UNIVERSITÀ DI TRENTO
Dipartimento di Matematica

UNIVERSITÁ DI TRENTO
FACOLTÁ DI MATEMATICA
Dottorato in matematica - XXXVI ciclo

Geogebrizzazione di testi matematici come processo di oggettivazione

Supervisore
Giorgio Bolondi

Co-supervisore
Claudio Fontanari

Presentata da
Agnese Del Zozzo

SSD: MATH-01/B – Didattica e storia della matematica
(Ex MAT/04 – Matematiche complementari)

Sommario

Premessa

“All this happened, more or less.”

Kurt Vonnegut, Slaughterhouse-Five

Come anticipato dal titolo, in questa tesi si mostrerà che l’attività di “geogebrizzazione”[1] di un testo matematico è un’attività di insegnamento/apprendimento nel senso di Radford (2021). Prima di entrare nel vivo del lavoro, credo sia utile fare un passo indietro e raccontare la storia che l’ha portata alla forma qui presentata e descritta.

La Scuola di Dottorato dell’Università di Trento richiede ai dottorandi di scegliere tre esami da sostenere nell’arco del primo anno su tematiche che abbiano un legame con i propri interessi di ricerca. All’inizio del mio percorso, nella prima formulazione del progetto di ricerca, l'intento era estendere il mio lavoro sull’apprendimento della geometria delle persone cieche, inizialmente trattato nella mia tesi magistrale (Del Zozzo, 2010; Cortesi, 2010), dal contesto della geometria dei poliedri alla geometria algebrica. Su suggerimento di Claudio Fontanari, ho inserito nel mio piano di studi l’esame di Geometria Algebrica I, consapevole che il mio focus non sarebbe stato quello di chi avrebbe fatto ricerca in geometria bensì, parafrasando le parole del professore, quello di *riuscire a dialogare con i geometri algebrici italiani del periodo classico*.

Tra i prerequisiti allo studio della geometria algebrica compare la geometria proiettiva. Immaginando un dialogo con gli esponenti della Scuola Italiana di Geometria Algebrica, ho ritenuto utile rivedere tali prerequisiti mettendomi nei panni di uno dei loro studenti. Ho iniziato a cercare materiale e mi sono imbattuta nel testo di Castelnuovo (1904). Con l’idea di usarlo per studiare, ho iniziato a sfogliarlo e, ad ogni riga, ad ogni parola, visualizzavo un comando di GeoGebra. Ogni pagina e ogni richiamo interno tra le varie parti del libro, nella mia immaginazione si configurava come una pagina di un *Libro GeoGebra*[2]. Ho immaginato che sarebbe stato fantastico realizzare una nuova edizione dinamica di quel testo, un’edizione che potesse materializzare il dinamismo che ne contraddistingue struttura e contenuto. Considerando poi che in Europa dal 1° gennaio del 2023 le opere di Guido Castelnuovo sono diventate di pubblico

[1] In questa premessa userò questa parola in modo ingenuo e, per questa ragione, ho scelto di metterla tra virgolette. Nel primo capitolo la parola “geogebrizzazione” verrà definita in modo più rigoroso e le virgolette verranno tolte. Segnalo però due precedenti usi di una parola simile di cui sono venuta a conoscenza grazie a una segnalazione di Alessandro Oneto: in un Tweet del 24/08/2019, l’account Vincent Pantaloni ha usato la parola *geogebrize*, https://twitter.com/ghsmaths/status/1165221650729766912. Inoltre, Diego Lieban, ricercatore e insegnante brasiliano, mi ha riferito di aver fatto uso qualche anno fa dell’equivalente portoghese della parola *geogebrizzando*.

