavia appare poco convincente, dal momento che l'applicazione degli strumenti matematici, e in particolare di quelli propri dell'analisi, non trova spazio nemmeno in quegli scritti che Marx aveva redatto a uso proprio o di Engels. Sicuramente più credibile è la teoria avanzata da Smolinski[112] e condivisa, in parte, anche da Alcouffe,[113] secondo cui gli strumenti matematici a disposizione di Marx – calcolo compreso –[114] non erano adatti, nella maggior parte dei casi, per procedere a una formalizzazione del suo discorso economico. Va tuttavia sottolineato – come peraltro fa notare lo stesso

[109] Cfr. Guerraggio 1982, 221.

[110] Cfr. *supra*.

[111] Cfr. Burkhardt 1968.

[112] Cfr. Smolinski 1973, 1199: «Some of the mathematical tools most suitable for Marx's approach to economics were not yet generally known. For example, Marx's long preoccupation with Quesnay's Tableau économique led him to a pioneering if crude analysis of interindustry flows. But at that time […] he was studying calculus. Matrix algebra would have been more relevant, but Arthur Cayley's discovery of that tool, in 1868, was not yet known except to a narrow circle of experts».

[113] Cfr. Alcouffe 1985, 36: «Naturellement, dans les années 1870, Marx ne pouvait guère trouver dans les mathématiques de l'époque les outils qui lui auraient permis, par exemple, de traiter les relationes valeur/prix».

[114] Ricordiamo a questo proposito che le conoscenze di Marx sul calcolo si arrestavano alle teorie di Lagrange, quindi a inizio Ottocento.

Alcouffe –[115] che in realtà le ricerche economiche di Marx vanno a toccare argomenti – come ad esempio gli schemi di riproduzione e la caduta tendenziale del saggio di profitto – che egli avrebbe potuto comodamente trattare con la matematica a sua disposizione e in particolare proprio con gli strumenti offerti dal calcolo differenziale, ma Marx sorprendentemente non ne fa uso.

Al di là di quale sia stato il motivo alla base della scelta di Marx, questa mancanza:

1. smentisce o quanto meno ridimensiona il significato della testimonianza di Lafargue.[116] Se Marx avesse effettivamente attribuito alla matematica un ruolo così decisivo nella costruzione della scienza, come si spiega il fatto che poi non l'abbia mai utilizzata nelle sue teorie economiche? Più verosimilmente, il ricorso alla matematica è una possibilità che Marx non esclude a priori, ma che evidentemente non riteneva una prerogativa essenziale per stabilire la scientificità di un determinato sapere;

2. mostra che l'interesse di Marx nei confronti della matematica e in modo particolare del calcolo infinitesimale non era legato esclusivamente alla possibile applicazione di questi strumenti all'interno delle sue indagini economiche,[117] rivelando in questo modo «la 'relativa autonomia' nella quale lo studio matematico viene condotto» (Guerraggio 1982, 219).[118] Non a caso l'attenzio-

---

[115] Cfr. Alcouffe 1985, 36-37.

[116] Come fa opportunamente notare Alcouffe (1985, 36), poco convincente risulta anche la testimonianza del 1909 di Maksim Kovaleski (1851-1916) secondo cui Marx si sarebbe dedicato allo studio del calcolo differenziale per potersi esprimere con cognizione di causa a proposito della scuola matematica di economia facente riferimento a William Stanley Jevons (1835-1882). Il nome di Jevons e il titolo della sua opera più celebre, *Theory of Political Economy*, non vengono in effetti mai citati da Marx.

[117] Guerraggio 1982, 222: «I pochi elementi che abbiamo, a proposito dell'applicazione concreta in economia degli studi matematici di Marx, non permettono certo di concludere che essi siano sempre stati condotti allo scopo di una loro utilizzazione in ambito economico».

[118] Alcouffe 1985, 40: «Finalement, il nous semble que Marx n'a pas été guidé dans ses travaux mathematiques seulement ou même principalement par le souci des applications en économie. La place qui doit être accordée aux

ne di Marx si rivolge, oltre che alle tecniche di differenziazione e di integrazione, anche agli aspetti fondazionali del calcolo e a tutta un'altra serie di questioni che rivelano chiaramente la natura matematico-filosofica del suo interesse per questo argomento.[119] Come sottolineato in precedenza, la lettura della *Scienza della logica* e le riflessioni hegeliane su questo argomento sembrano aver giocato un ruolo di primo piano in questo senso.

Insomma, se da una parte è vero che gli studi economici furono alla base dell'iniziale attenzione di Marx nei confronti della matematica, è anche vero, dall'altra, che il complesso delle sue ricerche – a partire da quelle dedicate al calcolo infinitesimale – mostra chiaramente l'impossibilità di ricondurre interamente il suo interesse a queste prime motivazioni. Naturalmente questo non significa affermare – come hanno fatto alcuni studiosi –[120] l'assoluta autonomia degli interessi matematici di Marx da quelli economici, dal momento che – come abbiamo notato – la possibilità di sfruttare la matematica nello studio dell'economia politica – pur non trovando effettiva applicazione nelle sue opere (soprattutto per quanto riguarda la matematica superiore) e pur non venendo mai esplicitamente ammessa –[121] rimane costantemente sullo sfondo delle indagini marxiane. Senza dimenticare peraltro che l'interesse di Marx per la matematica ha, per sua stessa ammissione, chiare origini economiche. Anche nel caso del rapporto Marx-matematica, come spesso accade, la verità sta quindi molto probabilmente nel mezzo: Marx si accostò sì allo studio di questa

---

préoccupations récréatives ou ludiques et philosophiques est, à notre sens, au moins aussi importante que celle du projet économique».

[119] Smith 1983, 256: «From 1863, his interest turned increasingly to the study of infinitesimal calculus, not just as a mathematical technique, but in relation to its philosophical basis».

[120] Cfr. Lombardo-Radice 1972.

[121] Guerraggio 1982, 233: «Non ricordiamo neppure di averlo mai colto a discutere se il formalismo matematico possa portare l'economia a risultati originali e nuovi o se esso si debba limitare a chiarire e semplificare il discorso economico».

disciplina nell'ambito delle sue ricerche di economia-politica, ma ben presto le questioni matematiche – in particolare quelle relative alla fondazione del calcolo – finirono per suscitare la curiosità intellettuale e filosofica di Marx, già stuzzicata dalla lettura delle riflessioni hegeliane su questo tema.

A un'attenta analisi il rapporto tra Marx e la matematica rivela dunque una complessità che per certi versi si avvicina molto a quella che contraddistingue il pensiero di Hegel. Pur non condividendo i toni polemici della *Fenomenologia* e della *Scienza della logica* e pur non esplicitando mai chiaramente – a differenza di Hegel – la sua posizione sul significato e sul ruolo della matematica, Marx dimostra infatti di condividere con quest'ultimo un serio interesse nei confronti dell'analisi superiore e del calcolo infinitesimale. È semmai la natura di tale interesse a distinguere in qualche modo i due pensatori. Mentre infatti Hegel si occupò del calcolo esclusivamente per motivi filosofici (la ricerca del vero concetto di infinito, ad esempio, ma non solo), al punto che «sarebbe fuorviante concedere spazio all'immagine di Hegel come matematico, che propone nuove tecniche al calcolo infinitesimale o alla matematica in genere» (Moretto 1984, 53), lo stesso non può dirsi invece per Marx. Pur riconoscendo anch'egli nel calcolo la presenza di diversi spunti di riflessione filosofica (a partire, come vedremo, dalla struttura intimamente dialettica del calcolo stesso),[122] l'obiettivo principale con cui Marx si accosta allo studio dell'analisi è al contrario proprio quello di elaborare un metodo matematico alternativo che sia in grado di ottenere la derivata senza incappare nelle difficoltà in cui si erano invece arenati i matematici della sua epoca. A differenza di Hegel, Marx aspira insomma a fondare rigorosamente il calcolo ed è precisamente questa pretesa a esporre la posizione marxiana a tutta una serie di critiche da cui quella hegeliana risulta invece immune. Va qui infatti registrato il sostanziale fallimento del tentativo di Marx, che non solo manca di originalità, rispecchiando sostan-

---

[122] Torneremo su questo punto anche successivamente. Cfr. *infra*.

zialmente, come vedremo meglio nel terzo capitolo, gli sforzi di Lagrange «di ricondurre il calcolo infinitesimale a concetti puramente algebrici, senza ricorrere ad un calcolo 'speciale'» (Moretto 1978, 208), ma si rivela per di più assolutamente inadeguato a risolvere i problemi fondativi del calcolo, a cui Cauchy aveva trovato una soluzione ben cinquanta anni prima, intraprendendo una strada completamente diversa da quella battuta da Marx (che tuttavia – va detto a sua parziale discolpa – pur lavorando al calcolo nella seconda metà dell'Ottocento non conosceva le teorie del matematico francese). Se dunque è lecito criticare Marx su questo punto, altrettanto non vale invece per Hegel, il quale non aveva mai espresso la volontà di giungere a una fondazione rigorosa del calcolo, ma ne aveva dato semplicemente una trattazione filosofica, che per molti versi risulta ancora oggi valida tenendo ovviamente presente – come metro di giudizio – lo stato storico dell'analisi a cui essa faceva riferimento. Da questo punto di vista, non è un caso che le parti più brillanti della riflessione marxiana sul calcolo siano quelle filosofiche, dove l'influenza di Hegel emerge in modo molto più evidente.

2. Il contesto storico: il calcolo nell'era moderna

All'interno del primo capitolo, cercando di chiarire che tipo di rapporto Hegel e Marx avessero intrattenuto con la matematica, ci siamo potuti render conto di come la loro attenzione fosse stata catturata in modo particolare dalla matematica superiore e più nello specifico dal calcolo infinitesimale. Ne è dimostrazione innanzitutto l'impegno con il quale i due si applicarono allo studio del calcolo, investendo tempo ed energie nella lettura di manuali divulgativi e opere di autori – come quelle di Newton, Leibniz, d'Alembert, Eulero e Lagrange – che si occupavano specificamente di questo argomento. L'importanza che Hegel e Marx attribuivano al calcolo spicca anche da un punto di vista meramente quantitativo, cioè – molto banalmente – dal numero di pagine che – tra quelle dedicate a questioni matematiche – i due avevano destinato a questo tema. A questo proposito, abbiamo già ricordato che una delle differenze principali tra la prima e la seconda edizione della *Scienza della logica* consisteva proprio nell'aggiunta di altre due note sul calcolo infinitesimale,[1] a conferma del significato che Hegel riconosceva a questo settore della matematica.[2] Lo stesso si può dire anche di Marx: gran parte del materiale raccolto nei *Manoscritti matematici* riguarda infatti proprio la natura e la storia del calcolo differenziale. E sempre al calcolo sono dedicati gli unici due manoscritti a cui Marx diede una forma più o meno definitiva: *Sul concetto di funzione deriva-*

[1] Hogemann-Jaeschke 2008, XVI: «Philosophisches Gewicht hat für ihn hingegen die Auseinandersetzung um die Grundlagen und die Anwendung der Differentialrechnung, der weitaus der größte Teil der Zusätze zur zweiten Ausgabe gilt».

[2] Wahsner 2000, 273: «Dies und die weitere Tatsache, daß diese Ergänzungen für Anmerkungen, als die sei erschienen, außergewöhnlich lang sind, läßt darauf schließen, daß Hegel in der hier behandelten Thematik einen tiefen Sinn vermutete, den er erfassen wollte».

ta e *Sul differenziale*. È a questo punto lecito chiedersi il perché di questo interesse. Per quale ragione Hegel e Marx, a un certo punto della loro carriera, decisero di dedicarsi allo studio di un argomento così tecnico e apparentemente così lontano dai loro interessi abituali come il calcolo?

Una prima risposta a questa domanda va ricercata, ancora una volta, nello *Zeitgeist* del periodo. Non dobbiamo dimenticare infatti che Hegel e Marx vissero «in un'epoca in cui da parte dei matematici si avvertiva acutamente l'esigenza di una fondazione rigorosa del calcolo infinitesimale» (Moretto 1984, 23). Il riconoscimento della correttezza dei risultati raggiunti attraverso i metodi infinitesimali elaborati da Newton e da Leibniz andava in effetti di pari passo con le perplessità legate alla fondazione di questi stessi metodi, che appariva tutt'altro che rigorosa. La questione verteva in particolare sulla problematica definizione (e rappresentazione) dell'infinitamente piccolo, che stava procurando non pochi grattacapi ai matematici dell'epoca. Basti pensare a questo proposito che nel 1784 l'Accademia delle Scienze di Berlino – che in quel momento si trovava sotto la direzione di Lagrange – aveva addirittura indetto un concorso con l'obiettivo di trovare una teoria capace di spiegare chiaramente che cosa si dovesse intendere per infinito matematico.[3]

Insomma, il calcolo era all'epoca al centro di un dibattito particolarmente vivace e per alcuni versi persino feroce, che vedeva coinvolti non solo i più grandi matematici del tempo, ma anche alcune personalità di spicco del mondo filosofico, a partire dai 'maestri' dei nostri due autori – Kant per Hegel e lo stesso Hegel per Marx – che nelle loro opere avevano discusso ampiamente la questione.[4] Da un certo punto di vista, era quindi naturale – se

---

[3] Il concorso venne vinto da L'Huilier con lo scritto – pubblicato nel 1787 – *Exposition élémentaire des principes des calculs supériors* in cui, ispirandosi in parte a Newton e in parte a d'Alembert, elabora uno specifico metodo dei 'limiti'.

[4] Kant si sofferma sul concetto dell'infinitesimale – di cui riconosce sostanzialmente la legittimità – all'interno di due scritti: *Versuch den Begriff der ne-*

non addirittura inevitabile – che Marx e Hegel nelle loro ricerche si confrontassero con questo tema.

In questo senso, quella di Hegel e di Marx è quindi solo «una delle tante voci che si levano nel grande dibattito scatenato da Newton-Leibniz, per trovare una sistemazione definitiva dei fondamenti dell'analisi» (Moretto 1978, 208). Non ci dobbiamo pertanto sorprendere se molte affermazioni di Hegel e di Marx sul calcolo, che a prima vista potevano sembrare interpretazioni personali particolarmente originali e del tutto indipendenti da quelle dei matematici dell'epoca, in realtà rispecchiano e riprendono – seppur con qualche inevitabile modifica – posizioni già sostenute da altri prima di loro.

D'altra parte il fatto che Hegel e Marx si inseriscano all'interno di un dibattito così sentito all'epoca, cercando di dare il proprio contributo alla risoluzione di una delle questioni considerate più urgenti dai matematici contemporanei,[5] fa di loro i simboli di una filosofia capace di intercettare le esigenze provenienti dal mondo matematico e di mettere a disposizione di quest'ultimo i propri strumenti e le proprie competenze. Si tratta di una sottolineatura particolarmente importante, perché proprio l'incapacità della filosofia di rispondere ai bisogni della matematica – incapacità che di frequente l'ha portata a interrogarsi su questioni ritenute ininfluenti dai matematici stessi – è stata spesso alla base di quell'incomprensione che ha a lungo ostacolato – e che in parte tutt'ora ostacola – il dialogo tra queste due discipline.[6]

---

gativen Größen in die Weltweisheit einzuführen (*Tentativo per introdurre nella filosofia il concetto delle quantità negative*) del 1762-1763 e *Metaphysische Anfangsgründe der Naturwissenschaft* (*Primi principi metafisici della scienza della natura*) del 1786. Per maggiori approfondimenti a proposito, cfr. Moretto 1999.

[5] Guerraggio 1982, 167: «Le sue critiche [di Hegel] alla matematica […] non si muovono affatto su un piano estraneo e divergente rispetto a una problematica moderna». Lo stesso discorso vale naturalmente anche per Marx.

[6] Bottazzini 2018, 4: «Così, il rapporto tra filosofia e matematica, più che asimmetrico, si presenta spesso come un monologo di sordi, con i filosofi attardati (nella generalità dei casi) a discutere tra loro quelle che essi pensano

Ora, sebbene lo *Zeitgeist* dell'epoca abbia sicuramente esercitato – come appena detto – un'influenza decisiva su Marx e Hegel, sarebbe sbagliato ridurre interamente a ciò il loro interesse verso il calcolo. E in effetti, leggendo le pagine che Hegel e Marx dedicano alla questione, non è difficile accorgersi che dietro c'è dell'altro. Affronteremo questo punto all'interno del terzo capitolo. In questo secondo capitolo invece ci soffermeremo a indagare un po' più da vicino proprio lo *Zeitgeist* matematico del tempo, cercando innanzitutto di comprendere – all'interno del primo paragrafo – quali fossero i termini della contesa nata attorno al calcolo infinitesimale, per arrivare poi nel secondo a passare velocemente in rassegna le principali fonti di Hegel e Marx sull'argomento, con l'obiettivo di capire quali siano i limiti temporali della conoscenza matematica sulla base della quale valutare le loro riflessioni e impostare un confronto tra i due.

§2.1 *Lo* status quaestionis*: il problema della fondazione del calcolo*

Come anticipato qui sopra, nelle prossime pagine cercheremo di tracciare – seppur a grandi linee – un quadro del contesto storico-matematico contemporaneo a Hegel e Marx, con l'obiettivo di comprendere quale fosse la questione al centro delle preoccupazioni dei matematici della loro epoca e, allo stesso tempo, cominciare in questo modo a prendere confidenza con alcuni di quei termini e di quei problemi che ritroveremo poi protagonisti anche nelle pagine dei due filosofi. Proprio perché il nostro intento è quello di contestualizzare le riflessioni hegeliane e marxiane sul calcolo all'interno del dibattito matematico-filosofico a loro contemporaneo e non quello di ripercorrere nel dettaglio la storia

---

siano le questioni filosoficamente rilevanti che hanno di fronte i matematici, e questi ultimi che (nella generalità dei casi) ignorano le discussioni dei filosofi e si disinteressano della eventuale rilevanza filosofica delle questioni che essi stessi affrontano».

e l'evoluzione del calcolo infinitesimale,[7] il nostro breve excursus storico:

1. prenderà le mosse dall'età moderna e in particolare da Newton e Leibniz, nonostante diversi studi abbiano mostrato che in realtà le origini remote della matematica dell'infinito possano essere fatte risalire già all'antica Grecia.[8]

2. non scenderà nei particolari delle posizioni dei singoli matematici che hanno contribuito all'evoluzione del dibattito sul calcolo, ma prenderà in considerazione solo quelli essenziali per la comprensione di alcuni aspetti delle considerazioni hegeliane e marxiane sul tema, rimandando ogni eventuale approfondimento – laddove necessario – al terzo capitolo del volume.

Perché partire proprio da Newton e Leibniz, se – come abbiamo sottolineato nel primo capitolo – Hegel e Marx si occuparono di calcolo infinitesimale più di un secolo dopo? Il motivo alla base di questa scelta risiede nel fatto che, almeno per quanto riguarda l'aspetto fondazionale del calcolo, i matematici del Settecento e dei primi decenni dell'Ottocento – perlomeno fino a Cauchy – rimasero sostanzialmente fermi all'impostazione di Newton e di Leibniz e conseguentemente ai problemi lasciati aperti da quest'ultimi.[9] Pertanto, se vogliamo renderci conto delle questioni che la matematica contemporanea a Hegel e a Marx si trovava ad affrontare e sulle quali gli stessi Hegel e Marx di conseguenza finirono per riflettere, il riferimento al pensiero di Newton e di Leibniz rimane un punto di partenza pressoché ineludibile.

Fatta questa premessa, passiamo quindi ora a esaminare un po' più da vicino le posizioni di Newton e Leibniz, cercando innanzi-

---

[7] Per farsi un'idea in merito, si veda la sezione bibliografica dedicata all'argomento in fondo al volume.

[8] A questo proposito cfr. – tra gli altri – Rufini 1961; Castelnuovo 1962; Boyer 1949.

[9] Moretto 1984, 293: «Per ciò che riguarda l'aspetto fondazionale, possiamo dire che in questo periodo assistiamo al diffondersi del pensiero di Leibniz e di Newton, poiché i matematici non riescono a staccarsi in modo sensibile da quell'impostazione».

tutto di capire quali furono le questioni che i due si trovarono a dover affrontare una volta introdotte nei rispettivi sistemi di calcolo grandezze infinitamente piccole. Per farlo è utile fare un salto avanti nel tempo fino al 1734, anno in cui il filosofo, teologo e vescovo anglicano George Berkeley (1685-1753) pubblicò un piccolo opuscolo dal titolo *The Analyst*. Pur non essendo un matematico di professione, Berkeley riuscì infatti a mettere in luce meglio di ogni altro le debolezze del calcolo, al punto che le sue parole possono essere considerate – senza voler esagerare – l'attacco più incisivo e più significativo sferrato alla struttura della nuova analisi durante quest'epoca. Come si può evincere dal sottotitolo dell'opera,[10] in realtà la critica al calcolo è – nelle intenzioni del suo autore – funzionale alla difesa della teologia cristiana. Scopo di Berkeley è quello di mostrare che anche teorie matematiche all'epoca comunemente accettate – come appunto il calcolo differenziale – contenevano diverse contraddizioni e fallacie logiche e che pertanto quei liberi pensatori – tra cui molti matematici – che deridevano la religione cristiana per la sua presunta incomprensibilità avrebbero dovuto rifiutare, per lo stesso motivo, anche l'analisi di Newton e di Leibniz.[11] Va detto tuttavia che la natura teologica delle riflessio-

---

[10] Cfr. Berkeley 1992, 156 [trad. it. in Boyer 1990, 494]: «L'Analista, o Discorso rivolto a un matematico infedele. Dove si esamina se l'oggetto, i principi e le inferenze del moderno analista siano concepiti più distintamente e dedotti in maniera più evidente dei misteri della religione e dei dogmi della fede». Il matematico infedele a cui fa qui riferimento Berkeley è molto probabilmente l'amico di Newton Edmond Halley (1656-1742). Il sottotitolo è seguito da una citazione dal Vangelo di Matteo: «Togli prima la trave dal tuo occhio; solo allora potrai vedere così chiaramente da togliere la pagliuzza dall'occhio di tuo fratello» (*ibidem*).

[11] Berkeley 1992, 221 [trad. it. in Guerraggio 1982, 249-250, n. 9]: «Ma con quale apparenza di ragione potrà un uomo presumere di asserire che i misteri non possono essere oggetto di fede, quando nello stesso tempo egli è disposto ad ammettere che misteri tanto oscuri possono essere oggetto di scienza? […] Io non discuto le vostre conclusioni, ma soltanto la vostra logica ed il vostro metodo. Come voi dimostrate? Quali sono gli oggetti di cui vi occupate e con quale chiarezza li concepite? Quali sono i principi del vostro procedere? Quanto sani essi sono e come li applicate? […] Chiedo se i matematici i quali

ni di Berkeley non inficia in alcun modo la validità della sua critica al calcolo,[12] che anzi risulta – come vedremo – non solo fondata, ma anche tutto sommato obiettiva. Com'era lecito aspettarsi, Berkeley, rivolgendosi nel *The Analyst* a un pubblico prevalentemente britannico, si scaglia innanzitutto contro il metodo di Newton. Questo non significa naturalmente che il *calculus differentialis* di Leibniz non venga attaccato,[13] ma le critiche ai metodi continentali occupano un ruolo secondario all'interno dell'opera e non a caso Berkeley vi si dedica solo dopo essersi convinto di aver screditato definitivamente la dottrina newtoniana.

Entriamo ora un po' più nel dettaglio delle critiche di Berkeley. A questo proposito, è importante sottolineare innanzitutto che Berkeley non intendeva assolutamente negare l'utilità dei nuovi metodi di calcolo, né tanto meno la validità dei risultati ottenuti attraverso di essi. La sua critica riguardava piuttosto i fondamenti della teoria e la totale mancanza di rigore che – a suo modo di vedere – contraddistingueva i nuovi metodi infinitesimali elaborati da Newton e da Leibniz.[14] Il problema era rappresentato nello specifico dal ricorso a procedure che non solo violavano apertamente le regole della matematica elementare – quindi dell'aritmetica, della geometria e dell'algebra – ma anche della logica tradizionale, introducendo nelle dimostrazioni delle assunzioni palesemente contraddittorie. Questo accadeva in particolare quando «per

---

sono tanto esigenti in cose di religione, siano rigorosamente scrupolosi nella propria scienza. Non è forse vero che essi si sottomettono all'autorità, che hanno tendenza a fidarsi, che crescono in cose inconcepibili? Non è forse vero che anch'essi hanno i loro misteri e, ciò che è peggio, che a questi aggiungono incongruenze e contraddizioni?».

[12] Jesseph 1992, 112: «That is to say, we can accept his critique of the calculus without sharing his concern with freethinking and atheism».

[13] Boyer 1949, 226: «Although Berkley's arguments were directed chiefly against the British method of fluxions, the method of differentials, as used on the Continent by L'Hospital and others, also came in for criticism».

[14] Jesseph 1992, 127: «Berkeley does not challenge the important results delivered by the method of fluxions or the calculus differentialis, but he is concerned with important foundational issues». Cfr. anche Boyer 1949, 225.

trovare le flussioni o per calcolare i rapporti tra differenziali, i matematici prima assumevano che venissero apportati incrementi alla variabile e poi eliminavano tali incrementi facendoli uguali a zero» (Boyer 1990, 494-495). In altre parole, Berkeley sta qui facendo riferimento alla problematicità legata all'uso di grandezze – come gli evanescenti di Newton e i differenziali di Leibniz – che venivano considerate, all'interno dello stesso procedimento, nulle e non nulle, uguali e diverse da 0.[15]

Per capire se la critica di Berkeley fosse effettivamente fondata, prendiamo in considerazione un esempio concreto e facciamo riferimento al modo in cui Newton – nell'*Introduzione* del *De quadratura curvarum* – calcola la flussione – ovvero la velocità di variazione –[16] di x^n. Piccola premessa: questo testo – la cui stesura risale al 1676, ma la cui pubblicazione è datata 1704 – rappresenta la terza esposizione newtoniana del calcolo, dopo quella del *De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas* del 1669 e quella del *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, redatto attorno al 1671. In queste due opere, Newton – pur introducendo alcune di quelle procedure che sarebbero divenute poi caratteristiche del calcolo infinitesimale – non era riuscito a dare una valida giustificazione dei suoi metodi, rivelandosi incapace in particolare di spiegare come mai per ottenere il risultato corretto i termini infinitamente piccoli precedentemente introdotti andassero in un secondo momento esclusi dal calcolo.[17] Resosi

---

[15] Moretto 1984, 36: «L'acuta critica di Berkeley si accentra soprattutto sull'ammissibilità di grandezze che non sono né nulle, né diverse da zero».

[16] Giusti 2007, 43: «A differenza di Leibniz che considera in un certo senso le grandezze come composte da parti infinitesime, Newton, più attento alle questioni di dinamica e in genere del moto, le considera variabili in funzione del tempo: grandezze "fluenti" *x, y*, ecc. che ad ogni istante avranno una determinata velocità o "flussione"». Cfr. anche Geymonat 2008, 128.

[17] A questo proposito è interessante notare che per quanto riguarda la questione fondazionale l'introduzione delle flussioni nel *Methodus* non rappresentò uno stravolgimento essenziale rispetto all'impostazione precedente, in cui Newton aveva fatto esplicitamente ricorso a quantità infinitamente piccole. Cfr. a questo proposito Boyer 1949, 195.

conto di queste difficoltà, nel *De quadratura* Newton cercò di rimediare, evitando qualsiasi riferimento all'infinitamente piccolo. Come? La soluzione proposta da Newton è la seguente: si consideri innanzitutto un incremento o della fluente x diverso da 0. Nel tempo in cui x – acquistando l'incremento o – diventa $x+o$, x^n diventa ovviamente $(x+o)^n$. Espandendo $(x+o)^n$ secondo il teorema del binomio elaborato dallo stesso Newton, si ha:

$$x^n + nox^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}o^2x^{n-2} + \cdots$$

Se ora da questa quantità sottraiamo x^n otteniamo l'incremento in x^n corrispondente all'incremento o in x. A questo punto, invece di completare la dimostrazione – come in precedenza – con l'ingiustificata eliminazione dei termini contenenti o, procediamo a calcolare il rapporto tra l'incremento in x e quello in x^n.[18] Dopo aver semplificato entrambi i membri per il termine comune o, otteniamo:

$$1\colon [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}ox^{n-2} + \cdots]$$

Per trovare la flussione, lasciamo che l'incremento o svanisca, diventi evanescente – seguendo la terminologia newtoniana –, ovvero 0. Il rapporto risultante $1{:}(nx^{n-1})$ è quello che noi oggi chiameremmo il limite del rapporto incrementale, ma che Newton chiamò invece l'ultima ragione di incrementi evanescenti, ricorrendo a una terminologia destinata a generare non pochi fraintendimenti.[19]

[18] Geymonat 2008, 129: «Moltiplicando la flussione di una variabile x per uno di questi intervallini di tempo – che Newton indica con o – si ottiene l'incremento effettivamente conseguito dalla x […]. Ma questo incremento non interessa in sé, nel suo valore assoluto, bensì nel suo rapporto con gli analoghi incrementi di altre variabili y, z…; ora, facendo il rapporto di questi incrementi […] si ottiene proprio il rapporto delle flussioni. Sono dunque esse, ed esse sole, l'oggetto fondamentale del nuovo calcolo».

[19] Boyer 1990, 456: «Qui Newton era effettivamente molto vicino al concetto di limite; la principale variazione riguardava l'uso del termine "svanire". Esi-

Nonostante questa dimostrazione, come detto, rappresenti il tentativo da parte di Newton di superare le difficoltà insite nel ricorso all'infinitamente piccolo, Berkeley riscontra proprio in questo punto un'evidente infrazione della legge di non contraddizione. All'inizio Newton suppone chiaramente che *o* sia una quantità positiva più grande di 0, perché altrimenti non gli sarebbe possibile calcolare gli incrementi e istituire un rapporto tra di essi; nella seconda parte del suo ragionamento, dopo aver semplificato il rapporto tra gli incrementi dividendo numeratore e denominatore per *o*, Newton fa invece ricorso a una nuova supposizione, contraddittoria rispetto a quella precedente, ovvero che *o* sia uguale a 0.[20] A rigore di logica – prosegue Berkeley – una volta introdotta questa seconda supposizione, tutte le conclusioni ricavate dalla prima dovrebbero essere negate, ma questo invece non succede.[21]

Nel paragrafo 17, Berkeley conclude la sua critica alla dimostrazione del *De quadratura*, affermando che il metodo impiegato da Newton non è – al contrario di quanto sostenuto da quest'ultimo – così diverso da altri metodi infinitesimali, come ad esempio quelli proposti da Leibniz e dai suoi seguaci. Sebbene infatti al termine del suo ragionamento Newton affermi esplicitamente di essere riuscito a «dimostrare che nel metodo delle flussioni non è necessario introdurre nella geometria figure infinitamente piccole (*figuras infinite parvas*)» (Newton 1962, 133), sembra veramente difficile distinguere gli incrementi evanescenti di cui parla Newton dal-

---

ste realmente un rapporto tra incrementi che sono svaniti? Newton non chiarì questo punto che continuò a turbare i matematici per tutto il XVIII secolo».

[20] Boyer 1949, 226: «Berkeley averred that Newton here disregarded the law of contradiction, assuming first that x has an increment, and then, in order to reach the result, allowing the increment to be zero, i.e., assuming that there was no increment. Berkeley maintained that the supposition that the increments vanish destroys the supposition that they were increments».

[21] Jesseph 1992, 138: «But, in fact, important consequences are retained – consequences that cannot be derived from the new assumption. Berkeley goes on at great length on this point in §§14-16, insisting that this Newtonian method of proof is an entirely sophistical exercise in the "shifting of the Hypothesis"».

le differenze infinitesime (i cosiddetti differenziali) impiegate da Leibniz. Berkeley sembra non aver dubbi a riguardo:

> Che cosa sono queste flussioni? Le velocità di incrementi evanescenti? E che cosa sono questi incrementi evanescenti? Essi non sono né quantità finite, né quantità infinitesime, e tuttavia non sono un nulla. Perché non chiamarle spiriti di quantità sparite (*ghosts of departed quantities*)? (Berkeley 1992, 199 [trad. it. in Boyer 1990, 495])

Questa ambiguità caratterizza di fatto anche le considerazioni infinitesimali contenute nei celeberrimi *Philosophiae naturalis principia mathematica* del 1687, dove il matematico inglese cercò di precisare ulteriormente il metodo delle prime e ultime ragioni. Nonostante Newton avesse deciso di adottare per questo scritto la forma delle dimostrazioni geometriche sintetiche, perché temeva – viste le problematicità che tediavano il metodo analitico – di compromettere l'accettazione delle sue teorie scientifiche, l'analisi gioca comunque un ruolo di primo piano all'interno dell'opera.[22] Ciò emerge soprattutto in alcuni lemmi del primo libro, dove Newton riprende chiaramente quanto sostenuto qualche anno prima nel *De Quadratura*. Prendiamo ad esempio il I lemma del Primo Libro:

> Le quantità, come anche i rapporti fra quantità, che costantemente tendono all'uguaglianza in un qualsiasi tempo finito, e prima della fine di quel tempo si accostano l'una all'altra più di una qualsiasi differenza data, divengono infine uguali. (Newton 1989, 141)

Pur ricordando in qualche modo il concetto moderno di limite, la definizione newtoniana – come sottolinea giustamente Boyer –[23] si rivela in realtà ancora fortemente legata all'intuizione geometrica e risulta pertanto fonte di ambiguità e di confusione. Non a caso in alcuni passaggi successivi lo stesso Newton afferma – tra le altre cose – che «l'ultima ragione fra l'arco, la corda e la

[22] A questo proposito Geymonat (2008, 132) – forse esagerando – ritiene che «quest'opera resta un capolavoro, non soltanto di meccanica, ma proprio di analisi».