[2] Maggiori dettagli nella Sezione 1.1.2

dominio[3], un progetto di questo tipo ho immaginato potesse avere un valore storico e culturale. In quel momento, si sono presentate tre studentesse di Magistrale in Matematica, LM1, LM2 e LM3, che hanno chiesto disponibilità ad essere seguite per la tesi magistrale. In particolare, a LM3, dopo i primi esperimenti di visualizzazione fatti con LM1 e LM2 e dopo un confronto con Fontanari, è stato proposto di avviare la trasformazione di una parte del testo di Castelnuovo in un "sito/ipertesto" in cui dare vita a tutti i collegamenti tra i vari paragrafi, dando movimento alle immagini già presenti nel libro e approfondendo alcune tematiche con delle visualizzazioni e costruzioni realizzate con GeoGebra. LM3 ha accettato con entusiasmo e l'output principale del suo lavoro è stata una prima ipotesi di struttura di questa nuova edizione del testo di Castelnuovo, implementata inizialmente per le prime 90 pagine del testo (ne parlerò in Appendice B). Tale nuova edizione si struttura in un sistema di *Libri GeoGebra* collegati tra loro in cui uno è fedele all'opera originale (*Libro originale*) e l'altro (*Libro delle costruzioni*) contiene quelle che, chiamavo, le "geogebrizzazioni" di estratti di testo originale (cfr. nota 53 della Sezione 2.3.2, e Appendice B).

Una conversazione con LM3 mi ha fatto riflettere sulla possibilità di approfondire il valore educativo e didattico della "geogebrizzazione" di un testo matematico; infatti, un giorno, mi ha detto: "certo che facendo questo lavoro capisci le cose proprio a fondo". Questa frase ha completamente polarizzato la mia attenzione reindirizzando il mio interesse di ricerca. Mi sono resa conto che il progetto di "geogebrizzare" il testo di Castelnuovo non aveva solo un valore culturale e storico ma anche un valore educativo e didattico. Ma che tipo di valore? E a quali condizioni? Più in generale, cosa significa da un punto di vista operativo "geogebrizzare" un testo? E cosa comporta, da un punto di vista didattico e cognitivo, metterlo in atto?

Ho potuto esplorare più in profondità tali domande collaborando con ADR[4] e LM4 nel tentativo di generalizzare l'approccio ad altri testi dello stesso periodo, come estratti di Enriques (1908) sulla geometria descrittiva e di Enriques (1898) sulla geometria proiettiva. Queste nuove esperienze esplorative, se da un lato mi hanno permesso di mettere a fuoco più precisamente le caratteristiche operative della "geogebrizzazione" di un testo di geometria, dall'altro hanno reso ancora più evidente la complessità del processo stesso.

A metà del secondo anno, mentre il progetto qui descritto si stava già delineando, ho fatto domanda per partecipare a una importante scuola estiva di dottorato ma non sono stata ammessa. Tra le ragioni indicate dagli organizzatori, compariva

[3] Attuali leggi europee in merito a questioni di copyright: https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2006/116/oj

[4] Assegnista di ricerca, con cui ho potuto confrontarmi in merito alla "geogebrizzazione" durante il suo primo mese di presa di servizio.

la seguente: “la tua ricerca non riguarda in modo chiaro la didattica della matematica”. Ho riguardato l’abstract che avevo mandato. Descrivevo (in modo ancora vago) il processo di “geogebrizzazione” ma non parlavo esplicitamente di insegnamento/apprendimento: non credevo servisse, pensavo fosse ovvio. Evidentemente, non era così e questo mi ha fatto capire una cosa importante: che la “geogebrizzazione” di un testo matematico sia un’attività di insegnamento/apprendimento va *verificato*.

Ed è a questa verifica che ho deciso di dedicare la tesi di dottorato.

La tesi è articolata in sette capitoli:

- nel Capitolo 1 verrà presentata la definizione del processo di “geogebrizzazione” di un testo matematico, cercando di fondare e radicare in letteratura ogni sua parte;
- nel Capitolo 2 parleremo del caso studio in cui il processo di “geogebrizzazione” verrà studiato e analizzato in queta sede: la parte relativa ai fondamenti di geometria proiettiva del testo *Lezioni di Geometria Analitica e Proiettiva* di Guido Castelnuovo pubblicato, per la prima volta, nel 1904;
- il Capitolo 3 si aprirà con una panoramica della Teoria dell’Oggettivazione (TO) di Luis Radford, che è il quadro teorico scelto per inquadrare lo studio del processo in analisi, e si chiuderà con le domande di ricerca;
- nel Capitolo 4 verrà descritta alla luce della TO un’attività sperimentale di “geogebrizzazione” di estratti del testo di Castelnuovo concentrata in un percorso unitario e relativamente breve che contiene tutti gli elementi del processo che sin dalle prime esplorazioni si erano dimostrati rilevanti. L’attività progettata è al cuore della sperimentazione che ha permesso lo studio della “geogebrizzazione” da un punto di vista didattico;
- nel Capitolo 5 verrà descritta la metodologia con cui è stata condotta la sperimentazione e che ha guidato l’analisi dati. La ricerca coinvolge quattro coppie di partecipanti con diverse formazioni a livello matematico. Ciascuna coppia è formata da esperti di tematiche ritenute rilevanti per l’esplorazione e la caratterizzazione del processo di “geogebrizzazione” (due studenti di laurea triennale in Matematica, due ricercatori in geometria algebrica, due ricercatori in didattica della matematica e due ricercatori in informatica e didattica dell’informatica);
- nel Capitolo 6 verrà descritta l’analisi dei dati e saranno delineate le risposte alle domande di ricerca;
- nel Capitolo 7 sono raccolte le conclusioni.

Il lavoro si chiude con tre appendici:

- l’Appendice A è dedicata a una panoramica tecnica del software GeoGebra e alcuni altri ambienti ad esso collegati;
- l’Appendice B raccoglie i vari prodotti di “geogebrizzazione” finora realizzati;
- l’Appendice C riporta una mail scritta a uno degli sviluppatori di GeoGebra in cui sono raccolte alcune questioni emerse durante la sperimentazione.

1 – Geogebrizzazione di un testo matematico

In questo capitolo, ampliando e approfondendo quanto introdotto in Del Zozzo (2023, in pubblicazione), proporrò una definizione del processo di geogebrizzazione di un testo matematico, oggetto di studio e analisi di questa tesi. La formulazione della definizione fornita in questo capitolo è, in un certo senso, ingenua e nella parte finale del Capitolo 3 sarà reinterpretata e riformulata alla luce della Teoria dell'Oggettivazione (TO) di Luis Radford, quadro teorico scelto per questa ricerca.

1.1 Processo di geogebrizzazione di un testo matematico

1.1.1. Terminologia preliminare: testo matematico

Con l'espressione *testo matematico stampato* si intende, dato un libro di matematica cartaceo[5], l'insieme di tutti i contenuti stampati su carta, siano essi verbali, iconici o simbolici. Il discorso in matematica in generale e, nello specifico, i testi di matematica hanno caratteristiche complesse e sono stati oggetto di studio specifico in numerosi lavori e con diverse prospettive (ad esempio Steenrod et al., 1973; O'Halloran, 2008; Sfard, 2008). In questo paragrafo, cercheremo di delineare e inquadrare in maniera puntuale le peculiarità che hanno un ruolo cruciale ai fini di questo lavoro. In particolare, parleremo delle componenti iconiche di un testo matematico e delle loro relazioni con le componenti simboliche e verbali. Love e Pimm (1996), facendo riferimento a una riflessione di David Lodge (1995), mettono in evidenza come un qualsiasi testo scritto appartenga per definizione al passato: è qualcosa che (nel caso dei libri di testo) arriva nelle mani di insegnanti e studenti già fatto e finito. Questa peculiarità riguarda qualunque scritto ma presenta aspetti particolarmente scivolosi quando si tratta delle componenti iconiche di un testo matematico. Infatti, "non ci sono disegni matematici in un testo, c'è solo il già disegnato" (p. 379-380, traduzione personale dall'inglese[6]). Per di più, qualsiasi componente iconica non è qualcosa da osservare bensì è qualcosa da *leggere*, questione a sua volta tutt'altro che banale. Laborde e Laborde (1995), ad esempio, sottolineano come sia necessario ricorrere a delle informazioni di tipo discorsivo per poter inferire il referente di un disegno matematico dato. Infatti, da un lato, qualsiasi disegno potrebbe contenere informazioni irrilevanti rispetto alle questioni matematiche