[23] Cfr. Boyer 1949, 197.

tangente è, scambievolmente, una ragione di uguaglianza» (Newton 1989, 145) e che «l'ultima forma dei triangoli evanescenti è di similitudine» (Newton 1989, 146). Queste affermazioni mostrano chiaramente quanto Newton fosse ancora condizionato dal punto di vista infinitesimale del XVII secolo perché, se da una parte è vero che egli non parlò mai di ultimi archi, corde, tangenti, triangoli, ma solo ed esclusivamente di ultime ragioni e forme; è anche vero, dall'altra, che queste espressioni – pur alla base, potenzialmente, di corrette interpretazioni astratte – suggerivano in realtà ben altro se considerate dal punto di vista più attrattivo e intuitivo di quello analitico degli infinitesimali. Che tuttavia Newton fosse consapevole delle difficoltà insite in una visione ingenua degli infinitesimali risulta evidente quando egli precisa:

> Le ultime ragioni con cui quelle quantità si annullano non sono in realtà le ragioni delle ultime quantità, ma i limiti ai quali le ragioni delle quantità decrescenti si avvicinano sempre, illimitatamente, e ai quali si possono avvicinare per più di qualunque differenza data, e che, però, non possono mai superare, né toccare prima che le quantità siano diminuite all'infinito. (Newton 1989, 154)

Questa è con tutta probabilità la definizione più chiara che Newton diede della natura delle ultime ragioni, anche se a onor del vero nel secondo libro dei *Principia* l'idea di quantità infinitamente piccole torna a farsi sentire con una certa insistenza.[24] Fu proprio questa mancanza di chiarezza aritmetica che portò Berkeley e molti altri matematici del secolo successivo a mettere in discussione non solo la validità del metodo delle flussioni, ma anche ciò che Newton intendeva effettivamente dire con affermazioni come quelle riportate in precedenza.[25]

---

[24] Geymonat 2008, 132: «Le stesse ragioni di prudenza che, per evitare diffidenze in certi ambienti scientifici dell'epoca, indussero Newton a non far cenno nei Principia al metodo delle flussioni, lo persuasero pure a non servirsi in tale opera della geometria analitica cartesiana; non poterono evitare però che l'opera risultasse tutta pervasa da considerazioni di carattere infinitesimale».

[25] Moretto 1984, 270: «Si comprende perciò quale fosse il disagio di coloro che intesero queste pagine dei Principia come la proposta di quello che si

A differenza del suo collega, Leibniz non fece mai alcun mistero di ricorrere nei suoi metodi agli infinitesimali e pertanto la contraddittorietà delle procedure da lui impiegate emerge in modo ancora più evidente di quanto non accada in Newton.[26] Negli *Acta Eruditorum* del 1695, Leibniz ad esempio afferma esplicitamente che «sono uguali non solo due grandezze che hanno differenza nulla, ma anche due grandezze la cui differenza è infinitesima […], con una evidente assunzione di contraddizione poiché l'infinitesimo è inteso sia come nullo, sia come non nullo» (Moretto 1984, 154).[27] Leibniz non si fa scrupoli a utilizzare liberamente i differenziali nelle sue dimostrazioni, semplicemente perché questo modo di procedere non rappresentava ai suoi occhi alcun problema. Egli era infatti convinto che il calcolo, in quanto *modus operandi*, non avesse bisogno di alcuna dimostrazione o giustificazione dal punto di vista logico e filosofico: specificare le appropriate regole d'operazione e applicarle nel modo corretto erano per Leibniz condizioni sufficienti a ottenere risultati validi e razionali e questo era ciò che contava, al di là di quanto dubbio potesse essere il significato dei simboli che vi erano impiegati.[28] Fu solo l'insistenza dei suoi contemporanei a spingerlo a fornire ulteriori spiegazioni riguardo i concetti alla base del suo calcolo differenziale; spiegazioni che tuttavia non furono mai – come

---

chiamò il metodo dei limiti dell'analisi classica, metodo che avrebbe permesso la costruzione del Calcolo col solo ricorso alle grandezze ordinarie: essi furono infatti costretti a registrare l'"inquietante presenza" della grandezza evanescente nel metodo newtoniano dei limiti; e d'altra parte anche in altri luoghi delle opere di Newton si può riscontrare l'accoglimento delle grandezze infinitesimali».

[26] Jesseph 1992, 139: «By "making no manner of Scruple" to take dx and dy as positive magnitudes when we need to divide by them and as zero when we need to discard them, the Continental analysts embrace essentially the same inconsistency as Newton, except only that they are vastly less embarrassed by it».

[27] Leibniz 1962, Bd. 5, 322: «Caeterum aequalia esse puto, non tantum quorum differentia est omnino nulla, sed et quorum differentia est incomparabiliter parva».

[28] Moretto 1978, 208: «La razionalità del metodo e la bontà dei risultati costituiscono già per Leibniz una garanzia sufficiente per l'uso del differenziale (ed in modo analogo egli si comporta a proposito dei numeri complessi)».

afferma giustamente Boyer –[29] né lucide, né coerenti. Negli *Acta Eruditorum* del 1695 ad esempio – rispondendo alle pesanti critiche che gli erano state rivolte l'anno precedente dal matematico e filosofo olandese Bernard Nieuwentyt (1654-1718) –[30] Leibniz ribadisce semplicemente la sua posizione, affermando che sarebbe stato sciocco rifiutare i risultati ottenuti grazie al calcolo per quello che a suo modo di vedere non era nient'altro che un eccesso di scrupolosità. Non solo il suo metodo – proseguiva Leibniz – permetteva di conseguire gli stessi risultati che era possibile ottenere attraverso metodi considerati rigorosi come quello di esaustione,[31] ma rispetto a quest'ultimo risultava addirittura più veloce, più comprensibile e più facile da utilizzare.[32]

Sottolineare gli indubbi vantaggi pratici del calcolo non costituiva tuttavia una risposta soddisfacente alla domanda riguardante la natura dei differenziali impiegati all'interno dei nuovi metodi e le particolari procedure che li vedevano coinvolti; una domanda che Leibniz lasciò di fatto inevasa. In assenza di definizioni convincenti, Leibniz fece infatti spesso e volentieri ricorso ad analogie per chiarire la natura dei suoi differenziali infinitamente piccoli. A un certo punto si spinse addirittura a utilizzare il linguaggio figurato di Newton, definendo i differenziali come incrementi e decrementi momentanei di quantità.[33] In un'altra occasione, Leibniz definì il calcolo differenziale come studio del principiarsi e dello svanire

---

[29] Cfr. Boyer 1949, 209.

[30] Cfr. Boyer 1949, 213-214.

[31] Si tratta di un metodo elaborato dalla geometria greca (in particolare da Eudosso e da Euclide) per evitare il ricorso a grandezze infinite in atto e più in generale all'infinito. Per un approfondimento cfr. Moretto 1984, 30-32.

[32] Leibniz 1846, 322: «Et Archimedeo quidem processu res semper deductione ad absurdum confirmare potest. Quoniam tamen methodus directa brevior est ad intelligendum et utilior ad inveniendum, sufficit cognita semel reducendi via postea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, quae sane et ipsa secum fert demonstrationem suam secundum lemmata a me Febr. 1689 communicata».

[33] Leibniz 1962, Bd. 5, 222: «Hic dx significat elementum, id est incrementum vel decrementum (momentaneum) ipsius quantitatis x (continue) crescentis».

delle grandezze, in contrapposizione a quello delle grandezze già formate.[34] Non riuscendo a formulare definizioni rigorose, Leibniz moltiplicò le analogie. In un passo dei suoi numerosissimi scritti matematici affermò ad esempio che i differenziali di una quantità intrattenevano con la quantità stessa una relazione simile a quella che intercorreva tra un punto e la Terra o tra il raggio della Terra e quello dei cieli.[35] In un altro punto scrisse che se il diametro della Terra può dirsi infinito rispetto a quello di una palla tenuta in mano da un uomo, allora la distanza dalle stelle fisse è doppiamente infinita rispetto a quest'ultimo.[36] La stessa metafora venne proposta anche successivamente, sostituendo alla palla un granello di sabbia.

Sebbene gli argomenti di Leibniz avessero riscosso, almeno inizialmente, un certo successo, il mondo matematico non impiegò molto tempo ad accorgersi delle grandi difficoltà in cui si imbatteva il calcolo. Soprassedere sulle evidenti problematicità logiche e filosofiche della teoria – come avevano fatto in parte i fondatori del calcolo – non sembrò ben presto più possibile. Furono anzi in molti a ritenere che la correttezza dei risultati ottenuti attraverso i metodi infinitesimali non potesse essere considerata un motivo sufficiente a legittimare la totale mancanza di rigore che caratterizzava quegli stessi metodi. Berkeley fu tra i primi a dar voce a questa istanza di maggior rigore, mettendo in luce con grande chiarezza le contraddizioni nelle quali la matematica era caduta con l'introduzione delle grandezze infinitamente piccole. Le sue parole ebbero un effetto devastante:[37] basti pensare che

---

[34] Leibniz 1960, Bd. 6, 90: «Ou bien on entend par l'infiniment petit, l'état de l'évanouissement ou du commencement d'une grandeur, conçus à l'imitation des grandeurs déjà formées».

[35] Cfr. Leibniz 1689, 85.

[36] Leibniz 1962, Bd. 5, 350: «Et quand il y a plusieurs degrés d'infini ou infiniment petits, c'est comme le globe de la Terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes, et une boule que nous manions est encore un point en comparaison du semi-diamètre du globe de la Terre, de sorte que la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamètre de la boule».

[37] Jesseph 1992, 139: «Florian Cajori characterized them as "so many bombs thrown into the mathematical camp," and his judgement seems correct».

nei sette anni successivi alla pubblicazione del *The Analyst* comparvero circa una trentina di pamphlet e di articoli che si ponevano esplicitamente l'obiettivo di rimediare a questa situazione. Più in generale furono molti i matematici che tra il Settecento e l'Ottocento – in quello che è stato definito come «the period of indecision» (Boyer 1949, 224) per il calcolo – cercarono di trovare una sistemazione soddisfacente all'analisi. Tutti questi tentativi – compresi quelli di d'Alembert, Eulero e Lagrange, che probabilmente sono i più significativi tra quelli proposti – per un motivo o per l'altro non riuscirono tuttavia in quest'impresa: pur ottenendo infatti importanti risultati, che contribuirono indubbiamente al progredire dell'analisi, la fondazione rigorosa del calcolo rimase per lungo tempo un miraggio. Basti pensare a questo proposito che ancora nel 1833, il matematico inglese John Wright, commentando i *Principia* di Newton, scriveva:

> In fin dei conti, però, nemmeno lo stesso [Newton] né tanto meno uno dei suoi Commentatori, sebbene siano stati fatti importanti progressi in merito, è riuscito ad ovviare a questa obiezione. L'ingegnosa critica del vescovo Berkeley nel *The Analyst* rimane tuttora senza risposta. Qui egli chiama scherzosamente i risultati ottenuti dalla supposizione che le quantità, prima considerate finite e reali, siano svanite "Spiriti di Quantità Sparite", e bisogna ammettere che in quest'appellativo, oltre all'umorismo, c'è anche della ragione. Il fatto è che lo stesso Newton […] non era a conoscenza della vera natura del suo Metodo delle Prime e delle Ultime Ragioni. (Wright 1972, 2-3 [trad. it. mia])

Fu solo con Cauchy, a partire dal 1820 circa – quasi un secolo dopo la pubblicazione del *The Analyst* – che si cominciarono lentamente a intraprendere i primissimi passi di quel lungo cammino che solo verso la fine del secolo, attorno al 1880 – sotto l'influenza del già citato Weierstrass e di matematici come Richard Dedekind (1831-1916), Paul Du Boys-Reymond (1831-1899) e Georg Cantor (1845-1918) –, avrebbe portato a una sistemazione effettivamente rigorosa dell'analisi, capace di evitare il ricorso a grandezze infinitamente piccole. Ma quale fu la trovata che permise a Cauchy di superare quei problemi a cui i matematici che lo avevano preceduto non erano riusciti a dare una risposta? La grande novità introdotta dal matematico francese fu quella di assumere come concetto fondamentale del calcolo quello rigoroso di limite – su cui in verità già altri prima di lui avevano insistito, ma a cui Cauchy diede per primo una precisa formulazione svincolandolo dall'intuizione geometrica[38] e attribuendogli un significato esclusivamente aritmetico[39] – e di ricondurre a quest'ultimo quello di continuità, di derivata, di integrale e soprattutto di differenziale/infinitesimo,[40] che Cauchy ridusse di fatto a una semplice variabile dipendente.[41] In questo modo Cauchy operò un vero e proprio rovesciamento dell'impostazione newtoniana e leibniziana del calcolo, in cui il concetto fondamentale era rappresentato – come abbiamo avuto modo di sottolineare in precedenza – proprio dal differenziale o dall'infinitesimo-evanescente,[42] che – nonostante la consapevolezza della sua fa-

---

[38] Boyer 1949, 271: «We have seen the notion of a limit develop gradually out of the Greek method of exhaustion, until it was expressed by Newton in the *Principia*. It was more definitely invoked by Robins, d'Alembert and L'Huilier as the basic concept of the calculus, and as such was included by Lacroix in his textbooks. Throughout this long period however, the limit concept lacked precision of formulation».

[39] Cauchy 2009, 4 [trad. it. in Giusti 2007, 74]: «Allorché i valori assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà, quest'ultimo è chiamato limite di tutti gli altri».

[40] Giusti 2007, 72: «Secondo quella che era stata anche la visione di d'Alembert, il concetto di limite viene posto a base di tutte le costruzioni dell'analisi: per mezzo di esso Cauchy recupera la controversa nozione di infinitesimo, definisce la continuità di una funzione e studia la convergenza di serie e successioni». A proposito, cfr. anche Geymonat 2008, 172.

[41] Cauchy 2009, 4 [trad. it. in Giusti 2007, 74]: «Allorché i successivi valori numerici di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da diventare minori di un numero dato, questa variabile diviene ciò che si chiama un infinitesimo o una quantità infinitesima. Una variabile di questo tipo ha zero come limite».

[42] Cfr. Boyer 1949, 275: «Leibniz had considered differentials as the fundamental concepts, the differential quotient being defined in terms of these, but Cauchy reversed this relationship. Having defined the derivative in terms of

cilità operativa – nell'impianto del matematico francese veniva invece relegato a una posizione accessoria. Con la nozione di limite, l'analisi classica inaugurata da Cauchy sembrò insomma capace non solo di dare una formulazione rigorosa ai concetti fondamentali del calcolo,[43] ma soprattutto di evitare qualsiasi ricorso all'infinitamente piccolo in matematica e di superare così le insidie che si celavano nella sua problematica definizione.[44] Ciononostante e sebbene le lezioni e le opere di Cauchy avessero goduto fin da subito di grande popolarità, contribuendo a rendere ben presto il suo approccio quello generalmente adottato dalla matematica del tempo, va detto che in realtà la sua esposizione del calcolo risultava ancora traviata dalla presenza di alcune lacune logiche[45] e di alcune espressioni (come ad esempio «si avvicinano indefinitamente», «di tanto poco quanto si vorrà»)[46] che – richiamandosi piuttosto espressamente alle intuizioni di moto e di generazione delle quantità – necessitavano di ulteriori precisazioni. Come accennato poco sopra, ad avere l'ultima parola in questo senso fu Weierstrass, il quale riuscì a dare all'analisi quella base puramente formale e aritmetica, fondata sul solo concetto di numero,[47] sganciata da qualsiasi forma di intuizione geo-

---

limits, he then expressed the differential in terms of the derivative». Cfr. anche Moretto 1984, 38.

[43] Boyer 1949, 282: «Cauchy has for this reason commonly been regarded as the founder of the exact differential calculus in the modern sense».

[44] Giusti 2007, 74: «Con la sistemazione di Cauchy, le grandezze infinitesime vengono completamente espunte dai fondamenti del calcolo, e possono essere tranquillamente usate nelle applicazioni, potendo sempre essere ricondotte alla teoria dei limiti». Su questo punto, cfr. anche Moretto 1978, 38.

[45] Per un approfondimento, cfr. Boyer 1949, 284.

[46] Si vedano le citazioni del *Cours d'Analyse* di Cauchy riportate in nota precedentemente.

[47] Geymonat 2008, 186: «Fu approfondendo le dimostrazioni di Cauchy, che Weierstrass si convinse della impossibilità di dar loro uno sviluppo perfettamente rigoroso senza fondarle sopra qualcosa che le parole di Cauchy non esprimevano in forma esplicita; venne fuori, così, il concetto di numero reale come base aritmetica di tutto il grande edificio iniziato da Newton e Leibniz».

metrica e di riferimento all'infinitamente piccolo,[48] che di fatto conserva ancora oggi.[49]

§2.2 *Le fonti di Hegel e di Marx*

Per procedere a un confronto tra le posizioni di Hegel e di Marx sul calcolo infinitesimale, è fondamentale non solo contestualizzare storicamente le loro riflessioni, ma anche stabilire più nello specifico a quali autori e a quali testi i due hanno fatto riferimento per documentarsi su questo tema. La questione assume una certa importanza, se pensiamo che tra la pubblicazione della seconda edizione della *Scienza della logica* di Hegel, datata 1832, e la stesura dei manoscritti marxiani sul calcolo, che risalgono praticamente tutti agli anni successivi al 1880,[50] passano la bellezza di quasi cinquanta anni. Mezzo secolo in cui la matematica conobbe – come abbiamo appena visto – dei progressi straordinari, in particolare proprio nel campo del calcolo differenziale e integrale, dove, con Cauchy prima e Weierstrass poi, si cominciò a intraprendere quella strada del rigore che con fatica avrebbe portato alla fondazione definitiva dell'analisi moderna. In questo lasso di tempo, che, come detto, fu particolarmente vivace per la storia del calcolo, non solo vennero date alle stampe nuove pubblicazioni sull'argomento, ma cominciarono a circolare studi e

[48] Boyer 1949, 287: «There is in this definition no reference to infinitesimals, so that the designation "the infinitesimal calculus", which is used even today, is shown to be inappropriate. Although a number of mathematicians, from the time of Newton and Leibniz to that of Bolzano and Cauchy, had sought to avoid the use of infinitely small quantities, the unequivocal symbolism of Weierstrass may be regarded as effectively banishing from the calculus the persistent notion of the fixed infinitesimal».

[49] Geymonat 2008, 186: «Le sue celebri lezioni all'Università di Berlino ebbero, per questo lato, un'importanza decisiva; tant'è vero che da allora in poi ogni serio corso di analisi inizia sempre con una esposizione rigorosa della teoria dei numeri reali». Anche in questo caso per ulteriori approfondimenti rimando a Boyer 1949, 284ss.

[50] Cfr. Moretto 1978, 203.

ricerche che, seppur pubblicati già da tempo, ancora non avevano conosciuto grande diffusione.

Interrogarsi sulle fonti consultate da Hegel e da Marx nel corso dei loro studi matematici è dunque importante per almeno due motivi:

1. *in primis* per stabilire se Hegel e soprattutto Marx (che morì più di cinquanta anni dopo) erano al corrente di teorie, opere e autori sul calcolo sconosciuti all'altro e se – in caso affermativo – proprio questo 'surplus' di conoscenze possa spiegare le eventuali differenze tra le posizioni dei due filosofi. Esclusa per entrambi la conoscenza delle riflessioni di Weierstrass,[51] cercheremo in modo particolare di capire se Hegel e Marx (o uno dei due) erano al corrente delle teorie di Cauchy, che, come accennato a più riprese, segnarono una vera e propria svolta nella storia del calcolo infinitesimale.

2. in secondo luogo per poter valutare correttamente l'originalità e l'autonomia delle riflessioni di Hegel e di Marx sul calcolo, che – e al contrario di quanto sostenuto da parecchi studiosi – risulteranno in parecchi casi molto limitate.

Prima di procedere in questo senso, permettetemi un paio di precisazioni metodologiche. Innanzitutto – com'è ovvio –, non prenderemo in considerazione tutti i libri e tutti gli autori a cui Hegel e Marx si sono appoggiati nei loro studi di matematica (compresi ad esempio quelli di matematica elementare e di algebra), ma solo quelli esplicitamente dedicati al calcolo differenziale. In secondo luogo è importante chiarire fin da subito che il nostro intento non è quello di dare una descrizione accurata del contenuto dei singoli testi consultati da Hegel e Marx, né tanto meno quello di stabilire con precisione se, quanto e dove i due filosofi sono stati influenzati dalle riflessioni dei matematici di volta in volta considerati (questo

[51] Matthews 2002, 10-11: «Historians of mathematics […] have characterized the dissemination and refinement of Weierstrass' work as a slow and often tentative process, from a series of obscure papers in the 1840s to its professional acceptance in the 1880s».

sarà un lavoro che affronteremo, almeno in parte, nel terzo capitolo). Per il momento, l'obiettivo è piuttosto quello di offrire una visione d'insieme delle fonti prese in considerazione da Hegel e Marx, così da rendersi conto dell'orizzonte temporale dell'opera matematica che i due avevano come riferimento davanti a sé.

Un buon punto di partenza per risalire alle fonti consultate da Hegel nei suoi studi sul calcolo è senza alcun dubbio il catalogo delle opere possedute dal filosofo al momento della morte (*Verzeichnis der von dem Professor Herrn Dr. Hegel hinterlassenen Bücher-Sammlung*). Questo documento venne redatto a Berlino nel 1832 in occasione della vendita della collezione privata di Hegel. Come spiega Mense[52] nel suo prezioso saggio, il catalogo costituisce una testimonianza estremamente affidabile per quanto riguarda la matematica e le scienze naturali, dal momento che le opere che vi compaiono rappresentano con tutta probabilità la totalità di quelle possedute da Hegel su questi temi.[53] Dando una rapida occhiata al catalogo, si può subito notare che l'interesse di Hegel non era tanto rivolto alla storia delle varie discipline trattate (con l'eccezione della matematica greca), ma piuttosto agli sviluppi a lui più recenti. Hegel inoltre dimostra di preferire i lavori dei professionisti a quelli dei loro 'interpreti' e di avere un debole per i libri di testo a carattere generale e per gli articoli altamente specializzati: ai primi ricorreva per avere un colpo d'occhio complessivo sullo stato della ricerca all'interno dei vari campi d'indagine esplorati, ai secondi invece per approfondire più nello specifico i diversi temi di volta in volta affrontati.

La nostra ricognizione delle opere che hanno in qualche modo influito sulle considerazioni infinitesimali di Hegel comincia da

---

[52] Cfr. Mense 1993, 669-710. L'elenco delle opere di carattere matematico-scientifico contenute nel catalogo sono riportate all'interno di questo saggio. È a esso che farò riferimento nel prosieguo del paragrafo.

[53] Lo stesso invece non può dirsi ad esempio dei testi che trattavano temi giuridici, commerciali e storici che, almeno in parte, vennero trattenuti dai figli Immanuel e Karl. Altre opere, per motivi politici, non vennero addirittura messe in vendita.

alcuni importanti testi di matematica antica. Com'è ormai noto infatti, le primissime riflessioni sull'uso dell'infinito in matematica risalgono proprio a questo periodo,[54] con autori come Euclide di Alessandria (IV-III sec. a.C.) e Archimede di Siracusa (287-212 a.C.).[55] Non a caso, all'interno della *Scienza della logica*,[56] affrontando il tema della natura del calcolo infinitesimale, Hegel fa esplicitamente riferimento ai trattati *Della sfera e del cilindro* e *La misura del cerchio* di Archimede, che possedeva nella traduzione tedesca pubblicata da Karl Friedrich Hauber (1775-1851) nel 1798, e anche degli *Elementi* di Euclide, consultati nella traduzione tedesca curata dal già citato Lorenz.

Tra i titoli specificamente dedicati al calcolo infinitesimale, troviamo innanzitutto gli scritti di autori come Karl Heribert Ignatius Buzengeiger (1771-1835), Enno Heeren Dirksen (1772-1850), Ernst Goffried Fischer (1754-1831), Johann Philip Grüson (1768-1857), Gottfried Ploucquet (1716-1790), Friedrich Christian von Riese (1790-1868) e Christian Gottlieb Zimmermann (1766-1841). Questi testi – di cui non riportiamo integralmente i titoli –[57] risalgono tutti a fine Settecento-inizio Ottocento e rappresentano principalmente delle introduzioni allo studio di aspetti specifici del calcolo infinitesimale.[58]

Meritano invece una menzione particolare *l'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (nell'edizione del 1751)[59] di Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704) – il «primo manuale di calcolo differenziale che sia mai

---

[54] Castelnuovo 1938, 29: «Chi volesse risalire alle origini dei metodi infinitesimali dovrebbe arrivare a quel periodo della filosofia greca, ove si son gettate le basi logiche della geometria, verso il 400 a.C.».

[55] Per maggiori approfondimenti su Archimede e sul calcolo infinitesimale nell'antichità, cfr. Rufini 1961.

[56] Cfr. *WdL III*, 220 [225]; 296-297 [333-334]; 300 [338]; 308 [348].

[57] Cfr. Mense 1993, 681-687.

[58] L'unica eccezione è rappresentata dal testo di Grüson, che costituisce un sostegno allo studio dei lavori di Eulero.

[59] L'edizione originaria dell'opera di de L'Hospital è datata 1696.

stato stampato» (Boyer 1990, 187) –[60] e i due volumi del *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (1797-1798) di Silvestre François Lacroix (1765-1843), che fu molto probabilmente il manuale di calcolo più famoso e ambizioso mai pubblicato nel Settecento.[61] Come scrive Boyer,[62] questo libro rispecchia molto bene il clima di indecisione/confusione che contraddistingueva quel periodo, dal momento che – a dispetto delle intenzioni professate dal suo autore all'interno della *Prefazione* (in cui dichiarava esplicitamente di ispirarsi alle idee di Lagrange) – la fondazione del calcolo proposta da Lacroix non solo risultava piuttosto problematica, ma tornava in modo evidente a far uso dei tanto contestati infinitesimali. Anche questo testo metteva dunque davanti agli occhi di Hegel[63] le difficoltà che i matematici del tempo – come abbiamo accennato e come vedremo meglio nel terzo capitolo – avevano nel concettualizzare e nel rappresentare l'infinitamente piccolo.

Queste difficoltà emergono anche nelle celeberrime[64] *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul Infinitésimal* (1797) di Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753-1823) che Hegel possedeva nella traduzione tedesca curata da Johann Karl Friedrich Hauff (1766-1846) e pubblicata nel 1800 con il titolo *Betrachtungen über die Theorie der Infinitesimalrechnung von dem Bürger Carnot*. Di fronte alla totale mancanza di chiarezza e di uniformità delle esposizioni del calcolo a lui contemporanee, Carnot,

---

[60] Il testo del marchese L'Hospital – pur non affrontando il problema della natura dei concetti alla base del calcolo – contribuì in maniera decisiva alla popolarizzazione delle teorie leibniziane sul Continente. Cfr. Boyer 1949, 238.

[61] Mense 1993, 685: «The abridged version of this massive undertaking, which Lacroix published in 1802, had reached a ninth French edition by 1881».

[62] Cfr. Boyer 1949, 265.

[63] Mense 1993, 685: «Awareness of this basic fuzziness in Lacroix's conceptions evidently encouraged Hegel to pay so much attention to clarifying them in *The Science of Logic*».

[64] Boyer 1949, 257: «Carnot's work enjoyed a truly remarkable popularity, appearing in numerous editions and several languages from that time until quite recently».

all'interno di questo scritto, propone come principio metafisico dell'analisi quello della 'compensazione degli errori': le equazioni imperfette dovevano essere rese perfettamente esatte semplicemente eliminando quelle quantità che causavano gli errori. Il risultato era di fatto quello di ridurre il calcolo infinitesimale a un mero calcolo approssimato.

Ben più interessanti sono i tentativi di sistemazione proposti da Leonhard Euler (1707-1783) e da Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Di Euler Hegel possedeva due testi: la traduzione tedesca (in tre volumi, pubblicati tra il 1788 e il 1791) dell'*Introductio in analysin infinitorum* del 1748 e quella (risalente agli anni tra il 1790 e il 1793) delle *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum* del 1755, curate entrambe da Johann Andreas Christian Michelsen (1749-1797). L'*Introductio*, all'interno della quale Euler si occupa principalmente di procedimenti infiniti, «costituì la fonte di rigogliosi sviluppi della matematica per tutta la seconda metà del XVIII secolo» e segnò una svolta decisiva nella storia di questa disciplina, visto che «da allora in poi il concetto di "funzione" diventò il concetto fondamentale dell'analisi» (Boyer 1990, 512). Altrettanto importanti furono le *Institutiones* che «contenevano la più esauriente trattazione del calcolo infinitesimale che fosse mai stata presentata prima di allora» (Boyer 1990, 525) e all'interno delle quali Eulero propone un calcolo in cui gli infinitesimi sono considerati come zeri.[65]

Di Lagrange Hegel possedeva invece la prima parte[66] della traduzione tedesca – uscita nel 1798 a cura del già citato Grüson – della *Théorie des Fonctions Analytiques, contenant Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduit à*

[65] Boyer 1949, 244: «He asserted, as had James Bernoulli, that a number less than any given quantity must of necessity be zero».

[66] Pare che Hegel non possedesse la seconda parte della traduzione, pubblicata a Berlino nel 1798. Cfr. Mense 1993, 686.

l'analyse algébrique des quantités finies del 1797. All'interno di quest'opera Lagrange pone a fondamento del calcolo sviluppi in serie infinita di funzioni (sulla base della formula di Taylor), con l'esplicito obiettivo di evitare qualsiasi riferimento all'infinitamente piccolo. L'importanza che Hegel attribuiva a questo lavoro è testimoniata dal fatto che qualche anno più tardi acquistò anche la nuova edizione del libro in lingua originale, pubblicata a Parigi nel 1813.

Come accennato in precedenza, il lascito librario di Hegel rappresenta solo il punto di partenza per risalire alle fonti consultate dal filosofo nei suoi studi sul calcolo infinitesimale. La lettura delle pagine che Hegel dedica a questo tema e i nomi degli autori che vi vengono citati dimostrano infatti che le sue conoscenze sul calcolo andavano ben al di là di quelle contenute nelle opere in suo possesso.[67] Hegel infatti conosceva perfettamente – com'era d'altronde lecito aspettarsi – anche le teorie di Newton e di Leibniz. Un primo contatto con questi autori – per quanto riguarda il calcolo infinitesimale naturalmente – Hegel lo aveva probabilmente avuto attraverso i lavori di Kästner e di altri studiosi, che – a partire più o meno da metà Settecento – cominciarono a dedicarsi con crescente attenzione al problema della sistemazione critica dell'opera di Newton e di Leibniz sull'analisi, contribuendo in questo modo a una rapida diffusione delle loro idee sul continente europeo. Questo naturalmente non significa che Hegel non avesse una conoscenza diretta delle loro opere, anzi. Come risulta dal catalogo, Hegel possedeva ad esempio i *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* di Newton nell'edizione 'pirata'

[67] Mense 1993, 669-670: «Even a cursory glance at the exposition of mathematics, mechanics, optics and chemistry in Hegel's published works and in the lectures he delivered at Jena, Heidelberg and Berlin, soon makes it apparent that he must have consulted many more sources of information than those he had in his private library. Consequently, although it is certainly the case that knowledge of his library can help to throw precious light on various crucial aspects of his work, one is not justified in regarding it as providing any complete key to the general tenor of his expositions».

pubblicata ad Amsterdam nel 1714,[68] ma – dall'analisi delle pagine hegeliane dedicate al calcolo e dalla testimonianza di Rosenkranz –[69] appare altamente probabile che Hegel conoscesse anche altre opere del matematico inglese, come i già citati *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* e *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Di Leibniz, Hegel non possedeva invece – a quanto ci risulta – nessuna opera, ma anche in questo caso le evidenze testuali ci lasciano supporre con una certa sicurezza che Hegel conoscesse direttamente alcune delle opere fondamentali del matematico tedesco, tra cui la *Nova Methodus pro Maximis e Minimis* (1684). In ogni caso va detto che avere una conoscenza diretta delle opere di Newton e di Leibniz non era una condizione necessaria per farsi un'idea della loro posizione su questo tema: le teorie dei due riecheggiano infatti in gran parte degli studi sull'analisi di quest'epoca, al punto da poter affermare – come abbiamo già sottolineato nel paragrafo precedente – che «l'analisi del Settecento, e anche quella dei primi anni dell'Ottocento, non sa staccarsi sensibilmente dalla concezione di Newton e di Leibniz» (Moretto 1984, 300).

Ma oltre alle riflessioni di Newton, di Leibniz e di altri grandi protagonisti della matematica dell'epoca, come Eulero e Lagrange, Hegel conosceva bene anche quelle di autori che, seppur meno noti, contribuirono in modo significativo alla diffusione e all'evoluzione del dibattito sul calcolo infinitesimale tra la seconda metà del Settecento e la prima metà dell'Ottocento. Basti ricordare a questo proposito i nomi di Pierre Simon Laplace (1749-1827), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Friedrich Wilhelm Spehr (1799-1833) e i già citati L'Huilier e Landen. Anche i metodi infinitesimali che precedettero Newton e Leibniz, come quelli di Isaac Barrow (1630-1677) e di Pierre de Fermat (1601-1655) e i metodi degli indivisibili, quali furono proposti, tra

---

[68] Per maggiori informazioni a proposito, cfr. Bronger 1993, 711-716.

[69] Rosenkranz 1974, 170: «L'originaria cultura fisico-matematica di Hegel era newtoniana».

gli altri, da Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Johannes Kepler (1571-1630) e Gilles Persone de Roberval (1602-1675), non erano sconosciuti a Hegel. Vale la pena sottolineare infine che Hegel era al corrente anche delle teorie di Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783), come dimostra l'ampia discussione sul metodo dei 'limiti' contenuta all'interno della *Scienza della logica* (in cui tuttavia d'Alembert non viene mai esplicitamente nominato).