[5] Il testo matematico stampato può anche essere fornito in versione digitalizzata priva di collegamenti ipertestuali interni (ad esempio in formato .pdf o .jpg). È importante sottolineare che le due diverse situazioni vengono in questo contesto considerate equivalenti perché, pur presentando differenze legate alla contrapposizione tra la materialità del cartaceo e la de-materialità delle versioni digitalizzate (si veda ad esempio Del Zozzo e Garzetti, 2021), non presentano differenze da un punto di vista matematico.
[6] Testo originale: "there are no mathematical drawings in texts, only the already drawn."

che intende illustrare. Dall'altro lato, qualsiasi questione matematica (sia essa una definizione, un teorema, ecc) abbraccia una varietà di situazioni che non possono essere tutte catturate in un'unica immagine[7]. Ad esempio, consideriamo il seguente disegno (Figura 1):

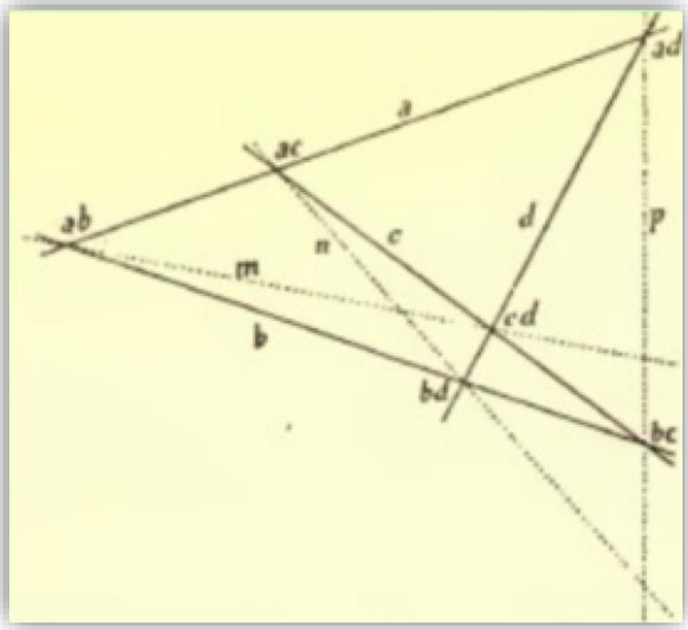
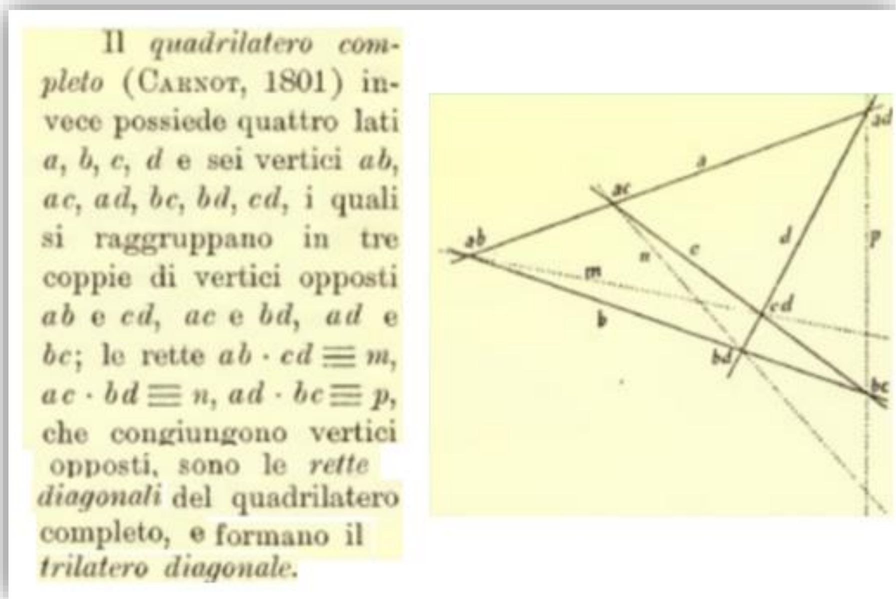


Figura 1: immagine tratta da Castelnuovo (1904, p. 14).