Da questa carrellata di autori e di opere – che, tra l'altro, dimostrano ancora una volta la profonda cultura matematica di Hegel – rimane tuttavia escluso Cauchy con tutto ciò che quest'ultimo significò per la storia del calcolo.[70] Sebbene le opere in cui Cauchy precisò la sua posizione – il *Cours d'analyse de l'Ècole Polytechnique*, il *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal* e le *Leçons sur le calcul différentiel* – risalgano rispettivamente al 1821, al 1823 e al 1829, con tutta probabilità «Hegel, per quanto sensibile agli sviluppi più recenti della matematica, non fece a tempo a cogliere i frutti delle novità delle impostazioni di Cauchy» (Moretto1984, 115) e in effetti la *Scienza della logica* del 1831 non contiene alcun riferimento diretto né al matematico francese, né ai suoi scritti. Va tuttavia sottolineata la presenza di una nota all'interno della quale Hegel allude esplicitamente a una recensione del *Résumé* di Cauchy e dei *Neuen Principien des Fluentencalcülus* (1826) di Spehr, pubblicata nel 1827 dal già citato Dirksen[71] all'interno della rivista *Jahrbücher für wis-*

---

[70] Boyer 1990, 595-596: «Cauchy diede all'esposizione elementare del calcolo infinitesimale la veste e il carattere che ha ancor oggi». Sul contributo di Cauchy al calcolo infinitesimale, cfr. Birkhoff 1973.

[71] Enno Heeren Dirksen – studente di Bernhard Friedrich Thibaut (1775-1832) e di Carl Friedrich Gauss (1777-1855) presso l'Università di Göttingen e dal 1824 Professore ordinario di matematica all'Università di Berlino – faceva parte di quel circolo di amici che si riuniva a Berlino attorno alla figura di Hegel. Nel 1829 Dirksen pubblicò sempre all'interno degli *Jahrbücher* (n. 27-28) una recensione della traduzione tedesca del *Cours d'analyse* di Cauchy, uscita nel 1828 a cura di Huzler con il titolo *Lehrbuch der algebraischen Analyse*. Dirksen fu un grande ammiratore di Cauchy e fu tra i primi in Germania a riconoscere il valore dei suoi contributi. Per ulteriori informazioni, cfr. Wolff 1986, 212-213.

senschaftliche Kritik curata dallo stesso Hegel. Stando a quanto scrive Wolff,[72] all'interno della sua recensione Dirksen aveva cercato di mettere in luce le novità per certi versi rivoluzionarie dell'impostazione di Cauchy, dando particolare spazio alle parti teoretiche del *Résumé* – supportate da frequenti citazioni dal testo originale francese – e trattando solo sommariamente quelle dedicate invece ai problemi tecnici e alle applicazioni del calcolo. Oltre alla critica al metodo di Lagrange, particolare attenzione viene data ad esempio alle definizioni di grandezza variabile e costante, di limite, di infinito (positivo e negativo) e di funzione (continua e discontinua), nonché ai concetti di derivata, di integrale e di differenziale. Per quanto importante, questo riferimento alla recensione di Dirksen non va tuttavia sopravvalutato: a meno di forzature interpretative, all'interno della *Scienza della logica* non troviamo infatti alcun elemento capace di provare che Hegel avesse fatto effettivamente proprie le idee di Cauchy.

All'interno del suo saggio *Hegel und Cauchy*, Wolff sostiene invece un'altra tesi. Non solo, a suo modo di vedere, Hegel aveva potuto ricavare dalla recensione di Dirksen un'immagine esaustiva della teoria di Cauchy,[73] ma proprio la lettura di questo testo era stata secondo Wolff alla base di gran parte delle modifiche apportate da Hegel alla seconda edizione della *Scienza della logica*.[74] La posizione di Wolff risulta tuttavia insostenibile per una serie di ragioni:

1. La lettura di una recensione, per quanto dettagliata (lo stesso Hegel la definisce, come vedremo, una «acuta esposizione»),[75] non poteva in ogni caso sostituire la documentazione diretta sul-

---

[72] Cfr. Wolff 1986, 213-214.

[73] Wolff 1986, 213: «Hegel konnte durch di ihm bekannte Rezension von 1827 ein einigermaßen umfassendes Bild von Cauchys Theorie der Differential- und Integralrechnung haben».

[74] Wolff 1986, 214: «Die zweite Auflage von Hegels Logik enthält gegenüber den ersten einigen Textänderungen, die dadurch erklärt werden können, daß sie durch Dirksens Cauchy-Rezension motiviert worden sind».

[75] Cfr. *infra*.

l'opera originale, che Hegel, come abbiamo visto, riteneva fondamentale soprattutto in campo matematico-scientifico. Come testimonia la *Scienza della logica*, la lettura della recensione di Dirksen non permise a Hegel di rendersi conto della portata rivoluzionaria delle idee di Cauchy, che siamo certi egli avrebbe saputo cogliere, se solo avesse avuto modo di confrontarsi direttamente con le opere del matematico francese.

2. Se effettivamente il *Résumé* di Cauchy avesse esercitato sul pensiero di Hegel un fascino come quello descritto da Wolff, al punto da spingerlo a rivedere alcune delle sue posizioni sul calcolo infinitesimale, come si spiega allora il fatto che Hegel in ben quattro anni (quelli che vanno dall'uscita della recensione di Dirksen alla pubblicazione della seconda edizione della *Scienza della logica*) non abbia tentato – a quanto ci risulta – di mettere le mani sull'originale francese (come aveva fatto invece con un testo per lui particolarmente significativo come quello di Lagrange)?

3. Se, come sostiene Wolff, le teorie di Cauchy fossero state veramente alla base delle modifiche apportate da Hegel nella seconda edizione della *Scienza della logica*, allora il nome del matematico francese dovrebbe comparire almeno in un'occasione all'interno dell'opera,[76] anche perché – come abbiamo visto – Hegel non esita a citare gli autori ai quali di volta in volta fa riferimento (a parte l'eccezione di d'Alembert), nemmeno quelli meno noti (come dimostrato da L'Huilier e Landen). Particolarmente significativo a questo proposito il fatto che il nome dell'altro autore e dell'altra opera recensita da Dirksen, i *Neuen Principien des Fluentencalcülus* di Spehr, compaiano anche in una nota successiva della *Scienza della logica*.[77]

[76] Cauchy non viene nominato nemmeno nella nota qui considerata.

[77] *WdL III*, 357, *An.* [336, n.]: «Nella critica summenzionata («Jahrb. Für wissensch. Krit.», II vol., 1827, num. 155, pp. 6 sg.) si trovano interessanti dichiarazioni di un dotto scienziato della materia, il Sign. Spehr, riferite dai suoi *Neuen Principien des Fluentencalculus, Braunschw.* 1826, le quali cioè riguardano una circostanza che essenzialmente contribuirebbe alle oscurità e

4. Per comprendere meglio il contesto all'interno del quale Hegel fa riferimento alla recensione di Dirksen, vale la pena citare parte della nota in questione:

> La categoria della grandezza continua o fluente si affaccia colla considerazione del mutamento estrinseco ed empirico di quelle grandezze che per mezzo di una equazione vengono a trovarsi fra loro nel rapporto che l'una sia funzione dell'altra. Ma siccome l'oggetto scientifico del calcolo differenziale è un certo rapporto (espresso ordinariamente dal coefficiente differenziale), e questa determinazione è bene chiamarsi legge, così per questa determinazione specifica la semplice continuità da una parte è già un lato estraneo, dall'altra parte poi essa è in ogni caso l'astratta e qui vuota categoria, poiché con essa nulla viene enunciato sopra la legge della continuità – A quali formali categorie ci si venga inoltre con ciò a ridurre, si può vedere dall'acuta esposizione generale delle determinazioni fondamentali, che vengono adoprate per la deduzione del calcolo differenziale, dovuta all'onorando mio collega, prof. Dirksen, e che, unita alla critica di alcune recenti opere intorno a questa scienza, si trova negli *Annali di critica scientifica*, 1827, nn. 153 sgg. (*WdL III*, 267, *An.* [299, n.])

Ora, credere di poter trovare in questo stringato commento la conferma dell'importanza che Hegel aveva attribuito alle riflessioni di Cauchy è veramente difficile. Tutto ciò che possiamo dedurre da queste parole – naturalmente per quanto concerne la questione di cui ci stiamo occupando – è infatti che:

- l'attenzione di Hegel – come riconosce lo stesso Wolff –[78] è qui rivolta esclusivamente al concetto di continuità e al modo in cui questo concetto viene presentato all'interno delle opere recensite da Dirksen. Non troviamo alcun accenno esplicito – né qui, né altrove – ad altri elementi della teoria di Cauchy.

- limitatamente a questo aspetto, il giudizio del filosofo nei confronti del *Résumé* e dell'opera di Spehr appare sostanzialmente negativo. Le due opere sono infatti citate – anche se non esplicitamente – come esempio dello stato particolarmente infelice in cui versava la ricerca dell'epoca, testimoniato dalla formalità

---

a quanto vi ha di non scientifico nel calcolo differenziale, e collimano con ciò che dianzi fu detto intorno al rapporto generale della teoria di questo calcolo».

[78] Cfr. Wolff 1986, 212.

delle definizioni che caratterizzavano i nuovi tentativi di deduzione del calcolo differenziale (il riferimento è in particolare alla definizione di grandezza continua di Spehr e a quella di funzione continua di Cauchy). Questa lettura trova peraltro conferma nel testo principale al quale la nota si riferisce:

> Se ci si contentasse di questo, come poi nel fatto se ne accontentò quanto alla sostanza Lagrange, la parte generale della scienza del calcolo differenziale e immediatamente questa forma stessa, che si chiama la teoria dei limiti, sarebbe liberata dagli aumenti e poi dalla loro piccolezza infinita o a piacimento, nonché dalla difficoltà di toglier via, salvo il primo membro o anzi soltanto il coefficiente del primo membro, gli altri membri di una serie, che inevitabilmente vi si vengono a trovare in conseguenza dell'introduzione di quegli aumenti; oltredichè sarebbe poi anche purgata cotesta parte generale da tutto il resto che con ciò si connette, dalle categorie formali anzitutto dell'infinito e dell'infinita approssimazione e poi dalle rimanenti categorie (altrettanto vuote anch'esse, a questo proposito) come quella di grandezza continua,[79] e tutte quelle altre che, quali il tendere, il divenire, l'occasione di un mutamento, venner ritenute necessarie. (*WdL III*, 267 [299])

In conclusione, i dati a nostra disposizione non ci permettono di stabilire con sicurezza se Hegel conoscesse o meno i contributi di Cauchy sul calcolo (anche se questa seconda ipotesi, come detto, appare molto più probabile). Ciò che possiamo dare per certo sulla base di quello che sappiamo è che Hegel era perfettamente a conoscenza dei principali sviluppi realizzati nel campo dell'analisi fino a Lagrange. Questo è pertanto ciò su cui dobbiamo basare le nostre valutazioni, senza cadere nella tentazione di considerare l'assenza di Cauchy un pretesto per mettere in discussione la profondissima cultura matematica di Hegel, anzi:

> Le osservazioni di Hegel sulla matematica dell'infinito rappresentano una riflessione sulla matematica condotta con notevole applicazione, documentata dal riscontro su alcuni importanti testi originali, preoccupata di adeguarsi alla sua continua evoluzione, ed in grado di apprezzare anche le esposizioni che ne danno gli analisti che preludono al "rigore" di Cauchy-Weierstrass, in modo particolare Lagrange, che egli

[79] È qui che Hegel inserisce la nota in cui menziona la recensione di Dirksen.

> considera il più alto vertice raggiunto dal pensiero analitico nel bene e nel male. (Moretto 1984, 54)

Per quanto riguarda Marx invece, l'opera che molto probabilmente esercitò il maggior influsso sulle sue considerazioni infinitesimali fu proprio la *Scienza della logica* di Hegel. Come abbiamo notato nell'introduzione,[80] Marx prese verosimilmente spunto dal testo hegeliano per i propri riferimenti bibliografici, al punto che «gli autori matematici citati od esaminati nei *Manoscritti matematici* sono, in gran parte, quelli stessi presenti anche nella *Scienza della logica*» (Moretto 1978, 209). Ne è conferma il foglio bibliografico inserito nei *Manoscritti matematici*[81] e redatto dallo stesso Marx, all'interno del quale troviamo i titoli di alcune opere consultate dal filosofo nei suoi studi, spesso accompagnati dall'indicazione precisa dei passaggi dove di volta in volta venivano discussi i concetti fondamentali del calcolo. Vengono citati i *Principia* e l'*Analysis per quantitatum series, fluxiones et differentias, cum enumeratione linearum tertii ordinis* (composto nel 1665 e pubblicato nel 1711) di Newton, il *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* (1744) di d'Alembert,[82] l'*Introductio* e le *Institutiones* di Euler (nelle rispettive traduzioni francesi) e la *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange (nelle edizioni del 1797 e del 1813). Oltre a Leibniz, Landen[83] e Laplace, vengono menzionati anche i matematici inglesi Colin MacLaurin (1698-1746) e Brook Taylor (1685-1731),[84]

---

[80] Cfr. *supra*.

[81] Cfr. *MR*, 138 [123].

[82] Come fa notare Yanovskaja nelle note all'edizione inglese dei *Manoscritti matematici* (cfr. Marx 1983, 205) il *Traité des fluides* in realtà non contiene nulla a proposito dei fondamenti del calcolo differenziale. Il punto di vista di d'Alembert sui concetti fondamentali del calcolo viene presentato nei suoi articoli nell'*Encyclopédie* e nei suoi *Opuscules mathématiques*.

[83] Di Landen – il cui nome è addirittura cerchiato – Marx conosceva molto probabilmente due opere: *A discourse of the residual analysis* (1758) e *The residual analysis* (1764). Cfr. Ponzio 2005, 20.

[84] Per Taylor, Marx fa esplicitamente riferimento al *Methodus incrementorum directa et inversa* (1711). Di MacLaurin Marx conosceva invece con tutta probabilità il *Treatise of Fluxions* (1742).

due autori – famosi per i loro sviluppi in serie di potenze – ai quali Marx dedica particolare attenzione all'interno dei *Manoscritti matematici*[85] e che erano noti anche a Hegel (il quale però ne aveva una considerazione decisamente minore).[86] Sconosciuto a Hegel – almeno a quanto ci risulta – era invece il matematico francese Siméon Denis Poisson (1781-1840), che compare tra i riferimenti bibliografici di Marx. Non si tratta in ogni caso di una lacuna particolarmente importante, dal momento che Poisson nel suo *Traité de mécanique* (pubblicato in due volumi nel 1811 e nel 1833) continua a fare un uso piuttosto ingenuo dell'infinitamente piccolo.[87] Altre fonti comuni a Marx e Hegel sono il *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* di Lacroix e il trattato *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris* (1765) di L'Huilier, opere che tuttavia non vengano esplicitamente citate da Marx tra le sue fonti.[88]

Tra gli altri lavori sul calcolo infinitesimale consultati da Marx, vanno ricordati senza alcun dubbio i numerosi manuali a cui ave-

---

[85] Si veda a questo proposito *Dal manoscritto "Il teorema di Taylor, il teorema di MacLaurin e la teoria di Lagrange delle funzioni derivate"* (*Aus dem Manuskript "Taylor's Theorem, Mac Laurin's Theorem und Lagrange's Theorie der abgeleiteten Funktionen"*) (cfr. *MR*, 192-203 [163-170]) e *Dal manoscritto non terminato "Il teorema di Taylor"* (*Aus dem unbeendeten Manuskript "Taylor's Theorem"*) (cfr. *MR*, 204-209 [171-174]). Per quanto riguarda la particolare attenzione dedicata da Marx al teorema di Taylor, cfr. Guerraggio 1982, 251, n. 20.

[86] Ne è dimostrazione il fatto che il nome di Taylor viene citato una sola volta nella *Scienza della logica* e per di più all'interno di una nota (cfr. *WdL III*, 299, *An.* [337, n.]). Non troviamo invece nessun riferimento a MacLaurin anche se Hegel possedeva una sua opera di meccanica celeste (*An account of Sir Isaac Newton's Philosophical Discoveries* del 1748) nella traduzione di Gregorius Falck pubblicata nel 1761 con il titolo *Expositio Philosophiae Naturalis*. La scarsa considerazione che Hegel aveva per Taylor e MacLaurin è legata molto probabilmente alla severa critica che egli rivolge all'uso delle serie infinite. Cfr. *WdL III*, 244 [272].

[87] Boyer 1949, 283: «S.D. Poisson, in his *Traité de mécanique* which appeared in several editions in the first half of the nineteenth century and which was long a standard work, used exclusively the method of infinitesimals».

[88] Un elenco delle probabili fonti consultate da Marx nei suoi studi sul calcolo si trova in Ponzio 2005, 19-20.

va fatto affidamento nel corso dei suoi studi. Come Hegel, anche Marx si dedicò infatti allo studio della matematica da autodidatta, non avendo tra i suoi conoscenti qualcuno che potesse introdurlo all'interno di questo mondo. L'unico con il quale Marx si confrontava ogni tanto su temi matematici era – a parte ovviamente Engels – l'avvocato inglese Samuel Moore (1838-1911),[89] che fu, tra l'altro, curatore (assieme a Edward Aveling) della traduzione inglese del *Capitale* e del *Manifesto del Partito Comunista*. Come fanno giustamente notare Matthews e Yanovskaja,[90] le conoscenze di Moore – che, come detto, non era un matematico di professione – non erano in realtà tali da permettergli di offrire un serio aiuto a Marx,[91] che anzi ben prestò cominciò a provare una certa insofferenza verso lo scetticismo con il quale l'amico accoglieva le sue proposte. Ne è conferma non solo la lettera inviata da Marx a Engels il 31 maggio 1873 – e precedentemente citata –[92] ma anche e soprattutto quella datata 22 novembre 1882, in cui Marx si lamenta con l'amico dell'incapacità dimostrata da Moore di cogliere la novità rappresentata dal suo metodo di differenziazione.[93]

Tra i vari manuali consultati da Marx – che furono tutti scritti sotto l'influenza, più o meno diretta, dei grandi matematici del tardo Seicento e del Settecento, come Newton, Leibniz, Eulero, d'Alembert e Lagrange – vanno ricordati i cinque volumi del *Cours complet de mathématiques* (1778) dell'abate francese Jean Sauri (1741-1785) – opera che segue nella sostanza il metodo leibnizia-

---

[89] Smolinski 1973, 1194, n. 8: «Both Marx and Hegel consulted him on mathematical problems arising in their research and took his (usually skeptical) appraisal of their ideas as the final word on the subject».

[90] Cfr. Matthews 2002, 8; Yanovskaja 1983, XI.

[91] Anche se il ruolo di Moore in questo senso non va comunque sottovalutato. Cfr. Matthews 2002, 9: «None of this should diminish Moore's contribution to Marx's studies however: there is no indication that Marx ever consulted another mathematician, amateur or professional».

[92] Cfr. *supra*.

[93] *MEW* 19, 114 [vol. 6, 401]: «Sam, come hai visto subito anche tu, critica il metodo analitico applicato da me mettendolo tranquillamente in disparte; invece si occupa dell'applicazione geometrica di cui ancora non ho detto parola».

no e le relative notazioni –; *An elementary treatise on the differential and integral calculus* (1827-1828)[94] di Jean-Louis Boucharlat (1775-1848) – in cui si trovavano combinate, in modo piuttosto eclettico, le idee di d'Alembert e quelle di Lagrange – e i manuali universitari – tutti risalenti a metà Ottocento e usati all'epoca a Cambridge – di John Hind (1796-1866), Thomas Grainger Hall (1803-1881) e George Wirgman Hemming (1821-1905).

Questa breve ricognizione delle opere e dei libri di testo consultati da Marx mostra che anche i suoi studi sul calcolo – come quelli di Hegel – riflettono solo i risultati sviluppati fino ai primi decenni dell'Ottocento, arrestandosi sostanzialmente a Lagrange. Ne rimane escluso, ancora una volta, Cauchy, che Marx cita esplicitamente solo a proposito di una dimostrazione sulle radici di una specifica equazione.[95] In realtà Marx, all'interno del foglio bibliografico precedentemente considerato, fa riferimento tra le sue fonti a un'opera che prende apertamente ispirazione dalle teorie del matematico francese, ovvero i due volumi – risalenti rispettivamente al 1840 e al 1844 – delle *Leçons de calcul differentiel et de calcul intégral, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M.L.A. Cauchy* dell'abate francese François-Napoléon-Marie Moigno (1804-1844). Anche in questo caso tuttavia – esattamente come per la recensione di Dirksen citata da Hegel – il riferimento a Moigno e di conseguenza a Cauchy «non è poi confortato da nessun elemento che indichi un'effettiva acquisizione delle idee del matematico francese» (Guerraggio 1982, 145).[96] Certo, rispetto a Hegel, che morì solo

[94] Si tratta della traduzione inglese della terza edizione francese dell'opera. Il manuale di Boucharlat aveva avuto – solo in Francia – ben otto edizioni ed era stato tradotto in numerose lingue, tra cui persino il russo. Cfr. Yanovskaja 1983, XII.

[95] Cfr. *MR*, 395: «So entstehen die symmetrischen Gleichungen, deren man so viel aufbauen kann, als man will. Folgt daher aber keineswegs, dass jede gegebne Gleichung ein Wurzel haben muss, wie Mac Laurin zu unterstellen scheint. Der später gelieferte Beweis von Cauchy scheint zweifelhaft». Il passo riportato non compare nella traduzione italiana dei *Manoscritti matematici*.

[96] Alcouffe 1985, 60: «Marx ne l'a vraisemblablement jamais étudié et, en tous les cas, on n'y trouve aucune autre référence dans les MMM».

dieci anni dopo la pubblicazione del *Cours d'analyse* (o *Analyse algébrique*) e che quindi non ebbe di fatto il tempo materiale per potersi confrontare con le idee di Cauchy, il 'vuoto' di Marx – che si occupò di matematica prevalentemente nella seconda metà dell'Ottocento – può apparire molto più sorprendente. Si è spesso tentato di spiegare questa lacuna – utilizzata talvolta come pretesto per mettere in discussione l'intera preparazione matematica di Marx – facendo riferimento alla situazione precaria in cui versava la matematica inglese all'epoca in cui Marx cominciò a dedicarsi allo studio del calcolo. Vale la pena soffermarsi un attimo su questo punto, che merita un approfondimento.

Per tutto il Settecento l'Inghilterra aveva pagato a caro prezzo «il ritardo provocato dall'isolamento a cui era stata "costretta" dalla difesa ad oltranza della tradizione newtoniana» (Guerraggio 1982, 144) e dall'opposizione contro i metodi analitici e la notazione differenziale leibniziana, la cui adozione era ritenuta da molte università inglesi un vero e proprio peccato di lesa maestà contro la memoria di Newton. Come spiega Barone all'interno del suo libro *Logica formale e logica trascendentale*:

> Non si trattava soltanto di una rinuncia ai vantaggi di una notazione superiore e in alcuni casi essenziale (come nel calcolo delle variazioni) per il ricordo di un'infelice polemica e un povero orgoglio nazionalistico; ma poiché per opera di Giovanni Bernoulli sin dai primi decenni del Settecento il resto dell'Europa aveva adottato la notazione leibniziana, e su questa base algoritmica la moderna analisi s'era prodigiosamente sviluppata con i contributi del d'Alembert, di Eulero, di Lagrange e di Laplace, l'Inghilterra si trovava priva degli strumenti stessi per seguire tale sviluppo, mentre i continentali più spregiudicatamente non perdevano di vista i lavori dei "flussionisti" (quali il Taylor e il MacLaurin) e traducevano immediatamente i loro contributi nella notazione differenziale. (Barone 1965, 32)

Questa situazione – che, fino ai primi dell'Ottocento,[97] aveva impedito il diffondersi in Inghilterra dei decisivi progressi realiz-

[97] Boyer 1990, 657: «Nei primissimi anni del XIX secolo l'Università di Cambridge era l'ultimo posto in cui si sarebbe pensato di andare a cercare lo sviluppo di nuovi concetti matematici».

zati in Europa continentale nel campo dell'analisi e della geometria – cominciò a cambiare progressivamente a partire dal 1812 con la fondazione, da parte di un gruppo di matematici di Cambridge, della cosiddetta *Analitical Society*, nata proprio con lo scopo di rompere quello stato di isolamento che aveva segnato la decadenza della matematica inglese nel secolo precedente. Uno dei primi risultati ottenuti dai membri dell'*Analitical Society* fu proprio l'accantonamento della simbologia newtoniana a favore della ben più maneggevole notazione leibniziana, come caldeggiato da Charles Babbage (1791-1871) e John Herschel (1792-1871) nel loro *The principle of pure D-ism in opposition to the Dot-age of the University*.[98] Pian piano i nuovi metodi si affermarono non solo a Cambridge – dove le idee dell'*Analitical Society* erano diventate in poco tempo influenti –, ma in tutta l'Inghilterra e verso il 1830 avevano soppiantato quasi definitivamente quelli tradizionali. Questo rinnovamento contribuì, da un lato, al graduale diffondersi anche all'interno degli ambienti accademici inglesi di teorie e risultati noti già da tempo ai loro colleghi continentali e, dall'altro, al generale rifiorire degli studi matematici sull'isola. Va detto tuttavia che i progressi più evidenti di questa rivoluzione si ebbero in realtà soprattutto nel campo dell'algebra – dove i risultati raggiunti in Europa nel XVIII secolo erano stati meno clamorosi e dove la matematica inglese assunse ben presto la leadership –[99] mentre in quello dell'analisi – nonostante la sostituzione della notazione newtoniana con quella leibniziana – l'Inghilterra continuò ad arrancare. Significativa a questo proposito la testimonianza del celebre matematico britannico Godfrey Harold Hardy (1877-1947) che nella prefazione alla settima edi-

---

[98] Boyer 1990, 618: «L'espressione *dot-age* è un gioco di parole su *dot*=punto e *dotage*=rimbambimento. Si trattava, evidentemente, di un riferimento ironico all'inveterato rifiuto dei matematici inglesi di abbandonare il metodo delle "flussioni puntate" di Newton a favore dei differenziali di Leibniz».

[99] Si pensi a questo proposito ai contributi di George Peacock (1791-1858), ribattezzato 'l'Euclide dell'algebra'. Per maggiori approfondimenti, cfr. Boyer 1990, 658-664.

zione (1937) del suo *A Course of Pure Mathematics* pubblicato per la prima volta nel 1908 descrive con queste parole il clima che si respirava in quegli anni a Cambridge:

> È stato scritto quando l'analisi era trascurata a Cambridge, con un'enfasi e un entusiasmo che oggi sembrano piuttosto ridicoli. Se dovessi riscriverlo ora, non dovrei scrivere (per usare una similitudine del Prof. Littlewood) come un missionario che parla ai cannibali (trad. it. mia).[100]

Questo naturalmente non significa negare gli importanti passi avanti compiuti dalla matematica inglese nella seconda metà dell'Ottocento, anzi – a differenza di quanto sostenuto da alcuni studiosi – possiamo dire che l'ambiente matematico con il quale Marx si trovò a che fare quando nel 1849 decise di trasferirsi in Inghilterra era tutto sommato in discrete condizioni. Il punto è che da quest'ambiente Marx – così come Engels e Moore del resto – era tagliato completamente fuori.[101] Proprio questa mancanza di rapporti con il mondo matematico inglese lo aveva costretto a ricorrere, per i suoi studi sul calcolo, a manuali divulgativi in cui le idee di Cauchy faticavano ancora a trovare spazio. Basti pensare a questo proposito – come fa notare Struik –[102] che la prefazione alla sesta edizione del testo di Boucharlat, datata 1856,[103] non conteneva alcun accenno alle teorie del matematico francese e che uno dei primi manuali a seguire apertamente l'impostazione di Cauchy fu il *Cours d'analyse* di Camille Jordan (1838-1922), pubblicato però solo nel 1882.

---

[100] L'originale di Hardy si trova citato in Yanovskaja 1968, XIII: «It was written when analysis was neglected in Cambridge, and with an emphasis and enthusiasm which seem rather ridiculous now. If I were to rewrite it now I should no write (to use Prof. Littlewood's simile) like a missionary talking to cannibals».

[101] Kennedy 1977, 308: «Marx was not in the mainstream of mathematics and to the end he seems to have been unaware of the advances being made by continental mathematicians in the foundations of differential calculus, including the work of Cauchy».

[102] Cfr. Struik 1948, 186, n. 13.

[103] Marx, come detto, aveva consultato molto probabilmente la traduzione inglese della terza edizione.

Insomma, possiamo concludere questo paragrafo affermando che – al contrario di quanto ci si sarebbe potuti aspettare vista la diversa collocazione temporale dei due filosofi e la vivacità che contraddistingueva l'ambiente matematico dell'epoca – Marx non si avvale – per quanto ci risulta e salvo qualche rara eccezione poco significativa – di studi matematici posteriori a Hegel. Questo significa che non è possibile spiegare eventuali differenze tra le posizioni dei due filosofi affermando che Marx disponeva di conoscenze sul calcolo che Hegel invece non aveva, perché, come abbiamo visto, l'orizzonte d'indagine si arresta per entrambi a Lagrange: né l'uno né l'altro erano dunque a conoscenza delle definizioni rigorose dei concetti fondamentali del calcolo, alla base dell'analisi contemporanea e anzi le riflessioni di Hegel e Marx possono dirsi in un certo senso figlie di quel 'periodo dell'indecisione' che – come abbiamo visto – caratterizzò il calcolo infinitesimale a cavallo tra Settecento e Ottocento.

3. Il calcolo in Hegel e in Marx

È di fondamentale importanza sottolineare fin da subito che l'obiettivo delle seguenti considerazioni non è quello di restituire nei dettagli le riflessioni di Hegel e di Marx sul calcolo infinitesimale,[1] ma di metterne in luce solamente gli aspetti principali, dando particolare risalto a quelli sulla base dei quali sarà possibile instaurare un confronto tra i due filosofi. Dall'analisi condotta nelle pagine seguenti emergerà come Marx – pur con qualche inevitabile differenza, soprattutto di obiettivi – riprenderà in modo piuttosto evidente diversi aspetti delle teorie hegeliane sul calcolo.

§3.1 *Il significato delle riflessioni di Hegel e Marx sul calcolo: punti di contatto e di divergenza*

Sebbene – come accennato all'interno del primo capitolo – la riflessione hegeliana sul calcolo infinitesimale abbia avuto una lunga gestazione (risalente quanto meno ai primissimi anni dell'Ottocento), all'interno di questo paragrafo ci concentreremo principalmente su quanto Hegel scrive all'interno della *Scienza della logica* del 1831.[2] Passaggi di altre opere verranno chiamati in causa solo per chiarire i punti più complessi del pensiero di Hegel.

Fatte queste premesse di metodo, prendiamo ora in considerazione un po' più da vicino le riflessioni di Hegel, a partire da quella che potrebbe essere considerata la *pars destruens* del

[1] A questo proposito rimando ai testi indicati in bibliografia. Mi permetto di segnalare in modo particolare gli studi di Antonio Moretto per quanto riguarda Hegel e di Angelo Guerraggio per quanto riguarda invece Marx.

[2] Per un approfondimento sull'evoluzione storica del pensiero hegeliano sulla matematica dell'infinito, rimando in particolare a Moretto 1984 e agli altri testi citati nella bibliografia.

suo pensiero sul calcolo. All'inizio della prima nota sull'infinito matematico, Hegel sottolinea infatti ciò che ai matematici della sua epoca – come abbiamo visto – era noto già da tempo: alla straordinarietà dei risultati che la matematica era riuscita a conseguire con l'introduzione delle cosiddette grandezze infinitamente piccole faceva da contraltare la totale mancanza di chiarezza e di rigore che contraddistingueva i nuovi metodi infinitesimali.[3] Hegel scrive:

> L'infinito matematico riesce interessante da un lato a cagione dell'ampliamento da lui portato nella matematica e dei grandi risultati dovuti alla sua introduzione in essa; dall'altro lato è poi degno di nota per ciò che a questa scienza non è peranco riuscito di addurre, dell'uso che ne fa, alcuna vera giustificazione basata sul concetto [...]. Le giustificazioni riposano in sostanza sulla esattezza dei resultati ottenuti coll'aiuto di quella determinazione, esattezza che vien dimostrata richiamandosi ad ulteriori principii, non già alla chiarezza dell'oggetto e dell'operazione mediante la quale si ottengono i resultati; tanto che si riconosce anzi che l'operazione stessa non è esatta. (*WdL III*, 236 [264])

Queste parole sono interessanti per almeno due motivi. Innanzitutto Hegel sottolinea che la correttezza dei risultati – seppur innegabile – non può da sola giustificare le procedure impiegate per raggiungerli, a maggior ragione se queste procedure appaiono scorrette.[4] Mostrare – come avevano fatto molti matematici della sua epoca, a partire dallo stesso Leibniz –[5] che i risultati ottenuti attraverso i nuovi metodi «coincidono perfettamente con quelli che vengon trovati mediante il metodo propriamente matematico, il metodo geometrico e analitico» (*WdL III*, 238 [265]) non è per

---

[3] Ci tengo a sottolineare fin da subito che la posizione di Marx su questo punto (cfr. *MR*, 168 [144]) è praticamente la stessa: «Dunque: si credeva nel carattere misterioso del tipo di calcolo recentemente scoperto, che forniva risultati veri (e in tal modo anche particolarmente sorprendenti nell'applicazione geometrica) con un procedimento matematico effettivamente errato».

[4] *WdL III*, 238 [266]: «Il successo non giustifica di per sé la maniera di procedere».

[5] Cfr. *supra*.

Hegel sufficiente a legittimare il calcolo, a dispetto di quanto si è creduto per molto tempo.[6]

In secondo luogo – e questo è forse l'aspetto più interessante del passo precedentemente citato – Hegel prende atto dell'incapacità della matematica di giustificare i propri metodi sulla base del concetto di infinito (matematico) su cui, in ultima istanza, questi stessi metodi si fondano. E proprio questa è – a detta di Hegel – la grande mancanza della matematica: è solo avendo chiaro il vero significato dell'infinito e – nel caso specifico del calcolo infinitesimale – dell'infinitamente piccolo che la matematica potrà evitare di farne un cattivo uso[7] e giustificare convenientemente il suo modo di procedere.[8] Detto in altre parole, secondo Hegel è proprio la 'natura' di ciò che i matematici chiamano impropriamente, come vedremo, grandezze infinitamente piccole che – se correttamente compresa – spiega o meglio legittima l'adozione di procedure particolari, che contraddicono quelle a cui la matematica abitualmente ricorre. Hegel è chiarissimo su questo punto:

> Ma nel metodo del suo infinito essa trova la contraddizione capitale (*den Hauptwiderspruch*) del metodo particolare stesso sul quale, come scienza, in generale riposa. Poiché il calcolo dell'infinito permette e richiede procedimenti che nelle operazioni con grandezze finite la matematica deve assolutamente rigettare. (*WdL III*, 237 [265])

---

[6] Moretto 1984, 154: «Nonostante la contraddittorietà che l'analisi matematica di derivazione newtoniana e leibniziana palesava in alcune sue asserzioni o in alcuni procedimenti di calcolo, essa giungeva a risultati globalmente coerenti tra loro e non contrastava con quanto si poteva ottenere per via algebrica o con il metodo (ritenuto rigoroso) di esaustione: tutto ciò congiunto con la rilevanza e la copia di risultati, convinceva di una sostanziale bontà del metodo e giustificava la fiducia in essa riposta dai matematici».

[7] *WdL III*, 236-237 [264]: «La matematica, non conoscendo la natura di questo suo strumento (poiché non è venuta a capo della metafisica e critica di esso), non poté determinare l'estensione della sua applicazione, e mettersi al sicuro contro il suo cattivo uso (*Misbräuchen*)».

[8] *WdL III*, 237 [265]: «La matematica non sa venire in chiaro circa la metafisica del suo proprio concetto e quindi nemmeno circa la deduzione delle maniere di procedere, che l'uso dell'infinito rende necessarie».

Se vuole fondare il calcolo infinitesimale, la matematica non può in questo caso evitare di affrontare il concetto, perché solo a partire dal concetto è possibile spiegare un modo di procedere che altrimenti – rimanendo all'interno dei consueti confini della matematica – risulta incomprensibile.

> Qui […] la matematica non può scansare il concetto; perché, come matematica dell'infinito, non si limita alla determinatezza finita dei suoi oggetti (a quel modo che nella matematica pura lo spazio e il numero e le loro determinazioni vengon considerati solo secondo la loro finitezza e messi in relazione), ma torce una determinazione presa di là, e da lei trattata, riducendola all'identità colla determinazione opposta (*in Identität mit ihrer entgegengesetzten*) (come p. es. riduce una linea curva a una linea retta, il circolo a un poligono ecc.). Le operazioni che la matematica si permette come calcolo differenziale e integrale contraddicono quindi intieramente alla natura delle determinazioni semplicemente finite ed alle loro relazioni, e non potrebbero pertanto avere una giustificazione altro che nel concetto. (*WdL III*, 251-252 [280])

Secondo Hegel, questo compito non è alla portata della matematica. La matematica – come avremo modo di vedere tra poco – è stata semplicemente in grado di intuire questo concetto, ma non di coglierlo veramente e proprio perciò ha bisogno della filosofia.[9] È a questo punto lecito chiedersi quale sia – secondo Hegel – questo concetto, quale sia cioè la vera natura delle grandezze infinitamente piccole capace di spiegare convenientemente le inusuali procedure alle quali tali grandezze vengono poi sottoposte.

All'interno della *Logica di Jena*, Hegel scrive che «il vero significato delle grandezze evanescenti dell'analisi <infinitesimale>» è il seguente: «l'infinitamente piccolo non deve essere nulla e tuttavia non deve avere più alcuna grandezza» (*JS II*, 18 [21]). Questo non significa, come avevano sostenuto i matematici fino a quel momento, che l'infinitamente piccolo sia una grandezza non nulla e più piccola di qualsiasi grandezza data (ordinaria e non

[9] Moretto 2004, 122: «Secondo il punto di vista hegeliano, la matematica della ragione trova la giustificazione dei suoi procedimenti solo nella filosofia».

nulla), ma che nel loro svanire[10] – per utilizzare un'espressione cara a Newton – queste grandezze perdono il loro carattere quantitativo, 'si tolgono', dice Hegel, come quanti,[11] per conservare un significato solo ed esclusivamente nel rapporto reciproco, nella relazione, un significato qualitativo.[12] Proprio perché – a suo modo di vedere – hanno significato solo all'interno del rapporto, *dx* e *dy* vengono definiti da Hegel momenti (*Momente*), dove con il termine momento – un termine ricorrente nelle opere hegeliane – egli indica appunto ciò che sta necessariamente in rapporto, in relazione ad altro.[13]

> *dx* e *dy* non sono più dei quanti, ma hanno il lor significato unicamente nella relazione loro, hanno un senso solo come momenti. Non son più qualcosa, prendendosi il qualcosa come quanto, non sono differenze finite; ma nemmeno sono un nulla, l'indeterminato zero (*die bestimmungslose Null*). Fuori del loro rapporto sono dei puri zeri; ma devono essere per sé solo come momenti del rapporto, solo come determinazioni del coefficiente differenziale $\frac{dx}{dy}$. In questo concetto dell'infinito il quanto è veramente compiuto fino ad essere diventato un esserci qualitativo; è posto come realmente infinito; è tolto (*aufgehoben*) non solo come questo o quel quanto, ma come quanto in generale. (*WdL III*, 251 [279-280])

In altre parole, secondo Hegel, i differenziali o gli evanescenti, che dir si voglia, sono tali che «non hanno alcuna grandezza in

---

[10] *JS II*, 18 [22]: «Facendo […] scomparire assolutamente in un sistema di grandezze una grandezza posta, allora emerge puramente il concetto di ciò che è da determinare come relazione assoluta, della quale solo si tratta, non di grandezze determinate».

[11] *JS II*, 19 [22]: «I differenziali sono parvenze delle differenze della grandezza, che vengono di nuovo immediatamente tolte».

[12] *WdL III*, 268 [300]: «Venne mostrato che le cosiddette differenze infinite esprimono lo sparire dei lati del rapporto come quanti (*das Verschwinden der Seiten des Verhältnisses als Quantorum*), e che ciò che rimane è il loro rapporto quantitativo (*Quantitätsverhältnis*), in quanto è puramente determinato in maniera qualitativa».

[13] *WdL III*, 241 [269]: «Così come momento esso è in unità essenziale col suo altro (*in wesentlicher Einheit mit seinem Andern*), solo come determinato mediante questo suo altro, vale a dire ha un significato solo in relazione a qualcosa che sta con lui in rapporto».

sé, ma puramente solo una grandezza come relazione (*Verhältnis*)» (*JS II*, 21 [24]). È qui, nel rapporto differenziale, che *dx* e *dy* – che di per sé, al di fuori di questo rapporto, non hanno più alcuna grandezza, non sono più dei quanti –[14] ritornano ad avere un preciso significato numerico, rivelandosi per ciò che veramente sono: una «determinatezza qualitativa del quantitativo (*qualitative Bestimmtheit des Quantitativen*)» (*WdL III*, 266 [297]).[15] Hegel scrive:

> Il quanto infinito […] non è più un certo quanto finito, non è più una determinatezza di grandezza, la quale abbia un esistere come quanto, ma è semplice epperò solo come momento; è una determinatezza di grandezza in forma qualitativa (*eine Größebestimmtheit in qualitativer Form*); la sua infinità è di essere come una determinatezza qualitativa. (*WdL III*, 241 [269])

Questa caratteristica dei differenziali è precisamente ciò che – agli occhi di Hegel – fa di loro l'esempio più elevato di vera infinità del quanto. Per poterne comprendere il motivo, occorre aprire una parentesi sulla concezione hegeliana dell'infinito quantitativo. In questo senso può essere utile richiamare velocemente uno degli esempi con cui Hegel – in *Fede e Sapere*[16] prima e nella *Scienza della logica*[17] poi – tenta di spiegare tale concetto, ovvero quello spinoziano dei due cerchi. Il riferimento è qui a un passaggio dell'*Epistola XII*, in cui Spinoza propone di prendere in considerazione la seguente figura:

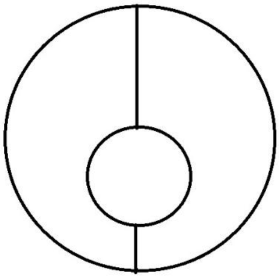
---

[14] Wahsner 2000, 276: «Als unendliches Quantum ist es keine Größenbestimmtheit, die ein Dasein als Quantum hätte, sondern es hat nur Bedeutung als Verhältnis, nur in Einheit mit dem zu ihm im Verhältnis Stehendem, ist außer diesem Verhältnis Null. Mathematischer gesagt: Nur das Verhältnis der unendlichen, der unbestimmten Quanta *dx* und *dy*, also nur der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$, ist etwas Bestimmtes».

[15] Moretto 1984, 152: «L'infinitamente piccolo […] non è la grandezza svanita, ma lo svanire della grandezza, in cui essa si manifesta come quella che è secondo la sua essenza: è una determinatezza qualitativa del quanto».

[16] Cfr. *GuW*, 354-358 [175-179].

[17] Cfr. *WdL III*, 247-249 [275-277].



Cfr. Moretto 1984, 106.

Come possiamo notare, la figura proposta da Spinoza non è particolarmente complessa: dati due cerchi non concentrici e contenuti l'uno nell'altro e tracciate le semirette aventi origine nel centro di uno dei due cerchi, per avere un esempio di una moltitudine attualmente infinita, è sufficiente considerare – a detta di Spinoza – i segmenti di intersezione tra le semirette e lo spazio contenuto tra le due circonferenze;[18] pur non essendoci infatti un numero capace di numerare «tutte le ineguaglianze[19] dello spazio interposto tra i due cerchi» (Spinoza 1924, 59 [trad. it. in Moretto 1984, 105]), – e trovandoci quindi di fronte a un concetto che di fatto va al di là della quantificabilità numerica – di tali 'ineguaglianze' possiamo avere una nozione chiara e distinta. Questi segmenti sono infatti infiniti in numero, proprio perché – come abbiamo appena detto – non esiste un numero che sia in grado di numerarli, ma allo stesso tempo «costituiscono una moltitudine infinita in atto, ben definita per legge di costruzione, in questo caso anche superiormente e inferiormente limitata» (Moretto 2004, 88), dato che la successione infinita dei segmenti è contenuta in uno spazio finito che svolge una funzione unificante per l'intuizione sensibile e contribuisce in questo modo a ricondurre all'unità l'infinità altrimenti dispersa.

---

[18] In figura sono segnati solo il segmento massimo e quello minimo.

[19] Ovvero, come osserva Moretto (1984, 105), «tutti i segmenti costruiti in tal modo».

Secondo Hegel, esempi di vera infinità si possono trovare non solo nella geometria, ma anche nell'analisi come dimostra innanzitutto il confronto tra le frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{1-a}$ e i loro rispettivi sviluppi come decimale illimitato 0,285714… e come serie infinita $1+a+a^2+a^3$… Operando una sorta di ribaltamento rispetto al pensiero comune della sua epoca, che aveva individuato proprio in questi sviluppi la vera espressione dell'infinità quantitativa, Hegel ritiene che essi siano in realtà rappresentazioni di ciò che egli chiama cattiva infinità o infinità «dell'immaginazione ossia dell'opinare (*der Einbildung oder des Meynens*)» (*WdL III*, 248 [277]). In altre parole – secondo Hegel – ci troviamo qui a che fare con un progresso infinito che per ogni successione di finiti distinti è in grado di determinare un nuovo finito distinto dai precedenti e in questo modo non fa altro che procedere e riproporre il finito, spostare continuamente in là la finitezza, senza mai riuscire a superarla.[20] Affidiamoci ancora una volta alle parole di Hegel:

> Il progresso è quindi anche qui non un procedere e un venir più avanti, ma la ripetizione sempre dello stesso, un porre, un togliere, e poi daccapo un porre e daccapo un togliere; una impotenza del negativo (*eine Ohnmacht des Negativen*), al quale quello, ch'esso toglie, mediante questo suo stesso togliere ritorna come un continuo. Son due così legati insieme che si fuggono assolutamente l'un l'altro; e in quanto si fuggono non possono separarsi, ma restano annodati appunto in quanto reciprocamente si fuggono. (*WdL III*, 222 [250])

Lungi dall'essere vera infinità, il progresso all'infinito – che nel corso della storia è stato spesso ingiustamente mitizzato da filosofi e scienziati –[21] non è altro che finitezza infinita e produce

[20] *WdL III*, 223 [251]: «Ciò che fa soccombere il pensiero, e produce la sua caduta e le sue vertigini, non è altro che la noia della ripetizione, la quale lascia che un limite scompaia e poi si ripresenti e di nuovo scompaia, e che quindi perpetuamente l'uno sorga e perisca per l'altro, e l'uno nell'altro, nell'al di là l'al di qua, nell'al di qua l'al di là, dando soltanto il sentimento dell'impotenza di questo infinito o di questo dover essere, che vuole sottomettersi il finito e non può».

[21] *WdL III*, 222 [250]: «La cattiva infinità, principalmente nella forma del progresso del quantitativo all'infinito (questo continuo sorpassare il limite, che è l'impotenza di toglierlo e la perenne ricaduta in esso) suol essere riguardata

solamente un'assurda identità tra il finito e l'indeterminato inteso come interminabilità e illimitatezza. Di qui il giudizio particolarmente severo che Hegel esprime a proposito dei decimali illimitati e soprattutto delle serie infinite: «La serie infinita contiene infatti la cattiva infinità (*die schlechte Unendlichkeit*), perché quello che la serie deve esprimere rimane un dover essere, e ciò ch'essa esprime è affetto da un al di là che non sparisce ed è diverso da quello che dev'essere espresso» (*WdL III*, 245 [273]).[22] Ben diverso è invece il caso delle frazioni $\frac{2}{7}$ e $\frac{1}{1-a}$ che pur essendo comunemente definite come le espressioni finite dei loro sviluppi rappresentano invece – agli occhi di Hegel – «la vera espressione infinita» (*ibidem*). Perché? In qualche modo torna qui in gioco l'idea emersa precedentemente dai due esempi geometrici dei cerchi e del segmento, quella secondo cui nel vero infinito l'infinitamente molteplice assume un carattere di unità. Ma in che senso ciò accade anche nelle frazioni? Lasciamo dare una prima risposta direttamente a Hegel:

> Se non che nel loro presentarsi qui solo come momenti uno dell'altro, epperò come momenti di un terzo (cioè di quel quanto che si chiama l'esponente), non valgono subito più come 2 e 7, ma valgono solo secondo la determinatezza che hanno uno di fronte all'altro. In loro vece si può mettere perciò anche 4 e 14, oppure 6 e 21, e così via all'infinito. Con ciò essi cominciano dunque ad avere un carattere qualitativo (*einen qualitativen Charakter*). Se valessero come semplici quanti, allora il 2 e il 7 sarebbero addirittura l'uno soltanto 2, e l'altro soltanto 7. Il 4, il 14, il 6, il 21 etc. sono assolutamente un che di diverso da quei numeri, e se gli uni e gli altri fossero soltanto dei quanti immediati né questi potrebbero mettersi al posto di quelli, né quelli al posto di questi. (*WdL III*, 242 [270])

---

come un che di sublime e come una sorta di culto, nella stessa maniera che nella filosofia cotesto progresso è stato ritenuto un che di ultimo. Il progresso all'infinito ha in varii modi servito a tirate, che vennero ammirate come prodotti sublimi».

[22] *WdL III*, 246 [274]: «La parola infinito, suole, anche nella serie infinita, valer nell'opinione come qualcosa di elevato e venerabile. È questa una specie di superstizione, la superstizione dell'intelletto. Si è veduto come si riduca invece alla determinazione della manchevolezza».

Come suggerisce Moretto,[23] il modo migliore per comprendere il discorso hegeliano, è quello di utilizzare il linguaggio matematico moderno e sottolineare che qui Hegel non si sta riferendo effettivamente alla frazione $\frac{2}{7}$, ma piuttosto al numero razionale [2;7], «definito come l'insieme delle infinite coppie ordinate (2;7), (4;14), (6;21)… tra loro equivalenti» (Moretto 1984, 178). Messa in questi termini, non è difficile capire in che senso anche la frazione – così come la chiama Hegel – possa essere considerata rappresentazione unitaria dell'infinitamente molteplice.

Nonostante la concezione hegeliana dell'infinito matematico – almeno nei suoi tratti essenziali – sia ormai piuttosto chiara, vogliamo richiamare un ultimo esempio di vera infinità: quello delle relazioni quantitative. Queste relazioni corrispondono di fatto alle moderne funzioni della matematica, in particolare a quelle con dominio infinito.[24] Sono infatti tali funzioni – come vedremo – a possedere quella caratteristica che Hegel giudica propria del vero infinito quantitativo. Anche in questo caso è utile rifarsi a un esempio concreto e tra i vari proposti da Hegel, prendiamo in considerazione uno dei più semplici, ovvero la funzione della linea retta $y = ax$ con a costante.[25] Come ben sappiamo, questa funzione dà origine a infinite coppie ordinate di numeri reali (x,y) che soddisfano all'uguaglianza sopra scritta e corrispondono ai punti del grafico così individuato. Ad esempio per $\frac{y}{x}=\frac{2}{3}$ le coppie in questione sarebbero (3;2), (6;4), (9;6), e così via all'infinito. La costante a (in questo caso $\frac{2}{3}$) possiede nei confronti delle infinite coppie di coordinate quella stessa funzione unificante e limitante che nell'esempio di Spinoza era lo spazio finito a ricoprire e permette così non solo una comprensione, ma anche un'espressione

[23] Cfr. Moretto 1984, 178.

[24] Cfr. Moretto 1984, 171-172.

[25] La scrittura con cui Hegel rende tale funzione è leggermente diversa da quella moderna ed è la seguente: $\frac{y}{x} = a$. Oltre a questo tipo di relazione, definita diretta, Hegel prende in considerazione anche quelle inverse ($x+y = k$) e quelle potenziali ($y^m = kx^m$). Cfr. *WdL III*, 310-322 [350-363].

formale unitaria dell'infinitamente molteplice.[26] Questo discorso vale naturalmente per tutte le funzioni, anche le più complesse, come possono essere ad esempio le derivate del calcolo infinitesimale. Non dobbiamo dimenticare infatti che anche il quoziente differenziale è una funzione $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ che associa a ogni x del suo dominio il corrispondente $f'(x)$, che rappresenta la pendenza della tangente alla curva di equazione $y = f(x)$ nel punto P di volta in volta considerato. Insomma, tirando le fila di questo lungo discorso, possiamo dire che secondo Hegel la vera infinità quantitativa si ha ogni qual volta ci si trova di fronte a «una moltitudine di infiniti elementi, che può essere unitariamente compresa» o – se preferiamo – a «infiniti molti considerabili come uno» (Moretto 1984, 179).

Prima di chiudere definitivamente questa parentesi sul concetto hegeliano di infinito matematico, resta da fare un'ultima precisazione. Se infatti è vero che i due cerchi di Spinoza, i punti del segmento, le frazioni (o meglio, i numeri razionali) e le relazioni-funzioni sono tutti esempi di vera infinità, è anche vero che Hegel stabilisce una precisa gerarchia in questo senso, gerarchia che vede al suo apice – come accennato precedentemente – proprio i differenziali. Ma che cosa determina i diversi gradi in cui la vera infinità si manifesta? Per dare una risposta a questa domanda, val la pena partire dal gradino più basso di questa scala gerarchica, che è occupato – scrive Hegel – dalle frazioni:

> L'espressione che l'infinità ottiene in una frazione è però ancora imperfetta, perché i due termini della frazione, il 2 e il 7, possono essere levati via dal rapporto, e sono degli ordinari quanti indifferenti (*gewöhnliche gleichgültige Quanta*). La relazione loro di essere in rapporto è per loro un che di estrinseco e indifferente (*etwas äusserliches und gleichgültiges*). (*WdL III*, 243 [270])

Già da questo primo passo, riusciamo a capire che il grado di infinità è legato in qualche modo alla necessità della relazione.

[26] Moretto 1984, 179: «Per quanto infinite esse [le coppie di coordinate] sono tutte e sole quelle che soddisfano la legge in questione».

Nella frazione il 2 e il 7 entrano sì in relazione reciproca, ma questa relazione non è necessaria perché essi conservano un significato – come 2 e come 7 – anche al di fuori di essa, in modo assolutamente indipendente l'uno dall'altro. Da questo punto di vista, commenta Hegel, il ricorso alle lettere nell'algebra rappresenta un piccolo *upgrade*:

> La frazione $\frac{a}{b}$ sembra esser quindi una espressione più adatta dell'infinito, perché a e b, levati via dalla loro relazione l'uno all'altro rimangono indeterminati, ed anche essendo separati non hanno alcun proprio valore particolare. Se non che queste lettere son bensì poste come grandezze indeterminate, ma il loro senso è che siano un certo quanto finito. Poiché son dunque la rappresentazione generale, ma soltanto del numero determinato, così anche a loro è indifferente di esser nel rapporto. (*WdL III*, 243 [271])

Anche in questo caso insomma la relazione non è essenziale. Un ulteriore passo in avanti si ha con le funzioni, ad esempio quella della parabola $\frac{y^2}{x} = p$. Scrive infatti Hegel:

> Qui x ed y hanno bensì il senso di poter essere dei quanti determinati; ma non già x ed y, sebbene soltanto x ed y^2 hanno un quoziente determinato. Perciò questi termini del rapporto, x ed y, non solo non sono, in primo luogo, dei quanti determinati, ma in secondo luogo, il loro rapporto non è un quanto fisso, non è un quoziente stabile, ma anzi un quoziente tale, che come quanto è assolutamente variabile. (*WdL III*, 249 [278]).

Come nota Moretto,[27] l'elemento decisivo è che qui abbiamo a che fare con una relazione in cui il rapporto tra x ed y non è più espresso da un quanto fisso – come accadeva per le frazioni ma anche per la funzione della retta – e a ciò Hegel attribuisce evidentemente un maggior valore. Al di là di questo dettaglio, che ci interessa relativamente, è importante sottolineare che qui troviamo la conferma di ciò che dicevamo in precedenza, ovvero che, secondo Hegel, i diversi gradi in cui la vera infinità si manifesta dipendono in ultima istanza da quanto la relazione sia essenziale

[27] Cfr. Moretto 1984, 175.

nel determinare il significato dei termini che vi sono coinvolti. Ma se le cose stanno così, capiamo immediatamente il perché proprio le quantità infinitamente piccole del calcolo rappresentino per Hegel l'esempio più elevato di infinito matematico. Mentre infatti in una relazione tra quanti, ovvero in una funzione del tipo $y = f(x)$, x e y, se considerati al di fuori di questa relazione, hanno ancora il significato di essere quanti, questo non si può dire invece per i differenziali dx e dy che – come dicevamo in precedenza – al di fuori del loro rapporto sono dei puri zeri e hanno senso solo ed esclusivamente come momenti della relazione reciproca. Proprio perché i differenziali hanno significato solo nel loro rapporto reciproco, essi non sono più, secondo Hegel, dei quanti nel senso proprio del termine:

> Ma al contrario, quello che è soltanto nel rapporto, non è un quanto. Il quanto è una tal determinazione, che deve avere un esserci perfettamente indifferente fuori del suo rapporto, ed a cui la differenza da un altro deve essere indifferente, laddove all'incontro il qualitativo è soltanto quello ch'esso è nella sua differenza da un altro. (*WdL III*, 252 [281])

Hegel riconosce apertamente quanto possa essere difficile per il senso comune cogliere la dinamica del 'togliersi' del quanto che è alla base del calcolo differenziale:

> Ma la riflessione che il quanto (e in questa nota chiamo quanto in generale, qual esso è, il quanto finito) è tolto (*aufgehoben*), questa riflessione è quella che non suole esser fatta e che per l'ordinario comprendere costituisce difficoltà, chiedendosi di pensare il quanto, nel suo essere infinito, come tale cioè che non è un quanto, mentre ciò nondimeno continua a sussistere la sua determinatezza quantitativa. (*WdL III*, 239 [267])

Hegel ritiene invece che questa dinamica sia stata correttamente intuita all'interno dei metodi infinitesimali elaborati fino a quel momento, a partire da quello di Newton.[28] A questo proposito, commentando quel passaggio dei *Principia*[29] in cui Newton

---

[28] *WdL III*, 253 [281]: «Il pensiero non può essere più esattamente determinato di come Newton lo ha dato».

[29] Cfr. *supra*.

cerca di spiegare che cosa si debba intendere per 'ultime ragioni', Hegel riconosce esplicitamente «che il concetto stabilito da Newton corrisponde al modo come la grandezza infinita risultò, nella precedente esposizione, dalla riflessione del quanto in sé» (*WdL III*, 253 [282]) e aggiunge:

> S'intendono delle grandezze, nel loro sparire (*in ihrem Verschwinden*), cioè delle grandezze che non son più quanti; inoltre non s'intendono dei rapporti di parti determinate, ma i limiti del rapporto (*die Grenzen des Verhältnisses*). Debbono sparire dunque così i quanti per sé, cioè i lati del rapporto, come così insieme con essi il rapporto, nel suo essere quanto. Il limite del rapporto di grandezze è quello in cui esso è e non è; il che più precisamente vuol dire, quello in cui il quanto è sparito, e in cui con ciò il rapporto si conserva solo come qualitativo rapporto di quantità, e i suoi lati o termini, parimenti come qualitativi momenti di quantità (*qualitative Quantitäts-Momente*). (*WdL III*, 253 [282-283])

Ora, sebbene Newton e altri matematici abbiano dimostrato di aver intuito – chi più, chi meno – la vera natura del quanto infinito, non sono poi riusciti a coglierlo e a esprimerlo nel modo opportuno.[30] Riferendosi ai metodi di calcolo elaborati fino a quel momento, Hegel afferma esplicitamente che «in fondo ad essi sta il vero pensiero della cosa, in conformità del concetto qui sviluppato, ma che quel pensiero però i loro autori non lo scrutarono come concetto, e nell'applicazione ebbero daccapo bisogno di espedienti quali contraddicono alla loro miglior causa» (*WdL III*, 252-253 [281]). È da qui che gli attacchi rivolti al calcolo traggono la loro forza:

> Contro questo concetto è diretto ogni attacco che venne mosso contro la determinazione fondamentale della matematica di questo infinito, cioè del calcolo differenziale e integrale. Alcune inesatte rappresentazioni dei matematici stessi dettero occasione a ciò che cotesto concetto non fosse riconosciuto; ma principalmente causa di queste oppugnazioni fu l'impotenza di giustificare l'oggetto come concetto. (*WdL III*, 251 [280])

[30] *WdL III*, 238-239 [266]: «Le considerazioni di queste giustificazioni e determinazioni dell'infinito matematico […] getterà in pari tempo la miglior luce sulla natura del vero concetto stesso (*die Natur des wahren Begriffes selbst*), e mostrerà come esso sia loro apparso oscuramente ed abbia lor servito di base».

Pur dimostrando di apprezzare l'intuizione delle grandezze evanescenti che sta alla base del calcolo infinitesimale e che – come detto – corrisponde al concetto di vero quanto infinito, Hegel prende atto del fatto che questi concetti – così rilevanti da un punto di vista filosofico – non solo non sono stati riconosciuti come tali dai matematici, ma di fatto «trascendono le possibilità di espressione della matematica: per questa matematica, secondo Hegel, non è nemmeno possibile una rappresentazione formale dei procedimenti» (Moretto 2004, 122). Le critiche che Hegel rivolge al calcolo non sono dunque indirizzate tanto al concetto di evanescente o di differenziale e più in generale a quello delle grandezze infinite (anche quelle infinitamente grandi quindi) – che Hegel, come abbiamo appena visto, dimostra anzi di apprezzare – ma piuttosto al modo in cui questi concetti vengono poi espressi e rappresentati all'interno della matematica.[31] Del calcolo viene apprezzato l'aspetto concettuale, non quello formale.[32] Il giudizio di Hegel è perentorio:

> Mi trattengo dal moltiplicare le citazioni, poiché quelle considerate hanno già mostrato abbastanza che in esse si trova bensì il vero concetto dell'infinito, ma che questo concetto però non è stato messo in rilievo e compreso nella sua determinatezza. In quanto si passa dunque all'operazione stessa, non può accadere che vi si faccia valere la vera determinazione del concetto (*die wahrhafte Begriffsbestimmung*). Si riaffaccia anzi la determinatezza quantitativa finita (*die endliche Quantitätsbestimmtheit*), e l'operazione non può fare a meno della rappresentazione di una grandezza la quale è solo relativamente piccola. (*WdL III*, 258 [289])

Da queste parole emerge come sia proprio la 'rappresentazione' di grandezza infinitamente piccola a essere aspramente cri-

---

[31] Guerraggio 1982, 160: «Il lato debole degli "analitici" è il momento in cui dalla determinazione dell'infinito devono passare alla fase operativa. Qui non riescono a tradurre la diversità qualitativa del coefficiente differenziale e non sanno fare di meglio che usare di nuovo gli argomenti infinitesimali: quello che è un "rapporto qualitativo" viene ancora ridotto ad "una sottrazione o addizione, una operazione aritmetica, estrinseca"».

[32] Moretto 1984, 306: «In realtà, nonostante le riserve sull'aspetto della coerenza formale, Hegel apprezza ciò che sta concettualmente alla base di molti metodi infinitesimali».

ticata da Hegel,[33] poiché – oltre a essere totalmente inadeguata al concetto (riportando il qualitativo al quantitativo) –[34] spinge la matematica ad adottare anche per queste nuove ‘grandezze’ simboli e metodi di calcolo validi esclusivamente per le grandezze ordinarie.[35] Rappresentando come un quanto ciò che – come abbiamo sottolineato – non è un quanto, la matematica finisce per cadere in tutta una serie di problemi dai quali non è più in grado di tirarsi fuori. La definizione tradizionale di infinito come «grandezza al di là della quale, quando sia determinata come infinitamente grande, non se ne dia una maggiore, oppure, quando sia determinata come l’infinitamente piccolo, non se ne dia una minore; che sia cioè una grandezza la quale, nel primo caso, è maggiore, e nel secondo invece minore di qualsiasi grandezza assegnata» (*WdL III*, 239 [267]) entra subito in contrasto con la stessa definizione che la matematica dà di grandezza «come qualcosa che può essere aumentato e diminuito» (*ibidem*) a piacere. La conclusione non può che essere una: «in quanto l’infinitamente grande e l’infinitamente piccolo è tale che non può più essere aumentato o diminuito, nel fatto esso non è più un quanto come tale» (*ibidem*).[36] Hegel sottolinea l’inadeguatezza della defini-

---

[33] *WdL III*, 301 [339]: «Il bisogno di ottenere questo momento del passaggio qualitativo (*diß Moment des qualitativen Uebergangs*), e di ricorrere per esso all’infinitamente piccolo, si deve riguardare come la fonte di tutte quelle rappresentazioni che, mentre dovrebbero appianare queste difficoltà, sono invece in se stesse la difficoltà più grande».

[34] Wahsner 2000, 272: «Dabei polemisiert er [Hegel] insbesondere dagegen, das Unendlichkleine als quantitative statt als qualitativa Größenbestimmung zu behandeln».

[35] Guerraggio 1982, 157: «*dx* e *dy* sono grandezze nuove; pensarle come differenze infinitamente piccole può eventualmente servire a rappresentarle intuitivamente ma è fuorviante se suggerisce l’identificazione con le grandezze ordinarie».

[36] *WdL III*, 266 [298]: «Ma che una differenza quantitativa (*ein quantitativer Unterschied*) che ha la determinazione non solo di poter essere, ma di dover essere, più piccola di qualsiasi differenza data, non sia più una differenza quantitativa, questo è di per sé chiaro, tanto evidente, quanto può essere evidente una qualunque proposizione matematica».

zione che i matematici della sua epoca danno dell'infinitamente grande e dell'infinitamente piccolo.

> Il quanto infinito, come infinitamente grande o infinitamente piccolo, è […] quanto perciò ch'è un grande o un piccolo, ed è in pari tempo non essere del quanto. L'infinitamente grande e l'infinitamente piccolo son quindi figure della rappresentazione (*Bilder der Vorstellung*), che ad una considerazione più particolare si danno a vedere come vana nebbia e ombra. (*WdL III*, 233 [261])

La critica di Hegel alla rappresentazione delle grandezze evanescenti nella forma di quanti infinitamente piccoli è particolarmente incisiva, soprattutto all'interno della prima nota dedicata all'infinito matematico nella *Scienza della logica*.

> È da un lato in generale una improprietà di descrivere come incrementi o decrementi, e come differenze, quei momenti che si chiamano grandezze infinitamente piccole. In fondo a questa determinazione sta che a quella grandezza finita, che si aveva prima, venga ad aggiungersi qualcosa, oppure che da essa si tolga qualcosa, che abbia cioè luogo una sottrazione o addizione, una operazione aritmetica, estrinseca. (*WdL III*, 257 [287])

Esprimendoci in parole semplici, la matematica – secondo Hegel – intuisce correttamente la distanza che separa le grandezze evanescenti dalle grandezze ordinarie, «ma tratta poi le sue grandezze infinite come quanti finiti e vuole applicare a quelle i medesimi procedimenti che valgon per questi» (*WdL III*, 237 [265]), salvo poi accorgersi che in determinati casi queste nuove grandezze devono essere sottoposte a procedimenti che trasgrediscono completamente le regole valide per quelle finite. È chiaro che – una volta introdotte nel calcolo come normali incrementi e differenze ai quali si possono applicare i consueti processi della matematica – non è più possibile spiegare coerentemente il perché queste stesse quantità, in determinati casi, vengano trattate in un modo del tutto particolare.[37]

---

[37] Galuzzi-Guerraggio 1979, 257: «Tutto il calcolo si sviluppa così contraddittoriamente, essendo ambiguamente basato sulla non-definizione delle

> Questa maniera di calcolo dell'infinito si mostra travagliata dall'apparenza dell'inesattezza (*Schein der Ungenauigkeit*) che dà a se stessa, in quanto, dopo avere una volta aumentato le grandezze finite di una grandezza infinitamente piccola, questa grandezza nell'ulteriore operazione in parte la conserva, ma una parte di essa anche la lascia indietro. (*WdL III*, 238 [266])

È estremamente interessante notare la scelta lessicale di Hegel. Qui Hegel non parla infatti di inesattezza, ma di «apparenza dell'inesattezza» (cfr. *supra*), apparenza che il calcolo dà a se stesso nel momento in cui introduce la grandezza infinita come un incremento infinitamente piccolo. Il problema del calcolo – secondo Hegel – non è rappresentato dal ricorso a procedure che risultano incompatibili con quelle della matematica ordinaria, perché le grandezze infinite – non essendo dei quanti – richiedono effettivamente metodi particolari e diversi da quelli validi per le grandezze finite. I matematici tuttavia non sono in grado di giustificare in questo modo il diverso trattamento a cui vengono sottoposte le grandezze infinite, tanto più che queste sono state introdotte nel calcolo come grandezze infinitamente piccole a cui era possibile applicare i consueti procedimenti dell'aritmetica e dell'algebra.[38] Se fino a un certo momento la grandezza infinita è stata trattata come una normale grandezza finita, non è poi possibile tralasciarla perché è «qualcosa che non è veramente uguale a zero, ma è però di così poco rilievo, da poter essere trascurato» dal momento che «da quello che si deve intendere per precisione matematica esula intieramente ogni differenza di esattezza maggiore o minore, proprio come in filosofia non si può discorrere di maggiore o minore verosimiglianza, ma soltanto della verità» (*ibidem*). Hegel scrive:

---

nuove grandezze, che a volte sono ritenute quantità assoggettabili alle ordinarie operazioni algebriche, a volte sono considerate diverse, tanto che in alcuni momenti possono essere tralasciate senza, per questo, pregiudicare l'esattezza del risultato finale».

[38] Guerraggio 1982, 151: «L'infinito, dunque, da una parte è introdotto come una grandezza ordinaria e impiegato come tale in tutte le operazioni, dall'altra non lo è più […] e viene quindi, in certe fasi, assoggettato ad una nuova algebra».

> Il calcolo fa sì che si debban sottomettere le cosiddette quantità infinitesime alle ordinarie operazioni aritmetiche del sommare etc., operazioni che si fondano sulla natura delle quantità finite, e che quindi si lascino valere per un istante quelle quantità come quantità finite, trattandole come tali. Il calcolo avrebbe da giustificarsi quanto a questo, che cioè una volta tira giù coteste grandezze in questa sfera e le tratta come incrementi o differenze, mentre dall'altra parte poi le trascura come quanti, proprio dopo aver applicato loro le forme e le leggi delle grandezze finite. (*WdL III*, 258-259 [289])

In un altro punto della *Scienza della logica*, Hegel afferma che il problema principale della posizione di Leibniz, di Eulero e, prima di loro, di Fermat, Barrow «ed altri, che primieramente si servirono dell'infinitamente piccolo in quell'applicazione che quindi fu sviluppata fino a diventare il calcolo differenziale e integrale» (*WdL III*, 260 [291]), sta nell'aver ipotizzato di poter trascurare nella somma gli infinitesimi di fronte alle grandezze finite e gli infinitesimi di ordine superiore di fronte a quelli di ordine inferiore (ad esempio $dx + dx^2 = dx$).[39] Perché? Lasciamo rispondere direttamente Hegel:

> Queste ammissioni da un lato innalzano quelle determinazioni al di sopra della natura delle grandezze finite; dall'altro lato poi si applica ai momenti chiamati ora infiniti un procedimento che vale solo per le grandezze finite, e nel quale non si può trascurar nulla in considerazione della sua nessuna importanza. Con cotesta maniera di procedere la difficoltà, da cui il metodo è travagliato, rimane nella sua intiera forza. (*WdL III*, 260 [291-292])[40]

---

[39] *WdL III*, 256 [285]: «In Leibniz l'esigenza che si trascurino gl'infinitamente piccoli, esigenza cui danno parimenti accesso i precedenti inventori di metodi relativi a queste grandezze, acquista maggior risalto. È dessa principalmente quella che, col vantaggio della comodità (*Gewinne der Bequemlichkeit*), dà a questo calcolo l'apparenza d'imprecisione e addirittura d'inesattezza nell'andamento dell'operazione (*den Schein von Ungenauigkeit und ausdrücklicher Unrichtigkeit in dem Wege seiner Operation*)».

[40] Moretto 1988, 43: «La situazione diventa però molto più grave quando si utilizza una rappresentazione finita per l'infinitamente piccolo [...] nell'effettivo procedimento di calcolo. Intendendo infatti l'infinitamente piccolo come un "piccolo relativo", hanno infatti origine quei processi di approssimazione per cui si trascurano i differenziali degli ordini superiori nei confronti dei differen-

Hegel ritiene che anche Newton sia caduto nell'errore di rappresentare ciò che è qualitativo, ciò che non è più un quanto nelle forme tipiche del quantitativo e dei quanti finiti.[41] Pur apprezzando – come abbiamo sottolineato – la base concettuale del metodo delle prime e ultime ragioni, Hegel critica apertamente Newton per aver fatto ricorso – nel presentare la sua teoria – alle forme del decremento e dell'incremento, che «cadono dentro la categoria del quanto immediato» (*WdL III*, 255 [285]), arrivando addirittura a sostenere «che anzi le rappresentazioni d'incremento, aumento, accrescimento dell'*x* di un *dx* o di un *i* etc. son da riguardare come il vizio fondamentale (*Grundübel*) del metodo; – come l'impedimento permanente a ciò che dalla rappresentazione del quanto ordinario si cavi e si metta nella sua purezza in rilievo la determinazione del momento qualitativo della quantità» (*ibidem*).

Giunti a questo punto, può essere utile – nell'ottica di un confronto con Marx – cercare di fissare, schematicamente, un paio di punti della riflessione hegeliana sul calcolo.

Va innanzitutto registrato l'interesse eminentemente filosofico con cui Hegel si accosta allo studio del calcolo. Come abbiamo avuto modo di vedere, egli individua proprio nei differenziali/evanescenti l'espressione più alta del vero infinito quantitativo e riconosce alla matematica il merito di aver intuito questo concetto meglio di quanto non sia stata capace di fare la filosofia. Allo stesso tempo non risparmia pesanti critiche al modo in cui i matematici della sua epoca e di quelle precedenti hanno maneggiato nella pratica tale concetto, valutando e giudicando i singoli metodi di calcolo proprio sulla base della loro capacità di mantenersi

---

ziali degli ordini inferiori e delle grandezze ordinarie. Per far questo il calcolo viene tutto ricondotto al finito (i differenziali sono grandezze finite "relativamente piccole")».

[41] Galuzzi-Guerraggio 1979, 259: «Anche Newton che, con il metodo delle prime e ultime ragioni aveva, secondo Hegel, giustamente individuato in un passaggio qualitativo il fondamento del calcolo, non era poi stato in grado di dare un'adeguata esplicitazione dell'idea».

fedeli – a livello formale – al vero significato delle quantità infinitamente piccole. In questo modo Hegel spiega da dove derivano i problemi che attanagliavano la matematica del suo tempo, senza tuttavia spingersi più in là, senza cioè dare in prima persona una soluzione a tali problemi, elaborando una tecnica di calcolo coerente con il concetto di infinitesimale da lui teorizzato e capace di evitare quelle difficoltà in cui – come detto – Newton, Leibniz e altri erano incappati.[42] Non dobbiamo d'altronde dimenticare che Hegel era un filosofo e non un matematico. Anzi, come accennavamo in precedenza e come sostiene anche Moretto,[43] la sensazione è che per Hegel una formalizzazione matematica di questi concetti non sia di fatto possibile. Questa posizione – a cui molto probabilmente Hegel giunge quasi per rassegnazione dopo essersi reso conto dell'incapacità della matematica di trattare in modo adeguato alcuni concetti per lui fondamentali – segna una vera e propria aporia nel pensiero hegeliano, «poiché in realtà gli esempi di infinito in atto da lui proposti (esempio di Spinoza, funzioni) sono già rappresentati in forma simbolica» (Moretto 2004, 122).

Il secondo aspetto su cui vorrei soffermarmi è l'enfasi con cui Hegel sottolinea la distanza che separa il calcolo infinitesimale (e più in generale l'analisi superiore, quella cioè che si occupa dello studio delle relazioni/funzioni) dalla matematica elementare, come testimoniano d'altronde i giudizi diametralmente opposti che egli esprime nei confronti dell'uno e dell'altra.[44] Il calcolo appare agli occhi di Hegel un altro tipo di matematica, *in primis* perché qui – come abbiamo visto – non si ha più a che fare con dei quanti, con quelle grandezze che definiscono in qualche modo il terreno proprio dell'aritmetica, della geometria e dell'algebra. L'orizzonte del calcolo è infatti più qualitativo che quantitativo.

[42] Moretto 1984, 53: «Sarebbe fuorviante concedere spazio all'immagine di Hegel come matematico, che propone nuove tecniche al calcolo infinitesimale o alla matematica in genere. Lo stesso Hegel tende a stabilire, con vari interventi, una precisa demarcazione tra matematica e filosofia».

[43] Cfr. Moretto 2004, 122.

[44] Cfr. *supra*.

Non a caso Hegel condanna con forza la rappresentazione dell'infinitesimale nella forma delle grandezza infinitamente piccola e giudica con estrema diffidenza qualsiasi tentativo di applicare ai differenziali tecniche di calcolo valide esclusivamente per le grandezze ordinarie,[45] scavando un solco profondissimo tra matematica elementare e matematica superiore.

Proprio su quest'ultimo punto è possibile cominciare a confrontare la posizione hegeliana con quella marxiana. Marx condivide con Hegel l'idea che il calcolo infinitesimale abbia determinato una rottura all'interno dell'edificio matematico, che l'analisi superiore rappresenti cioè qualcosa di radicalmente e qualitativamente diverso dalla matematica ordinaria.[46] Entrambi concordano nel ritenere che il calcolo sia irriducibile alla matematica precedente[47] e non possa pertanto essere considerato – come molti matematici della loro epoca avevano invece creduto –[48] una semplice estensione della matematica elementare alle nuove grandezze infinite, come se quest'ultime fossero a priori assoggettabili alle ordinarie operazioni algebriche. Va tuttavia detto che Marx,

---

[45] Galuzzi-Guerraggio 1979, 256: «L'uso di scritture come $x+dx$, e il continuo ricorso allo sviluppo in serie di potenze delle funzioni, sono emblematici di un modo di concepire il nuovo calcolo come un prolungamento del vecchio, mediante l'aggiunta di nuove quantità alle quali vengono applicate relazioni la cui validità, in realtà, è dimostrata solo in ambito più ristretto».

[46] Kolman-Yanovskaja 1983, 237: «Any attempt to reduce infinitesimal calculus to elementary mathematics, to annihilate the qualitative leap between the two must be regarded as ill fated».

[47] Galuzzi-Guerraggio 1979, 264: «Hegel è forse il primo pensatore che colga la rottura che il calcolo differenziale rappresenta rispetto alla matematica precedente e ne capisce la irriducibilità ai termini classici».

[48] Galuzzi-Guerraggio 1979, 256: «Comune alle loro elaborazioni, come possiamo leggere nei trattati di L'Hospital o di MacLaurin, ad esempio, è la convinzione che il calcolo differenziale sia uno sviluppo dell'algebra e della geometria, ottenuto mediante un processo di arricchimento lineare, aggiungendo altre grandezze alle quantità tradizionali». Questo non vale invece per Cauchy, che – come Hegel e Marx – si era dimostrato ben consapevole dei problemi cui un'indebita estensione delle costruzioni algebriche poteva condurre. Cfr. Guerraggio 1982, 249, n. 7.

pur condividendo con Hegel l'idea che l'analisi non possa essere considerata un semplice ampliamento della matematica elementare e in particolare dell'algebra, ritiene – a differenza di quest'ultimo – che togliere al calcolo differenziale «il velo del mistero (*den Schleier des Geheimnisvollen*)» (*MR*, 192 [163]) significhi metterne in luce l'origine algebrica, «caratterizzarlo come momento di sviluppo e di potenziamento della struttura algebrica» (Guerraggio 1982, 177). Come sottolinea giustamente Struik,[49] per Marx è fondamentale individuare il punto preciso in cui il calcolo emerge dall'algebra come una dottrina del tutto nuova e irriducibile a quest'ultima, senza tuttavia stabilire questa irriducibilità a priori.[50] Per fondare il calcolo, occorre mostrare che facendo affidamento agli strumenti e al linguaggio dell'algebra, non risulta possibile esprimere la dinamica della differenziazione in tutti i suoi aspetti. È la stessa procedura algebrica a esigere – a un certo punto – che i suoi confini vengano oltrepassati, «dato che alcuni fatti non sono più inquadrabili entro i suoi schemi e la forzano nella direzione di un'altra struttura che possa meglio interpretare la ricchezza del reale» (Guerraggio 1982, 201). I consueti simboli algebrici non sono in grado di tradurre, o meglio, di rappresentare i procedimenti reali che si svolgono nella differenziazione.[51] Ed è proprio da questa inadeguatezza che le operazioni e soprattutto i simboli del nuovo calcolo – che da questo momento in poi può svilupparsi in totale indipendenza – traggono il loro significato e la loro fondatezza.[52]

---

[49] Cfr. Struik 1948, 196.

[50] Kolman 1932, 350: «Marx hingegen zeigt wie, aus der Elementarmathematik, auf ihrem eigenen Boden die wesentlich neue Differential- und Integralrechnung erwächst».

[51] Guerraggio 1982, 179: «L'analisi infinitesimale, se non è riducibile all'algebra, deve però per Marx trovare in essa la sua genesi, nel senso che si deve provare che essa nasce dall'algebra ma ne supera poi gli orizzonti per il manifestarsi di una contraddizione irresolubile, se si rimane in quel contesto».

[52] Blunden 1984, 8: «While calculus does become an independent realm, operating on its own ground, its symbols are only meaningful because they indicate, symbolize, operations to be carried out algebraically».

Da questo punto di vista, la posizione di Marx sembra richiamare molto da vicino quella del «calcolo differenziale puramente algebrico» (*MR*, 174 [148]) di Lagrange,[53] che non a caso viene considerato un punto di riferimento fondamentale all'interno dei *Manoscritti matematici*. Marx riconosce esplicitamente i meriti di Lagrange, «la cui teoria delle funzioni derivate diede una nuova base al calcolo differenziale» (*MR*, 192 [163]).[54]

> Ricordiamo soltanto, come dato di fatto, che, mentre coloro che scoprirono il calcolo differenziale e la maggior parte dei loro successori facevano dei simboli differenziali il punto di partenza del calcolo, Lagrange, invece, assume come punto di partenza la derivazione algebrica delle funzioni reali, mentre considera i simboli differenziali come espressioni puramente simboliche (*bloss symbolischen Ausdrücken*) delle funzioni derivate. (*MR*, 100 [98])

Facendo del teorema di Taylor il punto di partenza del calcolo differenziale, Lagrange – a detta di Marx – connette immediatamente questo nuovo calcolo con la matematica a esso precedente:[55]

> I nessi reali e perciò più semplici tra il nuovo e il vecchio sono sempre scoperti quando questo nuovo ha ottenuto una forma in sé compiuta; e si può dire che il calcolo differenziale raggiunse questo stadio grazie ai teoremi di Taylor e MacLaurin. Fu dunque compito di Lagrange ricondurre il calcolo differenziale su basi strettamente algebriche. (*MR*, 198 [167])

Come abbiamo ribadito anche in precedenza, rispetto a Marx, Hegel sottolinea in modo molto più radicale la rottura tra matematica superiore e matematica elementare. Da questo punto di

---

[53] Moretto 1978, 208: «La concezione di Marx […] riflette i tentativi di Lagrange di ricondurre il calcolo infinitesimale a concetti puramente algebrici, senza ricorrere ad un calcolo speciale».

[54] Cfr. Matthews 2002, 21: «Marx nevertheless admired *Théorie des Fonctions Analytiques* as the first "modern" text of its kind, in the sense that it presented the calculus without recourse to infinitesimals or limits».

[55] Kolman 1932, 350: «Marx schätzt gerade das Gegenteil in ihm, und zwar, daß Lagrange den Zusammenhang zwischen Algebra und Analysis aufdeckt, daß er zeigt, wie die Analysis aus der Algebra hervorwächst».

vista, la posizione di Hegel rispetto a coloro che hanno cercato di giustificare algebricamente o geometricamente il calcolo è netta:[56]

> Ma le fatiche dei più recenti s'indirizzarono soprattutto a ricondurre il calcolo dell'infinito all'evidenza del metodo propriamente geometrico, e a raggiungere in questo metodo il rigore delle dimostrazioni degli antichi (- espressioni di Lagrange -) nella matematica. Ma poiché il principio dell'analisi dell'infinito è di natura più alta che non il principio della matematica delle grandezze finite, l'analisi dovette subito rinunciar da se stessa a quella sorta di evidenza, come anche la filosofia non può in nessun modo pretendere a quella chiarezza che hanno le scienze del sensibile. (*WdL III*, 259 [289-290])

In poche parole, nel momento in cui cerca di trovare una connessione tra le nuove e le vecchie grandezze, anche la soluzione proposta da Lagrange – pur apprezzata da Hegel –[57] finisce per ricadere nello stesso errore di tutte le altre: quello cioè di riportare il qualitativo al quantitativo. Scrive infatti Hegel:

> Anche in questo metodo si comincia dalle categorie dell'incremento e della differenza della funzione, la cui grandezza variabile riceve l'incremento (donde la fastidiosa serie), dalla funzione originaria. E così anche in seguito quei termini della serie, che son da trascurare, vengono considerati solo in quanto costituiscono una somma, ed il motivo per cui si trascurano vien riposto nella relatività del loro quanto (*in das Relative ihres Quantums*). (*WdL III*, 264-265 [296])[58]

---

[56] Galuzzi-Guerraggio 1979, 260: «Se i coefficienti differenziali sono grandezze che differiscono qualitativamente dai quanti usati nell'algebra, non è pensabile di poterle giustificare come "caso particolare" delle grandezze algebriche, sforzandosi di dedurle da esse con procedimenti tipici dei quanti, basati quindi su un rigore non più sufficiente per le nuove grandezze».

[57] *WdL III*, 264 [296]: «I vantaggi quanto a precisione, astrazione e universalità sono d'altronde abbastanza riconosciuti». Per un approfondimento sull'interpretazione hegeliana del calcolo di Lagrange, cfr. Moretto 1984, 199-201 e soprattutto Klaucke 1990.

[58] Guerraggio 1982, 160-161: «Siamo così ancora una volta di fronte ad un procedimento basato tutto sull'aspetto quantitativo, che trascura alcuni elementi per la loro irrilevanza numerica e che perde l'occasione di sottolineare il significato qualitativo dei vari termini della serie».

Anche quest'ultima citazione – come d'altronde tutte quelle precedenti – dimostra insomma quanto sia profondo agli occhi di Hegel il solco che separa il calcolo infinitesimale dalla matematica precedente. Tra questi due mondi non esiste e non può esistere alcun legame.[59] Per Marx invece un legame tra calcolo e algebra c'è e scopo della sua ricerca è – come vedremo – proprio quello di portarlo alla luce.

Qui si situa un'altra importante differenza tra la posizione di Hegel e quella di Marx. Mentre il primo si dimostra interessato al calcolo esclusivamente per il suo aspetto filosofico-concettuale – la corretta intuizione del vero significato dell'infinito matematico che si cela dietro le nuove grandezze dell'analisi infinitesimale –, l'interesse del secondo è invece indirizzato prevalentemente – come abbiamo accennato già all'interno del primo capitolo – all'aspetto matematico della questione. Al contrario di Hegel e pur non essendo nemmeno lui – come quest'ultimo – un matematico vero e proprio, Marx ha l'ambizione di elaborare una nuova tecnica di calcolo capace di superare le difficoltà in cui i matematici dell'epoca (o meglio, quelli a lui precedenti) si trovavano invischiati. Che questo fosse l'obiettivo di Marx è dimostrato d'altronde dagli stessi *Manoscritti matematici* in cui di fatto non troviamo una singola parola a proposito del significato dell'infinito quantitativo e più in generale di quei concetti tanto cari a Hegel. La critica ai metodi di calcolo elaborati fino a quel momento – questa sì comune a entrambi – svolge pertanto due funzioni diverse a seconda degli obiettivi perseguiti dall'uno e dall'altro: in Hegel la sottolineatura dell'inadeguatezza delle rappresen-

[59] Guerraggio 1982, 160-161: «Se i differenziali sono delle grandezze qualitativamente determinate, se cioè mediante la loro introduzione l'analisi infinitesimale si situa ad un livello più alto, il tentativo di giustificare algebricamente o geometricamente perché il coefficiente differenziale di una data funzione assume certe forme, e non altre, risponderebbe ancora alla vecchia logica di voler spiegare a tutti i costi il nuovo tramite il vecchio, il qualitativo con il quantitativo, introducendo una indebita estensione delle relazioni che caratterizzavano il precedente livello di discorso».

tazioni che la matematica ha dato degli infinitesimali ha come scopo quello di mostrare la sostanziale impossibilità di qualsiasi tentativo di formalizzazione coerente di questi concetti, in Marx al contrario quello di preparare il campo per un nuovo tentativo di formalizzazione, alternativo a quelli già proposti. Proprio la diversità degli obiettivi in vista dei quali questa critica viene condotta spiega i diversi giudizi che Marx e Hegel esprimono a proposito dei metodi di calcolo elaborati fino a quel momento, a partire – come vedremo tra poco – da quelli di Newton e Leibniz.

Sebbene le riflessioni di Marx sul calcolo – per come ci vengono presentate all'interno dei *Manoscritti matematici* – prendano insomma una direzione completamente diversa rispetto a quella delineata da Hegel all'interno della *Scienza della logica*, ci sono tuttavia alcuni punti specifici in cui Marx sembra riprendere piuttosto chiaramente le posizioni di Hegel. Uno di questi punti – gli altri li vedremo meglio nei prossimi paragrafi – è rappresentato dalla critica che sia Hegel, sia Marx rivolgono alla rappresentazione dell'infinitesimale come grandezza infinitamente piccola. Anche Marx ritiene in effetti che gran parte dei problemi che affliggono il «calcolo differenziale mistico (*mystischer Differentialcalculus*)» (*MR*, 164 [141]) – espressione che egli utilizza per riferirsi complessivamente ai metodi di Newton e di Leibniz – dipendano dall'aver attribuito fin da subito al differenziale «un'esistenza autonoma» (*MR*, 150 [132]) all'interno del contesto algebrico ordinario, come un incremento infinitesimo. Marx scrive: «$x_1 = x+\Delta x$ si trasforma fin da principio in $x_1 = x+dx$ ovvero $x+\dot{x}$, dove dx è posto attraverso una definizione metafisica. Prima esiste e poi viene spiegato» (*MR*, 164 [141]).

Ora, introdurre i differenziali «attraverso presupposti metafisici celati o palesi» (*MR*, 122 [112]) e trattarli come ordinarie quantità algebriche ha degli indubbi vantaggi pratici,[60] perché

[60] *MR*, 146 [129]: «E inoltre presupponendo a priori che dx, dy, ecc., ovvero $\dot{x}$, $\dot{y}$ ecc., siano incrementi isolati e autonomi (*selbständige isolierte Inkremente*) di x e y, ottengo, detto in termini generali, l'enorme vantaggio caratteristico

permette ad esempio – tra le altre cose – di sviluppare il binomio differenziale $x+dx$ come «un binomio ordinario, il che diventa molto efficace da un punto di vista tecnico» (*MR*, 166 [142]).[61] Allo stesso tempo questo modo di procedere porta tuttavia «a conseguenze di ordine metafisico e non matematico: quindi c'è la soppressione violenta di certe grandezze che ostacolano la derivazione e che tuttavia sono nate da essa stessa» (*MR*, 122 [112]). In un altro punto, Marx scrive: «dalla assunzione arbitraria deriva la conseguenza che nello sviluppo del binomio $x+\Delta x$ ovvero $x+\dot{x}$ devono essere fatti scomparire i termini in x e Δx, che sono stati ottenuti, per esempio, accanto alla prima derivata, per ottenere il risultato esatto» (*MR*, 164 [141]). Marx sta qui prendendo atto – esattamente come aveva fatto Hegel – dell'incoerenza in cui la matematica finisce per cadere nel momento in cui, dopo aver introdotto nel calcolo i differenziali come grandezze assoggettabili ai consueti procedimenti dell'algebra e della matematica elementare, si trova poi a dover giustificare il perché in un secondo momento – quando ad esempio compaiono in un grado superiore al primo –[62] queste grandezze – a differenza di quelle ordinarie – possano essere tranquillamente trascurate, come se fossero = 0.[63] In questo passaggio dei *Manoscritti matematici*, Marx risulta particolarmente chiaro:

---

del calcolo differenziale che tutte le funzioni delle variabili sono rappresentate fin da subito in forme differenziali».

[61] *MR*, 144 [128]: «Si vede, da un lato, quale utilità ha questa presunta esistenza di dy, dx, ovvero $\dot{y}$, $\dot{x}$, dovendo io da principio, non appena le variabili crescono, soltanto porre nella funzione algebrica i binomi $y+\dot{y}$, $x+\dot{x}$, ecc. per poi poter operare con questi stessi come se fossero grandezze algebriche ordinarie (*als gewöhnliche algebraische Grössen*)».

[62] *MR*, 145 [128]: «Ora da dove deriva il termine $\dot{u}\dot{z}$ che deve essere forzatamente eliminato? Semplicemente dal fatto che i differenziali di y, cioè $\dot{y}$, di u, cioè $\dot{u}$, di z, cioè $\dot{z}$, sono posti fin da principio per definizione come esistenze autonome (*selbständige Exsistenzen*), separate dalle grandezze variabili, da cui risultano, senza che siano fatti derivare attraverso un qualche procedimento matematico».

[63] Guerraggio 1982, 181: «La conclusione di Marx è allora analoga a quella che avevamo visto in Hegel: tralasciare delle quantità sulla base della "relati-

> Non resta dunque altro che immaginarsi gli incrementi della variabile *h* come incrementi infinitamente piccoli e attribuire loro, in quanto tali, esistenza autonoma, per esempio nei simboli $\dot{x}$, $\dot{y}$, ecc. ovvero *dx*, *dy* [ecc.]. Ma le grandezze infinitamente piccole sono grandezze così come lo sono quelle infinitamente grandi (l'espressione infinitamente [piccolo] intende dire nient'altro che indeterminatamente piccolo); perciò *dx*, *dy*, ecc., oppure *x*, *y*, [ecc.] figurano nel calcolo alla stessa maniera delle grandezze algebriche ordinarie, e nella equazione sopra considerata […] *dxdx* ha lo stesso diritto di esistenza di 2*xdx*: ma la cosa più strana è il ragionamento attraverso cui esso viene violentemente soppresso, cioè appunto in base al fatto che viene utilizzata la relatività del concetto (*die Relativität des Begriffs*) di infinitamente piccolo. (*MR*, 150-152 [132])

Se *dx* e *dy* vengono trattati come delle grandezze matematiche ordinarie, allora un infinitesimo di ordine superiore – constata Marx – ha lo stesso identico diritto di esistenza di un infinitesimo di ordine inferiore e – come ci insegnano le regole più basilari di aritmetica e di algebra – non può essere pertanto trascurato per via della sua piccolezza relativa. Questo è un ragionamento assurdo, che non solo è contrario a qualsiasi principio di precisione matematica, ma che di fatto trasforma il calcolo infinitesimale in un mero calcolo approssimato. Ma un calcolo approssimato dovrebbe far giungere a risultati solo approssimati mentre invece «in questo caso si verifica un miracolo ancora più grande, cioè che non si ottengono affatto attraverso questo metodo valori approssimati, bensì valori esattamente determinati» (*MR*, 152 [133]). Marx dimostra qui di condividere l'idea di Hegel, che all'interno della *Scienza della logica* aveva preso nettamente posizione contro l'interpretazione del calcolo infinitesimale come un calcolo approssimato, riconoscendo – come Marx appunto – che il calcolo non giungeva a risultati approssimati, ma assolutamente corretti[64] e condannando con forza la posizione di Christian

vità del concetto di infinitamente piccolo" è privo di qualsiasi giustificazione; l'esattezza stessa dei risultati si rivela in realtà unicamente conseguenza di successivi errori, che consentono di ottenere "risultati veri da premesse false"».

[64] *WdL III*, 256 [286]: «Inoltre, come si è già accennato, gli analitici mostrano, confrontando il resultato che si ottiene col rigoroso procedimento geome-

Wolff (1679-1754), che aveva paragonato «il trascurare le differenze infinite di ordini superiori rispetto alle inferiori col modo di condursi di un geometra, che nel misurare l'altezza di un monte non sarà stato meno preciso, ove il vento abbia intanto portato via un granellino di sabbia dalla cima di quel monte, oppure col trascurar l'altezza delle case e delle torri nel calcolo delle eclissi lunari» (*WdL III*, 256 [285-286]).[65]

Ma se questa operazione non ha e non può avere alcuna giustificazione matematica, come mai si procede comunque all'eliminazione di certi termini che, in linea di principio, – come detto – avrebbero lo stesso diritto di esistenza di quelli che vengono invece conservati? È probabile – dice Marx – che andando per tentativi, ci si sia resi conto che questi termini andavano eliminati per ottenere la derivata e si è poi cercato di trovare un modo per giustificare questa operazione. Marx scrive:

> L'unico problema che potrebbe essere messo ancora sul tappeto è: perché [ha luogo] la soppressione violenta dei termini che sono d'ostacolo? Ciò presuppone che si sappia che essi sono d'ostacolo e che non appartengono realmente alla derivata. La risposta è molto semplice: essa è stata trovata in maniera puramente sperimentale. (*MR*, 166 [142])

È estremamente interessante notare la somiglianza tra questo passo dei *Manoscritti matematici* e un passo della *Scienza della logica*, che riporto qui integralmente:

> Non si potrà negare che in questo campo molto è stato accettato come dimostrazione, soprattutto coll'aiuto di quella nebbia dell'infinitamente piccolo, senz'altro motivo che questo, che cioè quello che risultava era

---

trico, con quello che si ottiene seguendo il metodo delle differenze infinitesime, che l'uno di essi è il medesimo che l'altro, e che non vi ha assolutamente luogo un più o meno di precisione. E s'intende da sé che un resultato assolutamente preciso non potrebbe derivare da un procedimento che mancasse di precisione».

[65] Hegel si riferisce qui esplicitamente a un passo degli *Elementa mathesos universae, Tomus I, Elementorum analyseos mathematicae Pars II. Elementa analyseos infinitorum tradit. Sectio I. De calculo differentiali. Caput I. De natura calculi differentialis, Definitio 2, Scholion*. Per maggiori approfondimenti cfr. Moretto 1984, 188, n. 70.

> sempre già conosciuto in precedenza, e che la dimostrazione, la quale era stata disposta in modo che cotesto risultasse, procurava per lo meno l'apparenza di una impalcatura di dimostrazione (*den Schein eines Gerüstes von Beweis*); – apparenza che sempre ancora si preferiva alla semplice fede, oppure al sapere per esperienza. Io però non esito affatto a riguardare questa maniera come niente più che un semplice giuoco di bussolotti e una ciarlataneria del dimostrare. (*WdL III*, 272 [304])

Questo e gli altri passi dei *Manoscritti matematici* che abbiamo citato mostrano molto chiaramente come Marx accolga gran parte della critica hegeliana ai metodi di calcolo elaborati fino a quel momento. Sia Hegel, sia Marx – come abbiamo sottolineato – ritengono infatti che i problemi da cui l'analisi della loro epoca si mostra attanagliata derivino dall'aver assunto i differenziali come grandezze, come incrementi infinitamente piccoli, assoggettabili a tutte le operazioni e i procedimenti validi per le grandezze ordinarie, senza considerare che in realtà *dx* e *dy* hanno tutt'altra natura, non sono – per riprendere il lessico hegeliano – dei quanti, ma hanno un significato completamente diverso. Anche Marx è molto chiaro su questo punto: «la consolazione a cui si aggrappano alcuni matematici razionalizzanti, cioè che *dx* e *dy* sarebbero in realtà soltanto infinitamente piccoli […] è una chimera» (*MR*, 32 [51]).

Eppure anche qui è possibile cogliere una differenza tra il pensiero dei due filosofi, riconducibile ancora una volta ai diversi intenti che guidano le loro riflessioni. Mi sto riferendo al modo in cui Hegel e Marx valutano il calcolo di Leibniz e quello di Newton. Mentre Hegel – come abbiamo visto in precedenza – aveva espresso un giudizio sostanzialmente diverso nei confronti dell'uno e dell'altro,[66] in Marx questa distinzione non c'è, tanto che Newton e Leibniz vengono di fatto «accomunati in un unico "calcolo mistico", dove la "trascendenza metafisica" presente nel metodo delle flussioni è messa sullo stesso piano di quella "dell'infinitesimale di diverso ordine di Leibniz" senza che venga preso in dovuta considerazione lo sviluppo più maturo del pensie-

---

[66] Cfr. *supra*.

ro newtoniano» (Guerraggio 1982, 172). Perché? Per rispondere a questa domanda, val la pena ricordare brevemente il motivo per cui, secondo Hegel, il metodo di Newton era da considerarsi superiore a quello di Leibniz. La ragione della preferenza che Hegel aveva accordato al matematico inglese risiedeva nel fatto che – a suo modo di vedere – con il metodo delle prime e ultime ragioni egli era riuscito a cogliere – non solo meglio di Leibniz, ma meglio di qualsiasi altro – la vera natura delle grandezze infinite. Poco importava da questo punto di vista che anche Newton non fosse stato poi in grado di darne una formalizzazione coerente (cosa che peraltro Hegel – come detto – ritiene fuori dalla portata di chiunque):[67] l'attenzione di Hegel è rivolta principalmente all'aspetto concettuale-filosofico del calcolo e in tale ambito il metodo di Newton è evidentemente superiore a quello di Leibniz. Difficile pensare che Marx non fosse consapevole di questa 'supremazia concettuale' di Newton, non solo perché – come abbiamo ricordato nel secondo capitolo – egli conosceva bene le opere di quest'ultimo (e in particolare proprio i *Principia* dove, come sappiamo, si trova esplicitato il metodo delle prime e ultime ragioni), ma anche perché aveva letto ciò che ne pensava Hegel. Il fatto che egli non operi alcun distinguo tra le posizioni dei due matematici è quindi particolarmente significativo e rivela ancora una volta la natura prevalentemente matematica del suo interesse verso il calcolo. Marx non rileva la differenza concettuale tra la posizione di Newton e quella di Leibniz non perché non ne è cosciente, ma semplicemente perché non gli interessa. Ben più interessante ai fini del suo tentativo è sottolineare che alla fin dei conti anche Newton – come d'altronde lo stesso Hegel aveva riconosciuto – cade nello stesso identico errore commesso da Leib-

---

[67] Guerraggio 1982, 171: «Il metodo basato sulle quantità infinitesime veniva, nelle "Note", trattato in poche pagine con ironiche e severe espressioni sulla fondatezza delle sue giustificazioni. Newton invece era visto, a questo proposito, in una luce tutto sommato positiva, come chi aveva avuto una corretta intuizione del problema, pur senza arrivare ad una formulazione rigorosa e coerente con l'impostazione iniziale».

niz: quello cioè di aver sottoposto le nuove grandezze dell'analisi ai consueti procedimenti aritmetici e algebrici, senza interrogarsi preliminarmente sulla liceità di questa operazione. Da un punto di vista formale – che poi è quello che interessa maggiormente a Marx – il metodo delle prime e ultime ragioni presenta insomma gli stessi problemi di quello leibniziano e pertanto può essere tranquillamente accomunato a quest'ultimo.[68] Ci rendiamo quindi conto che in realtà sia Hegel, sia Marx sono perfettamente consapevoli dei pregi e dei difetti della posizione di Newton, ma – a seconda del proprio interesse e dei propri obiettivi – uno – Hegel – preferisce insistere sui primi, l'altro – Marx – sui secondi.

La stessa identica dinamica si può ritrovare anche nelle diverse valutazioni che i due danno del cosiddetto metodo dei limiti.[69] Hegel, che – come detto – è interessato soprattutto all'aspetto concettuale del calcolo e pertanto giudica i diversi metodi «tanto più apprezzabili quanto più si approssimano al concetto [di vero infinito]» (Moretto 1984, 185), tiene in grande considerazione il metodo dei limiti, proprio perché egli lo ritiene capace di render conto – meglio di altre rappresentazioni – del vero significato di *dx* e *dy*.[70]

> Nella rappresentazione cioè del limite sta bensì l'accennata vera categoria della qualitativa determinazione di rapporto delle grandezze variabili, poiché le forme che di esse si presentano, *dx* e *dy*, debbono assolutamente prendersi solo come momenti di $\frac{dx}{dy}$, e lo stesso $\frac{dx}{dy}$ si deve riguardare come un unico segno indivisibile (*ein einziges untheilbares Zeichen*). (*WdL III*, 266 [297])

[68] Guerraggio 1982, 175: «A suo giudizio, con le quantità evanescenti, Newton ha dato una versione dei procedimenti infinitesimali apparentemente più articolata e "moderna", senza però in realtà superare l'orizzonte presente nei suoi primi lavori e in quelli di Leibniz».

[69] Il riferimento non è qui naturalmente al metodo di Cauchy ma a quello di L'Huilier, d'Alembert e altri che avevano in qualche modo anticipato tale concetto, senza però riuscire a darne una definizione rigorosa e convincente.

[70] Moretto 1984, 194-195: «Hegel apprezza il metodo del limite poiché vi si accentua l'esigenza di considerare l'infinitesimale nella relazione, non già perché con questo metodo si cerchi un'alternativa all'assunzione dell'infinitesimale».

Ciò non impedisce comunque a Hegel di sottolineare che anche in questo caso – come era già avvenuto in precedenza con il metodo delle prime e ultime ragioni di Newton – la formalizzazione di tale concetto rimane legata ancora una volta alla sfera quantitativa, al punto che «il modo, in cui si cerca questo limite, porta seco le medesime incongruenze che si hanno negli altri metodi» (*WdL III*, 266 [298]). Nonostante questi difetti, che comunque secondo Hegel – come abbiamo ormai ribadito a più riprese – caratterizzano di fatto tutti i metodi di calcolo proposti fino a quel momento, il giudizio rispetto al metodo dei limiti rimane sostanzialmente positivo.[71] Anche in questo caso, messi sul piatto della bilancia, Hegel fa pesare più i pregi concettuali che i difetti formali della teoria. Lo stesso non vale invece per Marx che, al contrario, dà maggior risalto proprio all'aspetto formale dei singoli metodi di calcolo[72] e conduce pertanto la sua analisi in base a parametri completamente diversi rispetto a quelli adottati da Hegel.[73] Non è un caso quindi che i rilievi di Marx sul metodo dei limiti siano piuttosto critici, come dimostrano, tra le altre, le considerazioni contenute nel manoscritto *Sull'ambiguità dei termini "limite" e "valore limite"* (*Über die Mehrdeutigkeit der Termen "Grenze" und "Grenzwert"*).[74] Non una parola viene qui spesa sugli eventuali pregi concettuali della teoria, ma l'attenzio-

[71] Guerraggio 1982, 172: «Hegel […] giudicava positiva la "categoria" di limite in quanto espressione del passaggio da un dato tipo di grandezze ad altre, qualitativamente diverse, né le difficoltà in cui i matematici si imbattevano per trasferire in un sistema coerente di calcolo questa trasformazione qualitativa gli sembravano tali da portare ad una modifica del giudizio».

[72] Significativo a questo proposito il commento marxiano sul metodo di calcolo di d'Alembert. Cfr. *MR*, 218-237 [181-194]; Guerraggio 1982, 184-188.

[73] Guerraggio 1982, 172: «In Marx, valutazioni di questo tipo [il riferimento è alle considerazioni di Hegel] risultano del tutto assenti; l'accento viene posto sul procedimento di limite, analizzato per quello che è, per la situazione nella quale si trova e per le difficoltà quindi che incontra a passare dalla fase intuitiva a quella della formulazione rigorosa».

[74] *MR*, 212-217 [177-180]. Per un'analisi più approfondita di questo manoscritto, cfr. Guerraggio 1982, 173-175.

ne di Marx è rivolta esclusivamente alle pecche formali del metodo, a ennesima dimostrazione di quale fosse la natura del suo interesse per il calcolo e della distanza che – su questo preciso punto – lo separa da Hegel.

Distanti Hegel e Marx lo sono anche nell'interpretazione che l'uno e l'altro danno del significato dei differenziali. Per Marx infatti i differenziali non sono – come per Hegel – quanti infiniti, delle determinatezze qualitative di quantità, ma dei simboli di operazione, che «si formano come espressioni soltanto simboliche di processi di differenziazione eseguiti algebricamente» (*MR*, 64 [72-73]). Insomma, pur concordando con Hegel nella *pars destruens*, nel ritenere cioè che l'errore della matematica della loro epoca sia stato quello di considerare gli infinitesimali come grandezze infinitamente piccole, Marx ne prende invece le distanze nella *pars costruens*, attribuendo agli infinitesimi un significato che di fatto non trova alcuna corrispondenza nelle pagine della *Scienza della logica*.[75] Val la pena approfondire la posizione marxiana su questo punto, perché – come avremo modo di vedere – anche in questo caso – pur nella differenza di fondo che, come appena detto, distingue i due filosofi – sarà possibile riconoscere nelle considerazioni di Marx la presenza di elementi di chiara origine hegeliana.

Come sottolineato poco sopra, il problema che – a detta di Marx – contraddistingueva il calcolo di Newton e di Leibniz era quello di aver introdotto il differenziale come già dato, trattandolo 'aproblematicamente' – senza cioè nessuna preliminare riflessione sul suo significato e sulle leggi cui esso risultava sottoposto – come un'ordinaria grandezza algebrica. Per superare le complicazioni che derivavano da questo modo di procedere, Marx ritiene

---

[75] Alcouffe 1985, 99: «Au lieu de exploiter ce qui, dans la formulation hegelienne pouvait conduire à une opposition à l'intérieur de la catégorie des nombres, la solution de Marx retient la suppression de la qualité de nombre et fait de *dx*, *dy* des symboles d'opérations. Marx, ici, écarte de la "Aufhebung" subie par les *dx*, *dy* les remarques sur la "précision quantitative qui demeure" pour ne conserver que celles sur la "suppression du quantum en tant que tel"».

opportuno partire da un'equazione algebrica, perché essa – attraverso il simbolo di uguaglianza – è in grado di collegare correttamente lato simbolico e lato reale e di mostrare in questo modo come il simbolo collocato sulla sinistra abbia avuto effettivamente origine, facendolo emergere come risultato di quelle operazioni reali che si svolgono alla sua destra.[76] Per capire un po' meglio che cosa Marx intende e per illustrare il metodo di differenziazione proposto all'interno del manoscritto *Sul concetto di funzione derivata*, vale la pena prendere in considerazione un esempio concreto. Consideriamo dunque la funzione $y = x^3$. Per trovare la derivata, Marx assume come punto di partenza che x passi effettivamente in x_1.[77] In questo modo $f(x)$ diventa $f(x_1)$ e compaiono le differenze $x_1 - x$ e $f(x_1) - f(x)$, dove la prima differenza, naturalmente, è diversa da zero, dal momento che $x_1 \neq x$. A questo punto si procede alla costruzione del rapporto differenziale:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{{x_1}^3 - x^3}{x_1 - x}$$
$$= \frac{(x_1 - x)({x_1}^2 + xx_1 + x^2)}{x_1 - x} = {x_1}^2 + xx_1 + x^2$$

Otteniamo così una $f(x, x_1)$ che Marx chiama «funzione derivata provvisoria di x» (*MR*, 32 [52]). A differenza di tutti i metodi precedenti – compreso quello di Lagrange – dove a questo punto la derivata era già pronta e doveva solo essere liberata dai termini 'superflui' che la accompagnavano,[78] in questo caso «essa esiste

[76] Guerraggio 1982, 184: «Il passaggio dal calcolo algebrico a quello differenziale non può allora essere dato, per Marx, che da una successione di uguaglianze in cui lo sviluppo dei primi membri proceda contestualmente a quello dei secondi, in modo che i nuovi simboli siano mostrati nella loro origine algebrica, avendo sempre di fronte a sé le reali operazioni che vengono a rappresentare».

[77] Kennedy 1977, 311: «First of all he treats the variable as truly variable».

[78] *MR*, 160 [137]: «Mentre prima attraverso il porre $(x + \Delta x)$ dove, nella funzione originaria, stava x, la derivata era fornita già pronta attraverso il binomio […], invece dalla forma diretta del monomio ${x_1}^3$, che è x accresciuta, non la si può altrettanto direttamente fare derivare come era possibile a partire da x^3».

solo “in stato embrionale” e va ottenuta, coerentemente con il progetto di differenziazione, come “espressione minimale” della derivata provvisoria» (Guerraggio 1982, 195).[79] Per ottenere questa «espressione minimale» – prosegue Marx – occorre «porre $x = x_1$, quindi in senso strettamente matematico $x_1 - x = 0$, lasciando perdere le frottole di una approssimazione soltanto infinita» (*MR*, 34 [53]). Così facendo, nel caso di una funzione algebrica come quella considerata qui,[80] otteniamo:

$$\frac{0}{0} = \frac{dy}{dx} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2$$

Il primo membro diventa $\frac{0}{0}$, mentre il secondo membro – $x_1^2 + xx_1 + x^2$ –, anche se sottoposto a un passaggio che di fatto annulla quello precedente che l’ha generato, non ritorna al punto di partenza, ma anzi, al contrario, dà come risultato $f'(x)$, ovvero la «funzione derivata di x» (*MR*, 32 [52]). In questo modo il simbolo $\frac{0}{0}$ ottiene, algebricamente, una definizione chiara e precisa, poiché al secondo membro gli corrisponde un’espressione reale e determinata e il calcolo risulta correttamente fondato. Marx scrive:

> La catastrofe trascendentale o simbolica (*das transzendentale oder symbolische Unglück*) avviene solo al primo membro, ma ha già perduto il suo orrore, dal momento che così appare solo come espressione

[79] Alcuni studiosi hanno sottolineato come Marx avesse qui in mente l’idea di limite. Marx tuttavia sceglie di parlare di espressione minimale (*absoluter Minimalausdruck*) perché a suo modo di vedere «il concetto di valore limite è ambiguo (*missdeutbar*) e viene sempre interpretato erroneamente (*wird missdeutet*)» (*MR*, 216 [180]). Va detto tuttavia che Marx non si mantiene sempre fedele a questa terminologia, anzi riconosce esplicitamente che una precisazione del concetto di limite, come viene ad esempio spiegato nel *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* di Lacroix, renderebbe superflua l’introduzione di un neologismo: «Questa categoria, che specialmente Lacroix ha ampiamente trattato analiticamente, diventa importante come sostitutiva della categoria “espressione minimale” sia della derivata in opposizione alla “derivata provvisoria”, sia del rapporto $\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$, quando si tratta dell’applicazione del calcolo alle curve» (*MR*, 128 [116]).

[80] Marx ripete il procedimento anche per altri tipi di funzioni, come quelle trascendenti. Per un approfondimento, cfr. *MR*, 28-44 [49-60].

> di un processo che ha già mostrato il suo effettivo contenuto al secondo membro dell'equazione. (*MR*, 36 [54])

Ora, se da una parte è vero che in questo modo il simbolo $\frac{0}{0}$ viene introdotto nel calcolo appropriatamente, illustrando cioè i singoli passaggi algebrici che ne sono alla base, è altrettanto vero, dall'altra, che tale simbolo risulta – a detta di Marx – ambiguo e quindi inappropriato. Perché? Lasciamo rispondere direttamente Marx:

> Poiché nell'espressione $\frac{0}{0}$ è cancellata ogni traccia della sua origine e del suo significato, sostituiamo tale espressione con $\frac{dy}{dx}$, dove le differenze finite $x_1 - x$ ovvero Δx, e $y_1 - y$ ovvero Δy appaiono simbolizzate come differenze abolite o scomparse (*aufgehobne oder verschwundene Differenzen*),[81] ovvero $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ trapassa in $\frac{dy}{dx}$. (*MR*, 32 [51])

In altre parole, secondo Marx il simbolo $\frac{0}{0}$ non è in grado di render conto pienamente del suo significato perché qui viene a perdersi completamente qualsiasi riferimento alla relazione tra le variabili originarie dell'equazione di partenza, che ci dice ad esempio che lo zero al numeratore è semplicemente una conseguenza dello zero al denominatore: questo significato emerge invece in modo evidente nel simbolo $\frac{dy}{dx}$.[82] In questo lungo passaggio dei *Manoscritti matematici* – che non compare nella traduzione italiana – Marx illustra esplicitamente il suo pensiero su questo punto:

> Nell'espressione $\frac{0}{0}$ è però ugualmente scomparso questo rapporto qualitativo (*dies qualitative Verhältnis*) tra la funzione y e la grandezza variabile x di cui è funzione. Ogni traccia della differenza qualitativa tra numeratore e denominatore, tra la funzione della grandezza variabile e la grandezza della variabile stessa, è cancellata nell'espressione $\frac{0}{0}$.
>
> Per esprimere dunque l'origine e il senso di $\frac{0}{0}$, poniamo, per il Δx che sta scomparendo, dx per cui di per se stesso il Δy che sta scomparendo diventa dy.

---

[81] Si noti qui la corrispondenza lessicale con la *Scienza della logica* di Hegel.

[82] Ponzio 2005, 34: «Marx mostra come in $\frac{dy}{dx}$ risulti la genesi e il significato di $\frac{0}{0}$, nel senso che esso esprime, diversamente da $\frac{0}{0}$, il rapporto qualitativo tra la funzione y e la grandezza variabile x, di cui y è funzione; la differenza qualitativa tra numeratore e denominatore, tra funzione della grandezza variabile e grandezza variabile stessa, differenza che invece è cancellata in $\frac{0}{0}$».

> $\frac{dy}{dx}$ è dunque non solo un simbolo per $\frac{0}{0}$, è allo stesso tempo un simbolo per il processo da cui è scaturito $\frac{0}{0}$ nelle determinate condizioni date dall'equazione originaria; e esprime anche – ciò che $\frac{0}{0}$ non può esprimere – che il diventare zero di Δx scaturisce dal rapporto qualitativo della funzione y alla grandezza variabile x, e la trasformazione di Δy in dy è perciò conseguenza della trasformazione di Δx in dx. Così nella negazione viene tenuto fermo il rapporto qualitativo di ciò di cui essa è negazione. Al contrario in $\frac{0}{0}$ non si indica ciò che scompare; è espresso solo l'aspetto quantitativo che il numeratore è scomparso e il denominatore idem, e perciò scompare il rapporto stesso; non è espresso il rapporto qualitativo, che esiste, essendo lo zero al numeratore solo una conseguenza dello zero al denominatore, quindi essa stessa un'espressione della dipendenza della grandezza variabile di cui è funzione. (*MR*, 291-292 [trad. it. in Guerraggio 1982, 199])

Queste righe sono particolarmente interessanti perché Marx dimostra qui di recuperare – se non addirittura di riprendere parola per parola – le riflessioni di Hegel su questo punto. Commentando il metodo di calcolo di Eulero – che, come sappiamo, aveva interpretato gli infinitesimi come quantità nulle – Hegel scrive infatti che «questa rappresentazione arriva dunque sino al negativo del quanto e lo esprime determinatamente, ma non afferra insieme questo negativo nel suo significato positivo, di determinazioni qualitative della quantità (*qualitativen Quantitätsbestimmungen*)» (*WdL III*, 257 [287]) e che «l'intelletto deve oltrepassare questo lato semplicemente negativo, che i termini del rapporto sono zeri come quanti, e comprende i termini stessi positivamente, come momenti qualitativi (*qualitative Momente*)» (*WdL III*, 258 [288]). Il rischio di considerare le grandezze infinitamente piccole come zeri – sottolinea Hegel – è dunque quello di perdere il concetto di relazione tra le variabili in questione, che è invece di fondamentale importanza, come dimostra il fatto che anche in un rapporto di variabili che tendono a zero, tali variabili non possono essere scambiate tra loro:

> Siccome ora con ciò accadde che gl'incrementi o differenza infinite venner considerate solo dal lato del quanto che in esse si dilegua (*verschwindet*), […] così coteste differenze son prese in questo modo come momenti irrelativi. Da ciò nascerebbe l'inammissibile conseguenza che

> nell'ultimo rapporto sia lecito di eguagliare fra loro p. es. l'ascissa e l'ordinata, oppure anche il seno, il coseno, la tangente, il *sinus versus* e via dicendo. (*WdL III*, 269 [301])

Nonostante le innegabili differenze di fondo, le assonanze tra il pensiero di Marx e quello di Hegel su questo punto sono insomma numerose, a partire dal riferimento marxiano al rapporto qualitativo;[83] riferimento che rivela in modo pressoché incontestabile non solo il suo debito nei confronti della *Scienza della logica* hegeliana, ma anche – seppur indirettamente – nei confronti del calcolo newtoniano e leibniziano. Va infatti detto che l'idea di rapporto qualitativo – per quanto originale possa apparire ai nostri occhi e soprattutto alle nostre menti abituate al linguaggio e alle formule rigorose dell'analisi classica – non è in realtà un'invenzione di Hegel, ma si può ritrovare già in Newton e in Leibniz.[84] A questo proposito ricordiamo ad esempio – come suggerisce anche Moretto –[85] che nelle sue opere Newton parla di 'ultima forma' e di 'ultima ragione' delle grandezze evanescenti, espressioni che egli utilizza per indicare che nel loro tendere verso zero tali grandezze – pur perdendo ogni estensione quantitativa – conservano invece la loro qualità, continuando di fatto a obbedire a quella relazione cui rispondevano prima del loro svanire. Lo stesso concetto si trova espresso – in termini diversi naturalmente – anche in Leibniz. In una lettera al matematico italiano Guido Grandi, datata 6 settembre 1713, Leibniz scrive:

> Nondimeno intendiamo le quantità infinitamente piccole non come zeri semplicemente ed assolutamente, ma come degli zeri relativi (come tu stesso opportunamente rilevi), vale a dire come grandezze evanescenti sì nello zero, ma che tuttavia conservano il carattere (*charachterem*) di

---

[83] Moretto 1978, 215: «Abbiamo così assistito ad un insospettato ritorno al concetto, sostenuto da Hegel, di "rapporto qualitativo"».

[84] Moretto 1984, 284-285: «La convinzione che l'infinitesimale esprima un contenuto qualitativo trova il suo presupposto nel pensiero matematico con cui si forma l'analisi dell'era moderna».

[85] Cfr. Moretto 1984, 285.

ciò che svanisce. (Leibniz 1962, Bd. 4, 217 [trad. it. in Moretto 1984, 287, n. 85])

Qui Leibniz intende mettere in risalto proprio la caratteristica degli infinitesimali di saper conservare il carattere (termine dall'evidente connotazione qualitativa) delle grandezze di partenza, di essere – come egli stesso li definisce – degli 'zeri relativi' ovvero quantità con estensione nulla (come dimostra il loro comportamento nelle somme con grandezze ordinarie), ma dotate comunque di intensione/qualità.

A dispetto di quanto ci si poteva immaginare quindi, il riferimento di Hegel e di Marx alla qualità degli infinitesimali – lungi dal rappresentare un elemento di originalità del loro pensiero – segnala al contrario la strettissima connessione tra le speculazioni dei due filosofi e la matematica della loro epoca, in particolare quella del Settecento e del primissimo Ottocento, che – come abbiamo detto – rimane fortemente condizionata dalla formulazione newtoniana e leibniziana del calcolo (seppur con le ovvie differenze tra le due impostazioni). Ciò da una parte conferma – se ancora ce ne fosse bisogno – l'impossibilità di ricondurre le idee hegeliane e marxiane allo spirito della matematica della seconda metà dell'Ottocento e dall'altra – recuperando un concetto presente in Newton e Leibniz – sembra contrastare almeno in parte con le pesanti critiche che Hegel e soprattutto Marx avevano rivolto ai loro sistemi di calcolo.[86]

§3.2 *Matematica e storia della matematica*

Come abbiamo potuto notare, nell'illustrare la propria posizione sulla questione dei principi dell'analisi infinitesimale, Hegel e Marx dedicano entrambi grande spazio a considerazioni di carattere storico.[87] Queste osservazioni non vanno considerate

---

[86] Cfr. Moretto 1978, 215.

[87] Assieme ai manoscritti *Sulla funzione derivata* e *Sul differenziale*, Marx aveva intenzione di inviare a Engels un terzo manoscritto dedicato proprio alla

come parentesi erudite, come semplici introduzioni o appendici, che tutto sommato potrebbero essere trascurate perché superflue nello sviluppo del discorso hegeliano e marxiano sul calcolo. Le parti storiche delle *Note* e dei *Manoscritti* non sono mere curiosità, ma costituiscono, al contrario, parte integrante delle riflessioni dei due filosofi. Le proposte di Hegel e di Marx sui fondamenti del calcolo nascono infatti proprio tenendo conto dell'insufficienza e della parzialità delle risposte date fino a quel momento e dalle difficoltà incontrate dai matematici della loro epoca a trovare una sistemazione rigorosa all'analisi. Nelle riflessioni di Hegel e di Marx, emerge molto chiaramente «la riaffermazione dello stretto rapporto tra matematica e sua storia, che non è più estranea al discorso strettamente propositivo» (Guerraggio 1982, 237).[88]

A questo proposito va detto che l'estensione del quadro storico tracciato da Hegel e da Marx è sostanzialmente paragonabile, anche perché – come abbiamo sottolineato in precedenza –[89] i riferimenti bibliografici dei due sono praticamente gli stessi. Su questo punto mi sento pertanto di dissentire da Guerraggio,[90] secondo il quale le riflessioni storiche di Marx sarebbero molto più articolate e più approfondite di quelle di Hegel, perché capaci di tener conto delle teorie di matematici come Taylor, MacLaurin, Laplace, Poisson, che invece non trovano posto all'interno della *Scienza della logica*. Ora, al di là del fatto che quelli appena citati sono tutti autori minori che Hegel – pur non dedicando loro particolare attenzione – di fatto conosceva (a eccezione di Poisson), va detto che anche nelle pagine hegeliane possiamo trovare nomi di matematici che non vengono considerati da Marx, come ad

---

storia del calcolo infinitesimale. Questo lavoro non venne mai portato a termine: ci rimangono solo alcune indicazioni e abbozzi. Cfr. Yanovskaja 1983, XIX.

[88] Galuzzi-Guerraggio 1979, 258: «Non si tratta quindi di una storia neutrale e falsamente oggettiva, ma è la premessa indispensabile per l'agire matematico. Comprendere come storicamente si è formato il pensiero è essenziale per poter avviare un discorso corretto».

[89] Cfr. *supra*.

[90] Cfr. Guerraggio 1982, 170-171.

esempio – giusto per fare alcuni nomi – Fermat, Barrow, Cavalieri, Keplero ecc.

Sarebbe tuttavia sbagliato impostare il confronto tra le riflessioni storiche di Hegel e di Marx su basi meramente quantitative, cioè – molto banalmente – sul numero di matematici citati dall'uno e dall'altro. Molto più importante considerare invece quali matematici trovano spazio nelle pagine hegeliane e marxiane dedicate al calcolo. E in questo senso possiamo dire che gli autori fondamentali con cui Hegel e Marx si confrontano sono gli stessi. Come sottolineato anche in precedenza, l'ultimo grande protagonista della storia del calcolo, con il quale i due si misurano, è Lagrange. Entrambi ignorano o comunque non prendono in considerazione i più recenti e fondamentali sviluppi dell'analisi dell'Ottocento, a partire dai contributi di Cauchy. Questo significa che le loro critiche si rivolgono sostanzialmente alla matematica del Settecento e del primissimo Ottocento, una matematica che – come detto – palesava grandi difficoltà nel trovare una risposta soddisfacente ai problemi di fondazione del calcolo messi in luce da Berkeley. Le riflessioni di Hegel e di Marx vanno pertanto collocate all'interno di questo contesto e valutate sulla base delle conoscenze a loro disposizione, che rimanevano inevitabilmente condizionate dallo sviluppo che la matematica aveva raggiunto all'inizio dell'Ottocento.[91] Da questo punto di vista, è molto interessante notare che sia Hegel sia Marx non si limitano a riprendere e a ripetere sterilmente le solite obiezioni critiche che venivano abitualmente rivolte all'analisi del Seicento e del Settecento dai matematici della loro epoca. Pur condividendo la richiesta di maggior rigore avanzata da quest'ultimi, Hegel e Marx – come abbiamo visto – riformulano le critiche ai vari metodi di calco-

---

[91] Guerraggio 1982, 248: «Il giudizio sul valore matematico delle "*Note*" non può non tener conto del momento storico in cui sono state redatte […]. Questo è il motivo per cui, pur consapevoli dei limiti matematici oggi ravvisabili nelle "*Note*", non ci sembra davvero corretto fare l'esame di analisi a Hegel rimproverandolo di non aver ben studiato i capitoli sui limiti, sulle serie e la loro convergenza».

lo in modo originale, sulla base delle loro personali convinzioni e senza mai assumere un atteggiamento di rifiuto nei confronti delle proposte del passato, di cui oltre ai difetti vengono sempre messi in luce anche i meriti.[92]

È molto importante sottolineare infine che Hegel e Marx – nel tentativo di trovare una soluzione alla questione dei fondamenti del calcolo – decidono di risalire fino a Newton e a Leibniz, nonostante avrebbero potuto – volendo – limitarsi a prendere in considerazione solamente le impostazioni più recenti, come ad esempio quella di Lagrange. Questa scelta è – secondo Guerraggio –[93] particolarmente significativa perché dimostra come Hegel e Marx fossero consapevoli che il progresso della matematica non avviene secondo un'unica direzione. La matematica non ha per forza di cose uno sviluppo lineare e la sua storia non va considerata, a priori, una semplice successione di teorie interpretabili sempre come superamento e generalizzazione di quelle precedenti. Questa è solo una delle possibili linee di sviluppo della matematica, che tuttavia può evolversi anche seguendo percorsi diversi e imprevedibili, capaci di valorizzare i momenti di discontinuità, come dimostra proprio la storia del calcolo.

Pensare che la matematica si possa sviluppare solo ed esclusivamente in maniera lineare – come spesso e volentieri, ingenuamente, siamo portati a credere – ci ha condotto ad attribuire scarsa importanza alla storia di questa disciplina. Questa tendenza si riflette ad esempio sulla scelta di molti manuali di matematica di non prestare particolare attenzione all'aspetto storico, che viene ridotto tutt'al più a qualche curiosità o a qualche nota sui nomi dei matematici che hanno formulato per primi un determinato teorema o una determinata legge, finendo per perdersi in ridicole discussioni sulla 'priorità' che non hanno alcun interesse

---

[92] Yanovskaja 1983, XIX: «In this way it would be unfair to represent the viewpoint of Marx as requiring the rejection of all other methods employed in differential calculus. If these methods are successful Marx sets himself the task of clarifying the secret of their success».

[93] Cfr. Guerraggio 1982, 237.

per la pratica matematica. D'altronde se si ritiene che le teorie e i risultati di oggi contengano come casi particolari quelli di ieri, allora conoscere il percorso che ci ha portati fino a dove siamo arrivati è del tutto irrilevante, perché «per poter andare avanti è sufficiente essere "aggiornati", conoscere il punto terminale che contiene in sé, corretti e generalizzati, tutti i tentativi precedenti» (Guerraggio 1982, 236). Da questo punto di vista Marx e Hegel hanno parecchio da insegnarci.

§3.3 *Calcolo e dialettica*

Nonostante in alcuni punti specifici delle riflessioni marxiane sul calcolo e sulle grandezze infinitamente piccole sia possibile cogliere piuttosto chiaramente l'eco delle considerazioni hegeliane su questi temi, l'aspetto che più di ogni altro avvicina le posizioni dei due autori e allo stesso tempo rivela in modo evidente – se non addirittura incontestabile – il debito di Marx nei confronti di Hegel è un altro e riguarda quella che potremmo definire la 'natura dialettica' del calcolo infinitesimale. Sia Hegel, sia Marx vedono infatti operanti nel calcolo infinitesimale metodi – come quello della negazione della negazione – e categorie – come quella della contraddizione – tipicamente dialettiche, al punto da poter tranquillamente affermare che nei *Manoscritti matematici* «è riscontrabile una concordanza di fondo con Hegel nel proporre una interpretazione dialettica del calcolo» (Moretto 1978, 209).

Come abbiamo sottolineato in precedenza,[94] già Berkeley e, come lui, molti altri matematici del Settecento e dell'Ottocento, avevano notato che il calcolo infinitesimale di derivazione newtoniana e leibniziana – trattando i differenziali come nulli e non nulli all'interno dello stesso procedimento – violava apertamente il principio di non contraddizione. Questa osservazione si ritrova – come avremo modo di vedere tra poco – anche nelle

[94] Cfr. *supra*.

riflessioni di Hegel e di Marx, ma con una differenza sostanziale: mentre in Berkeley e negli altri matematici dell'epoca la presenza della contraddizione veniva sfruttata per mettere in discussione il calcolo e far risaltare la mancanza di rigore che lo contraddistingueva, in Marx e (soprattutto) in Hegel questo rilievo ha al contrario una valenza positiva. Il calcolo mostrava infatti come, nonostante – o meglio, grazie – alla contraddizione e più in generale a tutta una serie di procedure che trasgredivano apertamente la logica ordinaria, fosse possibile non solo conseguire risultati validi, razionali e tra loro coerenti, ma addirittura contribuire al progresso e all'estensione della conoscenza (in questo caso matematica). In poche parole, il calcolo rappresenta per entrambi «un banco di prova per la costruzione di un sistema logico in cui si rinuncia in alcuni momenti ai consueti principi della logica formale, con indubbi benefici sotto l'aspetto euristico, e senza venir meno ad un più generale disegno razionale» (Moretto 1984, 298).

Già nel concetto di divenire – concepito come unità di essere e non essere – è possibile, secondo Hegel, cogliere la profonda affinità tra logica dialettica e analisi superiore.[95] Vale la pena soffermarsi un attimo su questo punto. Hegel parte dal constatare che la «semplice dialettica ordinaria» (*WdL III*, 90 [96]) – assumendo come presupposto l'assoluta separazione tra essere e nulla – nega di fatto la possibilità del cominciare e del cessare e con essi del divenire: «nulla può cominciare, né in quanto è, né in quanto non è; perché in quanto è, non comincia soltanto; e in quanto non è, ancora non comincia. […] Per la stessa ragione non è possibile che qualcosa cessi. Perché in tal caso l'essere dovrebbe contenere il nulla, mentre l'essere è soltanto l'essere, e non già il contrario di se stesso» (*WdL III*, 91 [96]). Nel momento in cui, pur partendo da questo presupposto, si ammette il divenire, si finisce inevita-

[95] Moretto 1984, 319: «A questo riguardo riteniamo particolarmente significativo che proprio all'inizio della prima sezione della *Scienza della logica*, nella prima manifestazione logica della contraddizione, ossia nel "divenire", Hegel si riferisca alla grandezza evanescente per illustrare la sua dialettica, che ritiene necessaria l'assunzione della contraddizione».

bilmente per cadere in una contraddizione dalla quale non si è più in grado di venir fuori.[96] Ora, rimanendo all'interno della dialettica ordinaria, dove – come detto – essere e nulla sono nettamente distinti l'uno dall'altro, l'ammissione delle grandezze evanescenti – che sono «determinate come tali che sono nel loro sparire (*in ihrem Verschwinden*), non prima del loro sparire (perché allora son grandezze finite), né dopo il loro sparire (perché allora non sono nulla)» (*WdL III*, 91-92 [97]) – risulta tanto problematica quanto quella del divenire.[97] Non a caso – sottolinea Hegel – le obiezioni sollevate contro l'ammissione delle grandezze evanescenti sono sostanzialmente le stesse di quelle avanzate contro l'ammissione del divenire: «quello che abbiam riferito è anche la stessa dialettica adoprata dall'intelletto contro il concetto che l'analisi superiore dà delle grandezze infinitamente piccole. [...] Contro questo puro concetto è stato obiettato e poi sempre ripetuto, che tali grandezze o son qualcosa, oppure non son nulla; che fra l'essere e il nulla non si dà uno stato medio (*Mittelzustand*)» (*ibidem*). Il calcolo infinitesimale, con Leibniz e soprattutto con Newton, mostra invece come proprio a partire da questo «stato medio» (un'espressione che Hegel considera in realtà inappropriata)[98] sia possibile costruire una teoria che «deve i suoi più brillanti successi all'aver ammesso quella determinazione, cui

[96] *WdL III*, 91 [97]: «Nella supposizione dell'assoluta scissione dell'essere dal nulla (*Voraussetzung der absoluten Geschiedenheit des Seyns vom Nichts*), il cominciamento o il divenire è assolutamente, come così spesso si sente dire, qualcosa d'incomprensibile; giacché si fa una supposizione che toglie via il cominciamento o il divenire, mentre questo poi daccapo si ammette, e l'incomprensibile (*das Unbegreifliche*) è appunto questa contraddizione, che noi stessi abbiamo posta, e di cui abbiamo resa la soluzione impossibile».

[97] *Enz. C*, 128 [269-270, corsivo mio]: «Tanto l'essere nel divenire, come unità con il nulla, quanto il nulla come unità con l'essere, sono soltanto *evanescenti* (*verschwindende*); il divenire, mediante la sua contraddizione in sé, sfocia nell'unità in cui entrambi sono superati; il suo risultato quindi è l'essere determinato».

[98] *WdL III*, 252 [281]: «Uno stato sarebbe una determinazione dell'essere e del nulla, nella quale questi momenti venissero a trovarsi solo in certo modo accidentalmente (*zufälligerweise*), quasi come in una malattia o in un'affezione ester-

l'intelletto contraddice» (*WdL III*, 92 [97]). Nel calcolo infinitesimale, Hegel sembra trovare una conferma della possibilità di usare 'positivamente' la contraddizione,[99] al contrario di quanto sostenuto dalla logica e – conseguentemente – dalla matematica tradizionali, in cui si riteneva che l'ammissione della contraddizione implicasse la possibilità di trarre da essa ogni conseguenza (sulla base del principio *ex falso quodlibet*),[100] con il risultato di rendere insignificante il discorso[101] e dove pertanto della contraddizione veniva fatto un uso solo ed esclusivamente negativo, come ad esempio accadeva nelle dimostrazioni *ad absurdum*.[102] Per la logica e la matematica ordinarie – governate dall'intelletto (*Verstand*) e fondate sul principio di bivalenza – ammettere il concetto di divenire oppure quello di evanescente portava con sé un momento di assoluta criticità, perché ciò significava in ultima istanza ammettere la contraddizione.[103] Al contrario, «la ragione, assumendo inizialmente questa contraddizione, lungi dall'incontrare l'insignificanza di ogni discorso, accede a un più ampio disegno razionale, e quindi incontraddittorio: siamo cioè di fronte alla "assunzione incontraddittoria della contraddizione",

---

na, per causa di un erroneo pensare; ma questo mezzo e questa unità, il dileguarsi (*das Verschwinden*) o in pari maniera il divenire, è anzi esso solo la lor verità».

[99] Moretto 1984, 317: «Il calcolo infinitesimale […] rappresenta per certi aspetti un precedente illustre di una teoria logico-matematica in cui si fa ricorso alla contraddizione».

[100] Sider 2010, 103: «But in standard propositional logic, everything follows from a contradiction, via the principle of *ex falso quodlibet*: $\phi, \neg\phi \vdash \psi$».

[101] Wittgenstein 1976, 244 [trad. it. in Cellucci 1981, 139]: «Lo scopo di evitare una contraddizione non è quello di evitare una specifica non verità su questioni logiche, ma di evitare l'ambiguità risultante – di evitare di arrivare a un punto da cui si può andare in ogni direzione».

[102] Sider 2010, 48: «To establish a claim of the form "not-A", one would ordinarily i) assume A, ii) reason one's way to a contradiction, and iii) on that basis conclude that "not-A" is true. Once the assumption of A is shown to lead to a contradiction, "not-A" may be concluded».

[103] Moretto 2004, 64: «Il divenire è la contraddizione dell'essere e del non-essere, così come le grandezze evanescenti sono la contraddizione delle grandezze nulle e non nulle».

che, ripetiamo, può essere compresa solo mediante l'abbandono della logica del *Verstand* in favore dell'accoglimento della logica della *Vernunft*» (Moretto 1984, 272-273).[104] Nel calcolo abbiamo dunque a che fare con la vera dialettica, che consiste nel «superior movimento razionale, dove tali, che sembrano assolutamente separati, passano l'un nell'altro per se stessi, mediante quello appunto ch'essi sono, e dove la supposizione [del loro esser separati] si toglie via (*sich aufhebt*)» (*WdL III*, 92 [97-98]).

Hegel dimostra insomma di apprezzare «ciò che sta concettualmente alla base di molti metodi infinitesimali: il concetto di infinitesimo con l'assunzione di contraddizione che esso comporta, e che tuttavia permette lo sviluppo di una teoria razionale» (Moretto 1984, 306).[105] La presenza della contraddizione nel calcolo e l'uso 'positivo' che ne viene fatto al suo interno sono due aspetti su cui Hegel insiste particolarmente nelle sue opere, non solo nella *Scienza della logica*. Già all'interno della *Logica di Jena*, Hegel riconosce esplicitamente – come abbiamo già visto – che «il vero significato delle grandezze evanescenti dell'analisi <infinitesimale>» risiede nella contraddizione per cui «l'infinitamente piccolo non deve essere nulla e tuttavia non deve avere più alcuna grandezza» (*JS II*, 18 [21]). Nella sottosezione *Infinità*, con cui si conclude il *Rapporto semplice*, si precisa che «la vera infinità è l'esigenza realizzata, che la determinatezza si tolga; $a - A = 0$» (*JS II*, 33 [34]). Come suggerisce Moretto,[106] interpretando la diversa scrittura maiuscola e minuscola di a e A come un'indicazione della loro diversità, è possibile cogliere nell'espressione hegeliana $a - A = 0$ una rappresentazione – nella

[104] Blunden 1984, 2: «The point is to develop the science of contradictions – dialectics – and in application to mathematics, show how formal contradiction is one special case of contradiction. The point is not to avoid contradiction, but to learn how to handle contradiction, how to utilize contradiction within the essence of objects in order to consciously build up and concretize new concepts in the course of the resolution of these contradictions».

[105] Cfr. a questo proposito anche Moretto 1986.

[106] Cfr. Moretto 1984, 155.

forma $a = A$ *et* $a \neq A$ – della contraddizione dell'infinitesimale, per cui – ricorrendo al simbolismo leibniziano – $dx = 0$ *et* $dx \neq 0$. All'interno dell'*Enciclopedia*, Hegel scrive: «un concetto, a cui non spetti nessuno dei due caratteri tra loro contraddittori, oppure spettino entrambi, viene dichiarato logicamente falso, come per es., il concetto di circolo quadrato. Sebbene un circolo poligonale e un arco rettilineo siano altrettanto in contraddizione con questo principio, gli studiosi di geometria non esitano minimamente a considerare e trattare il circolo come un poligono dai lati rettilinei» (*Enz. C*, 150-151 [319]). Ma per Hegel l'importante non è solo sottolineare che la matematica superiore fa uso di ipotesi contraddittorie, ma anche e soprattutto che in questo modo, facendo uso della contraddizione, riesce a ottenere risultati corretti, razionali e compatibili con quelli ottenuti per via ordinaria.

Con tutta probabilità, fu proprio attraverso la lettura delle pagine hegeliane della *Scienza della logica* che Marx si rese conto dell'importanza che le categorie dialettiche potevano avere in matematica e soprattutto nel calcolo infinitesimale.[107] Va detto fin da subito che Marx si dimostra molto meno esplicito di Hegel su questo punto, nel senso che gli accenni alla 'dialetticità' del calcolo non sono così numerosi come quelli che troviamo invece nella *Scienza della logica*. Torneremo più avanti sulla questione; per il momento ci limitiamo a sottolineare che ciò, almeno in parte, ha a che fare con il carattere dei *Manoscritti matematici*, che – come abbiamo ricordato in precedenza –[108] non erano un'opera destinata alla pubblicazione, ma semplici appunti che Marx aveva redatto a uso personale.

All'interno dei *Manoscritti matematici*, Marx vede operante il metodo dialettico nel processo che porta alla costruzione della derivata. Sarebbe inutile riprendere qui nuovamente nel dettaglio

---

[107] Struik 1948, 182: «Marx, like so many dialectical thinkers before and after him, found unending fascination in the different definitions of the derivative and the differential, as is shown by a large amount of manuscript material which was found among his papers».

[108] Cfr. *supra*.

il metodo algebrico di Marx e pertanto rimandiamo alla trattazione che ne abbiamo fatto qualche pagina sopra.[109] Ci limitiamo a ricordare che nel corso del processo descritto da Marx, il secondo membro dell'equazione di partenza – pur subendo una trasformazione che in qualche modo invalidava quella da cui aveva avuto origine – non ritornava su se stesso, ma anzi dava vita alla derivata. È proprio in questo preciso punto che – secondo Marx – si rivela in modo evidente la 'dialetticità' del calcolo:[110]

> Porre in un primo tempo la differenziazione e successivamente rimuoverla di nuovo porta dunque letteralmente a nulla. Tutta la difficoltà nella comprensione dell'operazione differenziale (come in generale in quella della negazione della negazione) consiste precisamente in ciò: nel vedere come essa si distingua da tale semplice procedura e conduca perciò a risultati effettivi. (*MR*, 28 [49-50])

È chiaro che il passaggio fondamentale dell'intero procedimento – come Marx cerca di dimostrare con vari esempi (che coinvolgono sia funzioni algebriche come $y = ax$, $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$, $y = ax^m$, $y = \sqrt{a^2 + x^2}$, sia funzioni trascendenti come $y = a^x$) –[111] consiste proprio nel porre $x_1 = x$. È con questo passaggio infatti che il calcolo differenziale supera l'orizzonte limitato e limitante dell'algebra, dove annullare la differenza tra x_1 e x non è altro che un controsenso, che – come tale – priva di qualsiasi significato l'intera espressione. Marx sta qui facendo un uso della contraddizione che è in tutto e per tutto simile a quello che ne aveva fatto Newton, con l'unica differenza che mentre il primo pone – all'interno dello stesso procedimento – $x_1 \neq x$ e successivamente $x_1 = x$; l'altro – come abbiamo visto –[112] suppone dapprima che $o \neq 0$ e poi che $o = 0$. Particolarmente interessante nell'ottica del

---

[109] Cfr. *supra*.

[110] Guerraggio 1982, 197: «La categoria della negazione della negazione appare quanto mai adatta a configurare un procedimento che ritorna su se stesso ma non all'identità, bensì ad un livello più alto, senza perdere il risultato della prima negazione o uscita dall'identico».

[111] Per un approfondimento su questi casi, cfr. *MR*, 28-44 [49-60].

[112] Cfr. *supra*.

confronto tra le posizioni di Hegel e di Marx è notare che, all'interno della *Logica di Jena*, anche Hegel insiste sul fatto che nella differenziazione si assiste al passaggio da una grandezza x a una grandezza x_1, diversa da quella originaria. Più nello specifico, Hegel afferma che la grandezza viene qui sottoposta a un 'raddoppio': «un sistema di momenti che si determinano a vicenda è stato raddoppiato […]; nel raddoppio (*Verdopplung*) un momento appare in grandezza diversa» (*JS II*, 19 [22]). Il significato del raddoppio viene ribadito in una nota posta a margine del testo: «2 ascisse» (*JS II*, 18 [22]), che si riferisce evidentemente al differenziale in ascissa. Pur facendo qui esplicitamente riferimento allo schema del triangolo caratteristico, le osservazioni di Hegel – che proprio per questo motivo risultano connotate in senso geometrico – ricordano molto quelle di Marx.[113] Anche Hegel infatti riconosce che nel calcolo differenziale viene posta «un'uguaglianza di diversi (*Einheit der entgegengesetzten*)» (*JS II*, 20 [23]) e sottolinea in questo modo «l'estrema dialetticità di un procedimento che invece è insoddisfacente secondo la logica formale: si considerano dapprima due ascisse diverse, ed in tal modo si hanno due triangoli diversi ("raddoppio"); questi vengono successivamente considerati come uguali, e da questa contraddizione si ottiene un risultato esatto» (Moretto 1984, 276). Per Berkeley – e più in generale, all'interno dell'orizzonte della logica ordinaria –, questo modo di procedere non può essere accettato perché contravviene apertamente a quel lemma che egli considera «tanto evidente (*plain*) da non aver bisogno di alcuna dimostrazione» (Berkeley 1992, 173 [trad. it. mia]):

> Se per dimostrare una certa proposizione, si suppone qualche punto in virtù del quale sono dedotti altri punti, e successivamente il punto supposto è distrutto e respinto da una contraria supposizione; in questo caso, tutte le proposizioni dedotte devono essere invalidate e rifiutate, come se mai fosse stato introdotto nella dimostrazione. (Berkeley 1992, 173 [trad. it. in Guerraggio 1982, 252])

---

[113] Questo naturalmente non significa suggerire che Marx avesse letto la *Logica di Jena*.

Marx ritiene che il problema del calcolo non risieda tanto nella natura dialettica che da sempre l'ha contraddistinto, ma piuttosto nel fatto che questa natura dialettica sia stata sempre – o comunque per lungo tempo – interpretata in modo mistico e metafisico.[114] Per Marx, occorre invece precisare rigorosamente il metodo dialettico mostrando i singoli passaggi algebrici che spiegano l'articolarsi dei suoi momenti. Insomma, interpretando il quoziente differenziale come simbolo del processo reale di derivazione,[115] Marx non ritiene solo di aver fondato in modo rigoroso il calcolo, svincolandolo da quei presupposti metafisici che caratterizzavano l'analisi di Newton e di Leibniz, ma anche di essere riuscito, al contempo, a «rendere conto della legge dialettica della negazione della negazione, riconducendola ad un ben definito procedimento algebrico e liberandola così da interpretazioni metafisico-mistiche (dialettica collocata sulla testa)» (Moretto 1978, 205).

Nella sua presentazione al manoscritto *Sul concetto di funzione derivata*, Lombardo Radice si spinge addirittura a sostenere che «Marx dedica tanta attenzione e tanto sforzo di pensiero negli ultimi anni della sua vita alla fondazione del calcolo infinitesimale, perché trova in esso un argomento decisivo contro un'interpretazione metafisico-mistica della legge dialettica della negazione della negazione» (Lombardo Radice 1972, 275). Questa

---

[114] Moretto 1978, 203: «Le accuse di imprecisione e di debolezza fondazionale che sono state mosse al "calcolo" del XVII e nel XVIII secolo, hanno origine per Marx non tanto nella natura dialettica del calcolo, quanto nel tipo di dialettica "mistica" e "metafisica" che aveva interpretato quel calcolo». Cfr. anche Ponzio 2005, 33: «Se nel calcolo differenziale "mistico" si impiegavano procedure non giustificate matematicamente, non rigorosamente fondate sulla dimostrazione, ciò non era dovuto al loro carattere dialettico, […] ma era dovuto, al contrario, al fatto che esso si fondava su definizioni metafisiche».

[115] *MR*, 48 [62]: «Come risultato del processo di differenziazione che $f(x)$ doveva subire per trasformarsi in $f'(x)$, si poneva di fronte a quest'ultima, cioè al reale coefficiente differenziale, al primo membro, il suo sosia (*Doppelgänger*) $\frac{0}{0}$ ovvero $\frac{dy}{dx}$ come equivalente simbolico (*als symbolisches Äquivalent*). D'altra parte, in tal modo $\frac{0}{0}$, ovvero $\frac{dy}{dx}$, trovava in $f'(x)$ il suo equivalente reale (*reales* Äquivalent)».

posizione viene ribadita anche nella recensione all'introduzione alla traduzione italiana dei *Manoscritti matematici* di Ponzio e Matarrese,[116] – pubblicata in un articolo comparso sul «Corriere della Sera» – in cui Lombardo Radice dichiara esplicitamente che i *Manoscritti matematici* «si riferiscono esclusivamente alla questione filosofica della negazione della negazione» (Lombardo Radice 1975).

Sebbene la presenza di strutture dialettiche nel calcolo abbia indubbiamente rappresentato uno dei motivi che spinse Marx a interessarsi all'analisi, Lombardo Radice ne esaspera l'importanza. Sono almeno due i motivi che ci impediscono infatti di considerare i *Manoscritti matematici* un 'saggio sulla dialettica', come sembra suggerire Lombardo Radice:[117]

- innanzitutto, se così fosse, non si spiegherebbe il perché Marx – una volta raggiunto quest'obiettivo – non sia tornato a occuparsi di questioni filosofiche, senza perdere ulteriormente tempo con la matematica e con il calcolo infinitesimale, dai quali – stando all'interpretazione di Lombardo Radice – avrebbe ottenuto tutto ciò che di fatto gli interessava avere: ulteriore materiale esemplificativo con cui consolidare la sua interpretazione dello schema dialettico;
- come accennato in precedenza, all'interno dei *Manoscritti matematici* – anche di quelli non tradotti in italiano – i riferimenti espliciti alla legge della negazione della negazione e ad altre strutture dialettiche operanti nel calcolo non sono in realtà così numerosi come si potrebbe immaginare.[118]

---

[116] Cfr. Ponzio 1975; Matarrese 1975.

[117] Anche Blunden sembra sposare una tesi simile a quella di Lombardo Radice. Cfr. Blunden 1984, 1: «Marx's study of calculus was motivated, not by the intention of applying it in political economic work, nor for the advancement in mathematics, but in order to sharpen the weapons of his dialectical materialist method in the course of the resolution of philosophical problems that were presenting themselves to mathematicians».

[118] Oltre a quello precedentemente considerato (cfr. *supra*), vale la pena segnalare anche il seguente passaggio. *MR*, 84 [87]: «Nel caso delle funzioni con una sola variabile dipendente è stato mostrato come da una funzione x, per

Questi riscontri sono sufficienti a mostrare che – a differenza di quanto sostenuto da Lombardo Radice – in Marx «le osservazioni sulla dialettica non costituiscono mai lo scopo ultimo delle argomentazioni matematiche» (Guerraggio 1982, 218). Dall'altra parte, tuttavia, sarebbe sbagliato ritenere – sulla base di quanto detto – che Marx avesse attribuito scarsa importanza alla questione dialettica. Anzi – come detto – la possibilità di interpretare dialetticamente il calcolo – di cui Marx, con tutta probabilità, venne a conoscenza attraverso la lettura della *Scienza della logica* – ebbe, almeno inizialmente, un ruolo decisivo nell'orientare i suoi interessi verso il calcolo infinitesimale,[119] anche se successivamente, in una seconda fase – quella a cui risale la stesura dei *Manoscritti matematici* –, questi interessi si svilupparono in una direzione più specificamente matematica, nel senso che Marx finì molto probabilmente per interessarsi all'analisi infinitesimale in quanto tale.[120]

Una conferma dell'importanza che la presenza di strutture dialettiche nel calcolo ebbe per Marx si può trovare in alcune opere di Engels e in particolare nell'*Anti-Dühring*,[121] dove la matematica superiore e il calcolo vengono esplicitamente collocati all'interno di un orizzonte dialettico.[122] Engels afferma esplicitamente

---

esempio $f(x) = x^m$, si possa far derivare, per mezzo di una reale differenziazione e di un successivo annullamento (*Aufhebung*) della stessa, una seconda funzione di x, $f'(x)$, o, nel caso dato, mx^{m-1}».

[119] Guerraggio 1982, 216: «Per quanto riguarda le ragioni che inizialmente hanno indotto Marx ad occuparsi di matematica, è certo che non poco deve aver influito la lettura dei testi hegeliani, con la conseguente scoperta dell'importanza anche nella matematica delle categorie dialettiche».

[120] Guerraggio 1982, 216: «Dobbiamo pertanto pensare che le questioni matematiche abbiano finito per suscitare in Marx una notevole "curiosità" intellettuale, innestando sulla sua formazione un interesse specifico».

[121] Per il testo originale, cfr. *MEW* 20.

[122] Engels 1901, 135: «E ancora in modo più convincente apparisce la negazione delle negazioni nelle analisi superiori, in quella della addizione di grandezze illimitatamente piccole (*"Summationen unbeschränkt kleiner Größen"*), le quali il signor Dühring stesso riconosce per le più alte operazioni matematiche, e che nel linguaggio comune, vengono chiamati calcolo differenziale e integrale».

che facendo uso di procedimenti palesemente contraddittori, questa matematica «appronta, non solo dei giusti risultati, ma anche non conseguibili a mezzo delle matematiche inferiori» (Engels 1901, 118) e in ciò rivela la sua 'dialetticità':

> La matematica elementare, la matematica delle grandezze costanti si muove dentro i limiti della logica formale, per lo meno generalmente parlando; la matematica delle grandezze variabili, di cui la parte più importante forma il calcolo infinitesimale, non è altro che l'applicazione della dialettica ai rapporti matematici (*die Anwendung der Dialektik auf mathematische Verhältnisse*). Qui l'aspetto puramente dimostrativo passa decisamente in secondo piano di fronte alle molteplici applicazioni del metodo a nuovi campi d'indagine. Ma quasi tutte le dimostrazioni della matematica superiore, a partire dalle prime dimostrazioni del calcolo differenziale, considerate rigorosamente, dal punto di vista della matematica elementare sono false. E non può essere diversamente se, come qui avviene, si vogliono dimostrare per mezzo della logica formale, i risultati raggiunti in campo dialettico. Per un metafisico, come lo è il signor Dühring, voler dimostrare qualche cosa, con la semplice dialettica, sarebbe fatica sprecata, come lo fu per Leibniz e i suoi discepoli, quando vollero dimostrare ai matematici d'allora le proposizioni del calcolo infinitesimale. Il calcolo differenziale cagionò a loro le stesse convulsioni, che la negazione della negazione produce al signor Dühring» (Engels 1901, 132).[123]

Dalle parole di Engels emerge chiaramente la consapevolezza della radicale diversità che intercorre tra il calcolo infinitesimale da una parte e il calcolo algebrico – e più in generale la matematica elementare – dall'altra. I procedimenti impiegati nel calcolo non sono semplicemente diversi da quelli dell'algebra, ma risultano incomprensibili e addirittura sbagliati, tenendo come punto di riferimento le regole valide nella matematica inferiore. Il calcolo infinitesimale – scrive Engels – «nonostante tutte le proteste della sana mente umana (*des gesunden Menschenverstandes*), pone pure il diritto e il curvo (*Gerade und Krumm*) sotto certe condizioni simili e raggiunge successi, per i quali la intelligenza

[123] Ho apportato qualche modifica alla traduzione di Sofia Puritz sulla base dell'originale tedesco (cfr. *MEW* 20) e della traduzione proposta da Guerraggio (1982, 211).

sana dell'uomo non può rassegnarsi all'identità del diritto e del curvo» (Engels 1901, 116-117).[124]

Ora, ci sono diversi motivi per credere che l'insistenza con cui Engels, all'interno di quest'opera, sottolinea il ruolo della contraddizione e della dialettica nella matematica superiore, possa essere considerata – seppur con le dovute cautele – un lascito marxiano e riveli – di riflesso – il peso che all'epoca – quando l'influenza hegeliana era evidentemente ancora molto forte – Marx aveva attribuito a questo aspetto dell'analisi. Vediamo più nello specifico quali sono le ragioni che ci permettono di sostenere questa tesi:

1. Innanzitutto è difficile pensare che Engels potesse sostenere opinioni divergenti da Marx in un campo come quello matematico, in cui all'amico – come abbiamo visto – venivano riconosciute dichiaratamente una maggior preparazione e una maggior autorevolezza.

2. Va ricordato che all'epoca (l'*Anti-Dühring* venne redatto tra il 1876 e il 1878) – con il trasferimento di Engels a Londra – i rapporti tra i due amici si erano fatti particolarmente intensi. Non è difficile immaginare che durante questi incontri Marx ed Engels discutessero anche di matematica, un argomento che – come ben sappiamo – aveva sempre trovato spazio all'interno delle loro lettere.

3. L'*Anti-Dühring* venne sottoposto alla lettura di Marx, che vi contribuì anche con un capitolo scritto di proprio pugno.

Naturalmente questo non significa che le idee espresse nell'*Anti-Dühring* possano essere attribuite in tutto e per tutto a Marx, anzi, l'opera di mediazione e di rielaborazione engelsiana risulta evidente. Il discorso procede infatti a rilento, passando per esempi e casi particolari che spesso testimoniano la scarsa conoscenza che Engels aveva delle dinamiche matematiche. La consapevolezza che l'analisi infinitesimale non possa essere con-

[124] Anche in questo caso ho modificato leggermente la traduzione di Sofia Puritz, sostituendo il termine 'curvo' al molto meno efficace 'storto' della traduzione originale.

siderata un semplice sviluppo dell'algebra e che i suoi principi non possano essere ricondotti a quelli della matematica inferiore non si accompagna in Engels a una chiara formulazione della procedura differenziale, né tanto meno – come accade invece in Marx – a un'analisi delle modalità con cui la matematica giunge a superare i confini dell'algebra.[125] Nonostante il coefficiente differenziale venga caratterizzato – con parole che ricordano le considerazioni hegeliane – come «un rapporto quantitativo senza qualsiasi quantità (*ein qualitatives Verhältnis ohne alle Quantität*)» (Engels 1901, 135) e siano presenti tutta una serie di simboli e di termini che si ritrovano nel manoscritto marxiano *Sul concetto di funzione derivata*, Engels dimostra di seguire ancora il metodo di Newton e soprattutto di Leibniz,[126] riconoscendo esplicitamente di differenziare x e y, prendendo «x e y così infinitamente piccoli, che spariscono (*verschwinden*) di fronte a qualsiasi grandezza reale» (*ibidem*).

Le stesse riflessioni sulla dialettica appaiono talvolta inopportune e poco pertinenti, come quando Engels individua nel prodotto di due numeri negativi un esempio della legge dialettica di negazione della negazione.[127] Più in generale è il tentativo di Engels di rintracciare già nella matematica inferiore – radicalizzando la

---

[125] Moretto 1978, 209: «Engels è legato ad una "dialettica ancora collocata sulla testa", poiché concepisce il processo di negazione della negazione del calcolo differenziale semplicemente come un porre e poi negare la differenza, senza aver precisato algebricamente il processo».

[126] Molto probabilmente Engels fu influenzato dalla lettura del *Traités de calcul différentiel et de calcul intégral* del 1798 di Charles Bossut (1730-1814), che – come risulta anche dal suo *Essai sur l'histoire générale des mathématiques* (1802) – sosteneva la maggior validità del metodo di Leibniz rispetto a quello di Newton. Per ulteriori considerazioni, cfr. Guerraggio 1982, 253.

[127] Engels 1901, 134-135: «Prendiamo una qualunque grandezza algebrica: per es. a; la neghiamo, ed otteniamo $-a$. Neghiamo questa negazione, moltiplicando $-a$ con $-a$, e otteniamo $+a^2$, cioè l'originaria grandezza positiva, ma in grado superiore, cioè alla seconda potenza». Cfr. Guerraggio 1982, 210: «Trovare conferma alle leggi dialettiche nel fatto che "moltiplicando $-a$ per $-a$, avremo così $+a^2$, cioè la primitiva grandezza positiva, ma ad un grado più elevato, ossia alla seconda potenza" è solitamente visto (e non senza giustificati

posizione di Hegel e di Marx – la presenza di strutture dialettiche ad apparire poco convincente. Anche nella matematica elementare – sostiene Engels – «c'è un affastellamento di contraddizioni» (Engels 1901, 118), che si rivelano capaci – se correttamente sviluppate – di produrre importanti risultati, dimostrando l'errore di chi – attenendosi agli insegnamenti della logica formale – ritiene che «contraddizione è paradosso (*Widerspruch* = *Widersinn*)» (Engels 1901, 116). Ad esempio

> è una contraddizione che una grandezza negativa sia il quadrato di una qualche cosa, poiché una grandezza negativa moltiplicata per se stessa, dà un quadrato positivo. La radice quadrata del meno uno, è perciò non solo una contraddizione, ma una contraddizione assurda (*ein absurder Widerspruch*), un vero paradosso. Eppure $\sqrt{-1}$ è in molti casi un risultato necessario di giuste operazioni matematiche; anzi v'ha di più: in che consisterebbero le matematiche superiori e inferiori se non potessero operare con la $\sqrt{-1}$. (Engels 1901, 118-119)

Chiudiamo questa breve parentesi su Engels e cerchiamo di tracciare un bilancio conclusivo del ruolo che le considerazioni dialettiche hanno nella riflessione di Marx sul calcolo. Ora, se abbiamo visto che da una parte è eccessivo ritenere – come sostiene Lombardo Radice – che Marx avesse come unico obiettivo quello di ricercare nel calcolo differenziale un argomento a sostegno della sua interpretazione dello schema dialettico; dall'altra è altrettanto sbagliato – a mio avviso – negare completamente l'esistenza di questo aspetto, che caratterizza non solo la posizione di Marx, ma – seppur con le dovute distinzioni – anche quella di Hegel. Sia Marx, sia Hegel ritengono infatti che nel calcolo infinitesimale – e quindi, volendo allargare il discorso, nella matematica – sia possibile trovare una dimostrazione concreta, tangibile delle potenzialità e della validità delle categorie e delle strutture dialettiche (o tutt'al più di una loro specifica interpretazione). E tuttavia questo 'uso' del calcolo, che per certi versi

---

motivi, ci pare) come un tentativo sterile e maldestro di applicare lo schema dialettico al pensiero matematico».

può essere effettivamente considerato strumentale al discorso filosofico, è largamente compensato dal fatto che in questo modo Hegel e Marx offrono a loro volta alla matematica uno strumento per poter interpretare e spiegare le proprie procedure, che – lungi dall'essere scorrette – in alcuni casi – come appunto quello del calcolo infinitesimale – rispondono semplicemente a principi logici – in questo caso quelli della dialettica – che sono diversi dai principi che regolano la matematica elementare e il senso comune.[128] A questo proposito è importante sottolineare che sia in Hegel, sia in Marx i procedimenti del calcolo infinitesimale non vengono forzati per essere resi in qualche modo adatti a un'interpretazione di tipo dialettico, compromettendo in questo modo la scientificità della teoria: non è il discorso matematico a doversi adattare allo schema dialettico, ma al contrario è lo schema dialettico ad adattarsi perfettamente – così com'è, senza forzature – al discorso matematico.[129] In questo senso va ricordato che già Berkeley e molti altri avevano riconosciuto – anche se inconsapevolmente potremmo dire – la 'dialetticità' dell'analisi. Hegel e Marx mostrano insomma che anche in matematica adottare un nuovo orizzonte logico è importante non solo per dare una spiegazione a procedimenti altrimenti incomprensibili, ma anche in funzione euristica, per poter cioè scoprire qualcosa di nuovo, ampliando gli orizzonti della nostra conoscenza: non si tratta dunque di un'imposizione della filosofia, di un'esigenza esterna alla ma-

---

[128] Guerraggio 1982, 197: «La dialettica è momento di chiarificazione logica di uno specifico andamento dinamico, è uno stimolo per cogliere rapporti e processi alla cui piena comprensione l'attuale sviluppo della logica formale si rivela inadeguato».

[129] Moretto 1984, 147: «In questo come in altri casi, si può constatare come il dispiegarsi del metodo dialettico non avviene in modo indipendente dal metodo scientifico, ma vuol semmai fornire uno schema generalissimo in cui si possono inquadrare il più possibile i risultati delle varie teorie scientifiche». Cfr. anche Guerraggio 1982, 197: «Qui, come si vede, compaiono esplicitamente termini dialettici senza però che questo minimamente comporti un'attenuazione del carattere scientifico del discorso e l'irrigimentazione del procedimento matematico in uno schema precostituito».

tematica, ma anzi di un venir incontro a un bisogno vitale della matematica stessa. La lezione di Hegel e di Marx assume così un significato molto più ampio, che va al di là del contesto specifico – quello del calcolo infinitesimale – all'interno del quale si è sviluppata e di cui la matematica ha dimostrato nei suoi sviluppi successivi di aver fatto tesoro.

Conclusione

Sebbene l’argomento trattato – quello del rapporto tra le considerazioni hegeliane e quelle marxiane sul calcolo infinitesimale – potesse apparentemente sembrare un argomento di nicchia, il nostro percorso ci ha invece portato a toccare alcuni aspetti particolarmente interessanti e degni di considerazione, che cerco qui di riassumere brevemente.

All’interno del primo capitolo abbiamo tracciato un quadro complessivo del rapporto che lega Hegel e Marx da una parte e la matematica dall’altra. In questo modo, ci siamo potuti render conto, tra le altre cose, che l’immagine dei due filosofi consegnataci da gran parte della tradizione si dimostra in realtà inficiata da una serie di pregiudizi e di banalizzazioni che hanno contribuito ad alimentare nei loro confronti – specialmente per quanto riguarda Hegel – un vero e proprio mito ‘anti-matematico’, che ancora oggi, nonostante la sua falsità sia stata ribadita a più riprese, fatica a essere sradicato. Non solo Hegel e Marx possedevano infatti una solida conoscenza matematica – frutto di studi durati anni e condotti su alcuni dei testi matematici più importanti della loro epoca –, ma il loro rapporto con questa disciplina era molto più complesso e sfaccettato di quanto le semplificazioni affermatesi storicamente ci hanno voluto far credere.

A questo proposito, abbiamo visto ad esempio che la posizione di Hegel nei confronti della matematica non è così negativa come invece si è a lungo sostenuto. L’idea che Hegel fosse un acerrimo nemico della matematica – idea che ancora oggi non è stata del tutto abbandonata – è infatti il risultato di indebite generalizzazioni, che hanno posto l’accento solo ed esclusivamente su quei passi in cui Hegel si scaglia contro un certo tipo di matematica, considerandoli significativi dell’intero discorso hegeliano sul tema. Se vogliamo invece restituire un’immagine più equilibrata e allo stesso tempo più obiettiva del rapporto del filosofo con la matematica, dobbiamo tener conto anche di quei passi – altrettanto numerosi e altrettanto importanti – in cui Hegel non esita a riconoscere i meriti di un altro tipo di matematica, una matematica decisamente più ricca, capace di andare al di là di una prospettiva meramente quantitativa e di accogliere al suo interno elementi qualitativi e relazionali.

Anche le considerazioni marxiane sulla matematica sono state oggetto, in passato, di numerose semplificazioni. Agli occhi di Marx, la matematica non è – al contrario di quanto sostenuto da diversi studiosi – un mero strumento da utilizzare negli studi di economia politica, nella convinzione che una scienza possa dirsi tale solo se 'matematizzata', ma possiede – per così dire – una sua dignità, un suo significato, che la rende apprezzabile al di là delle sue possibili applicazioni nello studio delle dinamiche economiche. In conclusione abbiamo potuto constatare che il rapporto di Hegel e di Marx con la matematica fu un rapporto decisamente articolato, a tratti addirittura ambivalente, caratterizzato da sfumature, che – come sottolineato a più riprese – le semplificazioni affermatesi in passato non sono state spesso in grado di cogliere.

A questo proposito mi preme mettere qui in luce due aspetti, che sono solitamente passati in sordina e che le nostre analisi hanno invece messo in evidenza:

1. L'interesse genuino e sincero che Hegel e Marx nutrirono nei confronti della matematica rivela lo straordinario spessore culturale dei due filosofi, portando a galla un lato della loro personalità che è stato ingiustamente trascurato dagli studiosi del loro pensiero e che «dimostra una significativa curiosità intellettuale anche verso campi apparentemente distanti dal centro dei propri interessi» (Guerraggio 1982, 232).

2. Hegel e Marx si accostarono allo studio della matematica con grande umiltà, consapevoli dell'importanza di possedere un'adeguata conoscenza – anche storica – della materia, senza alcun tipo di presunzione e di pregiudizio, guidati da quell'atteggiamento critico che contraddistingue non solo il loro pensiero, ma più in generale la filosofia in quanto tale. Un atteggiamento che

li portò sì a riconoscere i limiti della matematica – in particolare quella elementare –, ma anche ad apprezzarne i punti di forza: «ne risulta una riflessione di ampio respiro sulla filosofia della matematica, attenta alla storia della disciplina e sensibile ai suoi più recenti sviluppi» (Moretto 2004, 231), almeno fino a Lagrange.

Una volta sgombrato il campo da tutti quei pregiudizi che in qualche modo potevano ostacolare un discorso sulla filosofia matematica hegeliana e marxiana, all'interno del secondo capitolo abbiamo cercato di contestualizzare storicamente le riflessioni hegeliane e marxiane sul calcolo, concentrandoci in modo particolare sulla questione delle fonti. La centralità che questo tema dimostra di avere negli studi matematici di Hegel e Marx è – almeno in parte – figlia del loro tempo. Il calcolo infinitesimale si trovava infatti all'epoca al centro di un acceso dibattito che – come abbiamo potuto notare prendendo in considerazione le riflessioni di Berkeley – non riguardava tanto la correttezza dei risultati o l'efficacia dei nuovi metodi elaborati da Newton e da Leibniz, ma piuttosto gli aspetti fondazionali di una teoria che – ricorrendo a grandezze considerate, all'interno dello stesso procedimento, nulle e non nulle – trasgrediva apertamente le regole della matematica elementare e della logica ordinaria e sembrava pertanto mancare di rigore e di chiarezza.

Questi problemi, che sollevavano quesiti di natura eminentemente filosofica e che – nonostante i tentativi di alcune delle menti più brillanti del tempo (dentro e fuori la matematica) – non avevano ancora ricevuto una risposta soddisfacente, non potevano che stuzzicare l'interesse di due pensatori poliedrici come Hegel e Marx, che infatti non si sottrassero a questa sfida, pur dimostrando – nell'approcciarsi alla questione – intenzioni decisamente diverse. Come abbiamo notato infatti, Hegel era interessato all'aspetto filosofico-concettuale del calcolo, Marx invece a quello matematico. Ecco perché Hegel, a differenza di Marx, si limita semplicemente a riflettere sul significato dell'analisi infinitesimale – o meglio, della sua portata concettuale – e a criticare i metodi di calcolo elaborati fino a quel momento, rinunciando a proporre una sua soluzione personale, un suo metodo di calcolo. Al contrario in Marx, le critiche rivolte ai matematici della sua epoca – che, come abbiamo visto, riprendono spesso e volentieri quelle di Hegel – sono funzionali all'elaborazione di una nuova procedura, che – nelle intenzioni del suo autore – avrebbe dovuto rappresentare una soluzione ai problemi riscontrati fino a quel momento. Da questo punto di vista, non possiamo non riscontrare – alla luce di quanto la storia ci ha poi detto – il fallimento della pretesa marxiana, la cui proposta di un calcolo algebrico era addirittura già stata superata, senza che Marx potesse saperlo, dalla soluzione elaborata da Cauchy qualche decennio prima. A questo fallimento si sottrae invece Hegel, che, come detto, si approccia al calcolo con ben altre intenzioni e ben altre pretese.

Infine, nella nostra analisi delle riflessioni hegeliane e marxiane sul calcolo infinitesimale – condotta nel terzo capitolo –, ci siamo soffermati principalmente sulle critiche che i due filosofi rivolsero ai metodi di calcolo elaborati fino a quel momento. A questo proposito abbiamo sottolineato a più riprese che la matematica con cui Hegel e Marx si confrontarono era quella del tardo Settecento e dei primi due decenni dell'Ottocento, fino a Lagrange. Questa puntualizzazione è particolarmente importante: infatti, è solo avendo presente l'orizzonte matematico che Hegel e Marx avevano di fronte a sé, un orizzonte dal quale – seppur per motivi diversi – era escluso Cauchy, che possiamo comprendere correttamente il significato delle loro osservazioni e delle loro critiche, che – come detto – nascono proprio dall'inadeguatezza delle risposte che la matematica aveva saputo dare fino a quel momento alle questioni lasciate aperte da Newton e da Leibniz.

Focalizzarci su questo aspetto delle considerazioni di Hegel e di Marx sul calcolo, ci ha permesso:

- di mettere in luce l'influenza che il pensiero hegeliano – seppur in un campo specifico come quello matematico – continua a esercitare su quello marxiano anche dopo gli anni giovanili. I *Manoscritti matematici* e più nello specifico le riflessioni marxiane sul calcolo, che risalgono in gran parte agli ultimi anni di vita del filosofo, mostrano infatti – come abbiamo anticipato anche nell'introduzione – che Marx, a differenza di quanto si è soliti credere, non ruppe mai definitivamente con Hegel, non arrivò mai a rifiutare in tutto e per tutto il suo pensiero, che anzi in alcuni ambiti – come quello matematico appunto – rimase anche successivamente punto di riferimento costante per le teorie marxiane.

- di far emergere uno degli aspetti più caratteristici e più positivi del rapporto tra matematica e filosofia, che consiste nella capacità della filosofia stessa di svolgere una funzione critica nei confronti della matematica, ovvero di mettere in luce e allo stesso tempo di dare una spiegazione alle incoerenze e agli errori in cui la pratica matematica talvolta può incappare, ricavandone se possibile una lezione valida anche in altre occasioni. Questo è ciò che, a mio modo di vedere, sono stati in grado di fare Hegel e Marx: nel sostenere che i problemi del calcolo infinitesimale della loro epoca andassero in gran parte imputati al fatto che i matematici tendevano a trattare e a rappresentare le grandezze infinitesime alla stregua di grandezze finite e sottolineando a più riprese la dipendenza dell'aspetto formale da quello concettuale (a cui il primo deve rimanere fedele), i due filosofi non solo danno una possibile spiegazione ai motivi della mancanza di rigore del calcolo (che i matematici avevano colto, senza tuttavia riuscire a chiarire pienamente), tracciando in questo modo la strada per una soluzione del problema, ma dettano al contempo una linea generale che la matematica può e deve tener presente per evitare di cadere anche in futuro in situazioni simili.

Questi due aspetti – il costante riferimento di Marx a Hegel da una parte e la proficuità del rapporto tra matematica e filosofia dall'altra – sono emersi in modo ancor più chiaro nella seconda parte del capitolo, in cui abbiamo preso in considerazione le riflessioni di Hegel e di Marx a proposito della presenza nel calcolo di strutture e categorie dialettiche. Il fatto che Marx all'interno dei *Manoscritti matematici* veda operante il metodo dialettico nel processo di differenziazione e l'importanza che egli almeno inizialmente, come si può evincere anche dalle opere di Engels, attribuisce a questo aspetto, testimoniano infatti in modo pressoché innegabile il suo debito nei confronti di Hegel, che sia nella *Scienza della logica*, sia in altre opere aveva rimarcato le analogie tra calcolo infinitesimale e logica dialettica.

Più in generale, l'interpretazione dialettica del calcolo da parte di Hegel e Marx è interessante perché mostra che il rapporto tra filosofia e matematica non si declina unicamente, come purtroppo ancora oggi siamo portati a credere, nella critica della filosofia ai modi di procedere della matematica – che pure, come abbiamo appena detto, rappresenta un aspetto importante del dialogo tra le due discipline – ma può al contrario assumere anche altre direzioni, capaci di mettere in risalto la ricchezza e la fecondità di questo rapporto, che troppo spesso viene sottovalutato. Individuando nel calcolo una conferma 'concreta' della possibilità di usare positivamente la contraddizione e più in generale delle potenzialità degli schemi dialettici, Marx e Hegel mostrano infatti, da una parte, come la filosofia possa trovare proprio nella pratica matematica un argomento decisivo a sostegno delle sue teorie e dall'altra come la matematica possa trovare nella filosofia schemi interpretativi capaci non solo di dare una spiegazione a procedimenti validi da un punto di vista operativo, ma apparentemente infondati, ma anche di schiudere al contempo nuove possibilità euristiche, tracciando linee di sviluppo che da sola, con tutta probabilità, non sarebbe stata in grado di prevedere.

Bibliografia

Opere di Hegel

GW: *Gesammelte Werke*, in Verbindung mit der Deutschen Forschungsgemeinschaft hrsg. von der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften, Felix Meiner, Hamburg 1968ss.

Briefe: *Briefe von und an Hegel*, J. Hoffmeister (Hg.), 4 Bde., Felix Meiner, Hamburg 1969 [G.W.F. Hegel, *Lettere*, trad. it. di P. Manganaro e V. Spada, con una pref. di E. Garin, Laterza, Bari 1972; traduzione parziale].

Enz. A: *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse (1817)*, W. Bonsiepen - K. Grotsch (Hg.), in *GW*, Bd. 13, Felix Meiner, Hamburg 2000 [G.W.F. Hegel, *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio*, trad. it. a cura di F. Biasutti, L. Bignami, F. Chiereghin, G.F. Frigo, G. Granello, F. Menegoni, A. Moretto, Verifiche, Trento 1987].

Enz. C: *Enzyklopädie der philosophischen Wissenschaften im Grundrisse (1830)*, W. Bonsiepen - H.-C. Lucas (Hg.), in *GW*, Bd. 20, Felix Meiner, Hamburg 1992 [G.W.F. Hegel, *Enciclopedia delle scienze filosofiche in compendio*, V. Verra (a cura di), con le aggiunte di L. von Henning, K.L. Michelet, L. Boumann, 3 voll., UTET, Torino 2004].

GuW: *Glauben und Wissen oder die Reflexionsphilosophie der Subjectivität, in der Vollständigkeit ihrer Formen, als Kantische, Jacobische und Fichtesche Philosophie*, in *GW*, Bd. 4, *Jenaer kritische Schriften*, H. Buchner - O. Pöggeler (Hg.), Felix Meiner, Hamburg 1968, pp. 315-414 [G.W.F. Hegel, *Fede e sapere o filosofia della riflessione della soggettività nell'integralità delle sue forme come filosofia di Kant, di Jacobi e di Fichte*, in G.W.F. Hegel, *Primi scritti critici*, intr. trad. e note a cura di R. Bodei, Mursia, Milano 1971, pp. 123-253].

JS II: *Jenaer Systementwürfe II*, R.-P. Horstmann - J.H. Trede (Hg.), in *GW*, Bd. 7, Felix Meiner, Hamburg - Bonn-Bad Godesberg 1971 [G.W.F. Hegel, *Logica e metafisica di Jena (1804-1805)*, trad., intr. e comm. a cura di F. Biasutti, L. Bignami, F. Chiereghin, A. Gaiarsa, M. Giacin, F. Longato, F. Menegoni, A. Moretto, G. Perin Rossi, Verifiche, Trento 1982; trad. delle prime due parti di *Logik, Metaphysik, Naturphilosophie* in *JS II*].

Logik 1810-11: *Mittelklasse Philosophische Vorbereitungswissenschaften: Logik Diktat 1810/11 mit Überarbeitungen aus den Schuljahren 1811/12, 1812/13 und 1814/15*, in *GW*, Bd. 10,1, *Nürnberger Gymnasialkurse und Gymnasialreden (1808-1816)*, K. Grotsch (Hg.), Felix Meiner, Hamburg 2006, pp. 219-262.

PhEnz: *Oberklasse Philosophische Vorbereitungswissenschaften: Philosophische Enzyklopädie - Diktat 1808/09 mit Einträgen*, in *GW*, Bd. 10,1, *Nürnberger Gymnasialkurse und Gymnasialreden (1808-1816)*, K. Grotsch (Hg.), Felix Meiner, Hamburg 2006, pp. 61-83.

PhG: *Phänomenologie des Geistes*, W. Bonsiepen - R. Heede (Hg.), in *GW*, Bd. 9, Felix Meiner, Hamburg 1980 [G.W.F. Hegel, *Fenomenologia dello spirito*, trad. it. di E. De Negri, 2 voll., La Nuova Italia, Firenze 1973].

WdL I: *Wissenschaft der Logik. Erster Band. Die objektive Logik (1812/1813)*, F. Hogemann - W. Jaeschke (Hg.), in *GW*, Bd. 11, Felix Meiner, Hamburg 1981 [G.W.F. Hegel, *Scienza della Logica. Libro primo. L'essere (1812)*, P. Giuspoli - G. Castegnaro - P. Livieri (a cura di), Quaderni di Verifiche, Trento 2009].

WdL III: *Wissenschaft der Logik. Erster Teil. Die objektive Logik. Erster Band. Die Lehre vom Sein (1832)*, F. Hogemann - W. Jaeschke (Hg.), in *GW*, Bd. 21, Felix Meiner, Hamburg 1985 [la trad. it. in G.W.F. Hegel, *Scienza della logica*, a cura di A. Moni, riv. da – e con nota introduttiva di – C. Cesa, intr. di L. Lugarini, Laterza, Bari 1981, corrisponde alla *Wissenschaft der Logik* contenuta in *WdL III*, nel *2. Buch, Die Lehre vom Wesen*, di *WdL I*, e in *WdL II*].

Opere di Marx

MEW 2: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 2, *September 1844 bis Februar 1846*, Dietz Verlag, Berlin 1957.

***MEW* 19**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 19, *März 1875 bis Mai 1883*, Dietz Verlag, Berlin 1962.

***MEW* 20**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 20, *Antidühring; Dialektik der Natur*, Dietz Verlag, Berlin 1962.

***MEW* 23**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 23, *Das Kapital - Erster Band*, Dietz Verlag, Berlin 1962 [K. Marx, *Il capitale - Libro primo*, trad. it. D. Cantimori, Editori Riuniti, Roma 1980].

***MEW* 24**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 24, *Das Kapital - Zweiter Band*, Dietz Verlag, Berlin 1963 [K. Marx, *Il capitale - Libro secondo*, trad. it. R. Panzieri, Editori Riuniti, Roma 1980].

***MEW* 25**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 25, *Das Kapital - Dritter Band*, Dietz Verlag, Berlin 1964 [K. Marx, *Il capitale - Libro terzo*, trad. it. M.L. Boggeri, Editori Riuniti, Roma 1980].

***MEW* 29**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 29, *Briefe: Jan. 1856 - Dez. 1859*, Dietz Verlag, Berlin 1963 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 30**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 30, *Briefe: Jan. 1860 - Sept. 1864*, Dietz Verlag, Berlin 1964 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 31**: K. Marx - F. Engels, *Werke,* Bd. 31, *Briefe: Okt. 1864 - Dez. 1867*, Dietz Verlag, Berlin 1965 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 32**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 32, *Briefe: Jan. 1868 - Jul. 1870*, Dietz Verlag, Berlin 1974 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 33**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 33, *Briefe: Jul. 1870 - Dez. 1874*, Dietz Verlag, Berlin 1966 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 35**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 35, *Briefe: Jan. 1881 - Mar. 1883*, Dietz Verlag, Berlin 1967 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 40**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 40, *Marx Schriften und Briefe Nov. 1837 - August 1844*, Dietz Verlag, Berlin 1968 [K. Marx - F. Engels, *Carteggio Marx-Engels*, 6 voll., Editori Riuniti, Roma 1972].

***MEW* 42**: K. Marx - F. Engels, *Werke*, Bd. 42, *Ökonomische Manuskripte 1857/1858*, Dietz Verlag, Berlin 1983.

K. Marx, *Mathematical manuscripts of Karl Marx*, C. Smith (ed.), New Park Publications Ltd, London 1983.

K. Marx, *Mathematical manuscripts*, Viswakos Parisad, Calcutta 1994.

MR: *Matematicheskie rukopist*, S. Yanovskaya (ed.), Nauk, Moskva 1968 [K. Marx, *Manoscritti matematici*, A. Ponzio (a cura di), Spirali, Milano 2005].

Letteratura secondaria su Hegel e il calcolo

P. Bronger, *Hegel's library: the Newton editions*, in M.J. Petry (ed.), *Hegel and Newtonianism*, Springer Netherlands, Dordrecht 1993, pp. 711-719.

R.S. Cohen - M.W. Wartofsky (ed.), *Hegel and the Sciences*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht 1984.

J.N. Findlay, *Hegel oggi*, trad. it. L. Calabi, Istituto Librario Internazionale, Milano 1972.

M. Galuzzi - A. Guerraggio, *Il calcolo differenziale nella "Scienza della Logica" di G.W.F. Hegel*, «Epistemologia», 2 (1979), pp. 251-268.

P. Giuspoli - G. Castegnaro - P. Livieri, *Introduzione: La Scienza della logica come teoria generale dei processi di mediazione razionale*, in G.W.F. Hegel, *Scienza della Logica. Libro primo. L'essere (1812)*, P. Giuspoli - G. Castegnaro - P. Livieri (a cura di), Quaderni di Verifiche, Trento 2009, pp. IX-CXXIV.

F. Hogemann - W. Jaeschke, *Einleitung*, in G.W.F. Hegel, *Wissenschaft der Logik. Die Lehre vom Sein (1832)*, Felix Meiner, Hamburg 2008, pp. IX-XXXIV.

S. Houlgate (ed.), *Hegel and the philosophy of nature*, State University of New York Press, Albany 1998.

M. Inwood, *A Hegel dictionary*, Blackwell Publishers Ltd, Oxford 2017.

H. Kimmerle, *Dokumente zu Hegels Jenaer Dozententätigkeit (1801-1807)*, «Hegel-Studien», 4 (1967), pp. 53-65.

A. Klaucke, *Hegels Lagrange-Rezeption*, in G. König (Hg.), *Konzepte des mathematisch Unendlichen im 19. Jahrhundert*, Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik, Bd. 5, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1990, pp. 130-151.

E. Kolman - S. Yanovskaya, *Hegel and mathematics*, in K. Marx, *Mathematical Manuscripts of Karl Marx*, C. Smith (ed.), New Park Publications Ltd, London 1983, pp. 235-255.

A. Mense, *Hegel's library: the works on mathematics, mechanics, optics and chemistry*, in M.J. Petry (ed.), *Hegel and Newtonianism*, Springer Netherlands, Dordrecht 1993, pp. 669-710.

E. Meyerson, *De l'explication dans les sciences*, 2 voll., Payot, Paris 1921.

A. Moretto, *Filosofia della matematica e della meccanica nel sistema hegeliano*, Il Poligrafo, Padova 2004.

A. Moretto, *Hegel e la matematica dell'infinito*, Pubblicazioni di Verifiche, Trento 1984.

A. Moretto, *Hegel e le scienze*, in AA.VV., *Annali della Facoltà di Lettere e Filosofia dell'Università di Macerata*, Macerata 1991, pp. 229-267.

A. Moretto, *La matematica nella "Prefazione" alla Fenomenologia di Hegel*, in R. Bassi - C. Ravazzolo - G. Tomasi (a cura di), *"... sed intelligere". Studi in onore di Franco Biasutti*, Cleup, Padova 2022, pp. 175-196.

A. Moretto, *L'influence de la "mathematique de l'infini" dans la formation de la dialectique hégélienne*, in R.-P Horstmann - M.J. Petry (Hg.), *Hegels Philosophie der Natur*, Klett-Cotta, Stuttgart 1986, pp. 175-196.

A. Moretto, *Questioni di filosofia della matematica nella "Scienza della Logica" di Hegel. "Die Lehre vom Sein" del 1831*, Verifiche, Trento 1988.

M.J. Petry, *Hegel und die Naturwissenschaften*, Frommann-Holzboog, Stuttgart-Bad Cannstatt 1987.

T. Pinkard, *Hegel's Philosophy of Mathematics*, «Philosophy and Phenomenological Research», XLI (1981), pp. 452-464.

M. Rehm, *Hegels spekulative Deutung der Infinitesimalrechnung*, Diss., Köln 1963.

K. Rosenkranz, *Vita di Hegel*, intr., trad. e note a cura di. R. Bodei, Mondadori, Milano 1974.

V. Verra, *Hegel critico della filosofia moderna: matematica e filosofia*, in V. Verra, *Su Hegel*, C. Cesa (a cura di), il Mulino, Bologna 2007, pp. 31-54.

R. Washner, *"Der Gedanke kann nicht richtiger bestimmt werden, als Newton ihn gegeben hat": das mathematisch Unendliche und der Newtonsche Bewegungsbegriff im Lichte des begriffslogischen Zusammenhang von Quantität und Qualität*, in A. Arndt (Hg.), *Hegels Seinslogik - Interpretationen und Perspektiven*, Akademie Verlag, Berlin 2000, pp. 271-300.

M. Wolff, *Hegel und Cauchy. Eine Untersuchung zur Philosophie und Geschichte der Mathematik*, in R.-P. Horstmann - M.J. Petry (Hg.), *Hegels Philosophie der Natur*, Klett-Cotta, Stuttgart 1986, pp. 197-263.

Letteratura secondaria su Marx e il calcolo

A. Alcouffe - J. Wells, *Marx, Maths and MEGA 2*, 13th Annual Conference of the European Society for the History of Economic Thought, University of Macedonia, Tessalonica 2009.

A. Alcouffe, *Marx, Hegel et le "Calcul"*, in K. Marx, *Les manuscrits mathématiques*, A. Alcouffe (éd.), Economica, Paris 1985, pp. 9-109.

A. Blunden, *Dialectics and Mathematics*, «International Labour Review» (1984).

F. Burkhardt, *Karl Marx und die Mathematik*, in A. Heinze (hg.), *Karl Marx „Das Kapital", Erbe und Verpflichtung: Beiträge zum 100. Jahrestag der Erstausgabe des Werkes „Das Kapital" von Karl Marx*, Karl-Marx Universität, Leipzig 1968.

T. Carver, *Marx- and Hegel's Logic*, in «Political Studies», 24/1 (1976), pp. 57-68.

F.Y. Edgeworth, *Collected Papers relating to Political Economy*, vol. 3, Macmillan, London 1925.

A. Guerraggio, *Lo strumento matematico in Marx*, in A. Guerraggio - F. Vidoni, *Nel laboratorio di Marx: scienze naturali e matematica*, Angeli, Milano 1982, pp. 139-260.

H.C. Kennedy, *Karl Marx and the foundations of the differential calculus*, «Historia Mathematica», 4 (1977), pp. 303-318.

E. Kolman, *Eine neue Grundlegung der Differentialrechnung durch Karl Marx*, in *Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Zürich 1932, II Band/Sektions-Vorträge, pp. 349-351.

L. Lombardo Radice, *Dai «Manoscritti matematici» di K. Marx. Presentazione*, in *Sul marxismo e le scienze*, Critica marxista, Quaderni n.6, ITER, Roma 1972, pp. 273-277.

L. Lombardo Radice, *Karl Marx professore di matematica*, «Il Corriere della Sera», 3 agosto 1975.

F. Matarrese, *Critica della matematica e materialismo storico-dialettico. Calcolo, logica formale e dialettica delle forme*, in K. Marx, *Manoscritti matematici*, F. Matarrese - A. Ponzio (a cura di), Dedalo, Bari 1975, pp. 5-22.

P.H. Matthews, *The dialectics of differentiation: Marx's Mathematical Manuscripts and their relation to his economics*, Middlebury College Economics Discussion, Paper n. 02-03, 2002.

A. Moretto, *Marx e il calcolo infinitesimale. Note sulle presentazioni italiane dei "Manoscritti matematici" di K. Marx*, «Verifiche», 2 (1978), pp. 201-218.

V. Pareto, *I sistemi socialisti*, G. Busino (a cura di), UTET, Torino 1974.

A. Ponzio, *Critica della matematica e materialismo storico-dialettico. Matematica, dialettica ed economia politica*, in K. Marx, *Manoscritti matematici*, F. Matarrese - A. Ponzio (a cura di), Dedalo, Bari 1975, pp. 23-38.

A. Ponzio, *Introduzione. I Manoscritti matematici di Marx*, in K. Marx, *Manoscritti matematici*, A. Ponzio (a cura di), Spirali, Milano 2005, pp. 7-44.

A. Ricci, *La matematica di Marx. Nel bicentenario della nascita di Karl Marx (1818-1883)*, in «Lettera Matematica», 106 (2018), pp. 20-25.

C. Smith, *Hegel Marx and calculus*, in K. Marx, *Mathematical Manuscripts of Karl Marx*, C. Smith (ed.), New Park Publications Ltd, London 1983, pp. 256-270.

L. Smolinski, *Karl Marx and Mathematical Economics*, in «Journal of Political Economy», 81/5 (1973), pp. 1189-1204.

D.J. Struik, *Marx and Mathematics*, in «Science and Society», 1 (1948), pp. 181-196.

H. Uchida, *Marx's Grundrisse and Hegel's Logic*, Routledge, London 1988.

L. Van Bortkiewicz, *Wertrechnung und Preisrechnung im Marxschen System*, «Archiv für Sozialwissenschaft und Sozialpolitik», 25 (1907), pp. 455-488.

S.A. Yanovskaja, *Preface to the 1968 russian edition*, in K. Marx, *Mathematical manuscripts of Karl Marx*, C. Smith (ed.), New Park Publications Ltd, London 1983, pp. VII-XXVI.

Sulla storia del calcolo (e non solo)

F. Barone, *Logica formale e logica trascendentale, II: L'algebra della logica*, Edizioni di Filosofia, Torino 1965.

G. Berkeley, *The Analyst*, in G. Berkley, *De Motu and The Analyst. A modern Edition, with Introductions and Commentary*, D.M. Jesseph (ed.), Springer Science + Business Media, Dordrecht 1992, pp. 156-221.

G. Birkhoff (ed.), *A Source Book in Classical Analysis*, Harvard University Press, Cambridge Mass. 1973.

U. Bottazzini, *Filosofia e matematica*, in P. Rossi (a cura di), *La filosofia e le scienze*, in A. Abbagnano - G. Fornero - P. Rossi (a cura di), *Filosofia. Storia, parole, temi*, vol. 17, De Agostini, Novara 2018, pp. 1-40.

C.B. Boyer, *Storia della matematica*, trad. it. A. Carugo, Oscar Mondadori, Milano 1990.

C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual Development*, Dover Publications, New York 1949.

P. Cantù, *La matematica da scienza delle grandezze a teoria delle forme. L'Ausdehnungslehre di H. Grassman*, tesi di dottorato, Milano 2008.

G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna. Con scritti di Newton, Leibniz, Torricelli*, U. Forti (a cura di), Feltrinelli, Milano 1962.

A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de L'École Royale Polytechnique*, Cambridge University Press, New York 2009.

C. Cellucci, *Il ruolo del principio di non contraddizione nelle teorie scientifiche*, «Verifiche», X (1981), pp. 129-160.

A. Comte, *Cours de philosophie positive*, Schleicher, Paris 1907.

D. Diderot - M. d'Alembert, *Explication détaillée du système des connessances humaines*, in *Encyclopédie ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers, par une société de gens de lettres. Mis en ordre et publié par M. Diderot, et quant à la partie mathématique par M. D'Alembert*, Paris 1751-1765.

F. Engels, *Antidühring. Il socialismo scientifico contro Eugenio Dühring*, trad. it. S. Puritz, Remo Sandron, Milano-Palermo 1901.

L. Geymonat, *Storia e filosofia dell'analisi infinitesimale*, Bollati Boringhieri, Mappano di Caselle 2008.

E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, Pisa-Roma 2007.

S. Hawking, *Dal Big Bang ai buchi neri: breve storia del tempo*, intr. di C. Sagan, Rizzoli, Milano 1988.

D.M. Jesseph, *Editor's Introduction*, in G. Berkley, *De Motu and The Analyst. A modern Edition, with Introductions and Commentary*, D.M. Jesseph (ed.), Springer Science + Business Media, Dordrecht 1992, pp. 111-155.

I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, J. Timmermann (Hg.), Felix Meiner, Hamburg 1998 [I. Kant, *Critica della ragion pura*, trad. it. G. Gentile e G. Lombardo-Radice, riv. da V. Mathieu, intr. di V. Mathieu, Laterza, Bari 1975].

G.W. Leibniz, *Die philosophischen Schriften*, C.I. Gerhardt (Hg.), 7 voll., Olms, Hildesheim 1960.

G.W. Leibniz, *Historia et origo calculi differentialis*, zur zweiten Säcularfeier des Leibnizischen Geburtstages aus den Königlichen Bibliothek zu Hannover, C.I. Gerhardt (Hg.), Hannover 1846.

G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, C.I. Gerhardt (Hg.), 6 voll., Olms, Hildesheim 1962.

G.W. Leibniz, *Testamen de motuum coelestium*, «Acta Eruditorum», 1689, pp. 82-96.

A. Moretto, *Dottrina delle grandezze e filosofia trascendentale in Kant*, Il Poligrafo, Padova 1999.

I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, A. Koyré - I. Bernard Cohen (eds.), 2 voll., Harvard University Press, 1972 [I. Newton, *Principi matematici di filosofia naturale*, A. Pala (a cura di), UTET, Torino 1989].

I. Newton, *Tractatus de quadratura curvarum: in usum studiosae iuventutis mathematicae explicationibus illustratus*, versione digitalizzata, 1761 [I. Newton, *Sulla quadratura delle curve (1704)*, E. Carruccio (a cura di), in G. Castelnuovo, *Le origini del calcolo infinitesimale nell'era moderna. Con scritti di Newton, Leibniz, Torricelli*, U. Forti (a cura di), Feltrinelli, Milano 1962, pp. 127-162].

K.R. Popper, *The open society and its enemies*, intr. by A. Ryan, Princeton University Press, Princeton 2013 [K.R. Popper, *La* *società aperta e i suoi nemici. Hegel e Marx falsi profeti*, 2 voll., Armando, Roma 1981].

E. Rufini, *Il metodo di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Feltrinelli, Milano 1961.

B. Russell, *Logical Positivism*, in B. Russell, *Logic and Knowledge: Essays 1901-1950*, Allen & Unwin, London 1956.

T. Sider, *Logic for Philosophy*, Oxford University Press, Oxford 2010.

B. Spinoza, *Epistola XII*, in B. Spinoza, *Opera*, C. Gebhardt (Hg.), Bd. IV, Winters, Heidelberg 1924, pp. 56-62.

L. Wittgenstein, *Lectures on the Foundations of Mathematics, Cambridge 1939*, Cornell University Press, Ithaca 1976.

J.M.F. Wright, *A Commentary on Newton's "Principia" with a Supplementary Volume Designed for the Use of Students at the Universities*, in *The Sources of Science*, Harry Woolf (ed.), Johnson Reprint Corp, New York-London 1972.

Indice dei nomi