In che ambito geometrico siamo? Di che tipo di figura si tratta? Quanti lati ha? E quanti vertici? Per quale ragione alcune linee sono tratteggiate e altre sono continue? Volendo poi riprodurre tale immagine in un foglio di carta, quali sono gli elementi da cui partire? E quali altri disposizioni di tali elementi fornirebbero un disegno "valido" per lo stesso tipo di figura? Non è possibile rispondere a queste (e a molte altre) domande senza prima completare la componente iconica con le componenti discorsive, cioè verbali e simboliche, ad essa associate (Figura 2) per poi creare collegamenti di senso tra esse[8]:

[7] È chiaro che, tenendo conto dell'attuale letteratura in didattica della matematica, sarebbero possibili molte riflessioni e interpretazioni sui punti toccati nelle due frasi appena concluse. Tuttavia, con l'obiettivo di mantenere il fuoco del capitolo il più neutrale possibile, si è scelto di mantenere lo stesso piano descrittivo proposto in Laborde e Laborde (1995).

[8] Con il termine *senso* facciamo qui riferimento a Nunokawa (1994) che riprende la distinzione Vygotskyiana tra *significato* – cioè, gli aspetti decontestualizzati delle parole - e il *senso* – ossia gli aspetti contestualizzati delle parole.



Il *quadrilatero completo* (Carnot, 1801) invece possiede quattro lati a, b, c, d e sei vertici ab, ac, ad, bc, bd, cd, i quali si raggruppano in tre coppie di vertici opposti ab e cd, ac e bd, ad e bc; le rette $ab \cdot cd \equiv m$, $ac \cdot bd \equiv n$, $ad \cdot bc \equiv p$, che congiungono vertici opposti, sono le *rette diagonali* del quadrilatero completo, e formano il *trilatero diagonale*.

Figura 2: definizione di quadrilatero completo, inserita tra i primi elementi di geometria proiettiva (Castelnuovo, 1904, p.14).

Infine, esiste un'ulteriore problematicità dovuta al fatto che, come mette a fuoco l'illuminante lavoro di Nunokawa (1994), il "già disegnato" (che presumibilmente sarà un'istanza di *un buon disegno* per la situazione considerata), nasconda tutto il *processo del disegnare* che spesso è fatto di disegni che rappresentano tappe intermedie rivelatorie dei processi di pensiero di chi apprende o risolve un problema. In particolare, tali tappe intermedie dicono molto non solo se guardate ciascuna nella propria forma finale ma soprattutto se si tiene in attenta considerazione anche il modo in cui vengono disegnate. Oltre a ciò, come vedremo più dettagliatamente nella Sezione 1.1.3, il processo del disegnare è radicalmente diverso se fatto con carta e penna (e gomma) o se fatto usando una tecnologia digitale (nel cui caso, a seconda della tecnologia digitale scelta, l'atto di disegnare si istanzia in maniera molto specifica).

Quando si parla dunque di testo matematico, tutta questa complessità e specificità deve essere tenuta in attenta considerazione.

1.1.2. Terminologia preliminare: Piattaforma di Servizi GeoGebra

Con l'espressione *Piattaforma di Servizi GeoGebra* (PSG) intenderemo tutto ciò che appartiene (o può appartenere) al sito www.geogebra.org. In particolare, sono esempi di elementi della PSG:

- Tutte le varie versioni del software di matematica dinamica[9] GeoGebra (app), quali ad esempio *GeoGebra Classico*[10], *GeoGebra Classico 3D*[11], *GeoGebra CAS*[12], *Calcolatrice CAS*[13], *Calcolatore di probabilità*[14], ecc.
- La collezione di risorse online della comunità[15]: si tratta di materiali gratuiti di varia tipologia creati dalla comunità di coloro che hanno un account GeoGebra.
- L'ambiente di creazione di *Attività GeoGebra*[16] che sono collezioni di diversi tipi di risorse (testi, applet GeoGebra, domande, diversi tipi di file, ecc) e alle quali possono essere attribuiti diversi livelli di visibilità (Figura 3). Una volta creata, un'*Attività GeoGebra* raccoglie tutti i suoi contenuti in una singola pagina web.

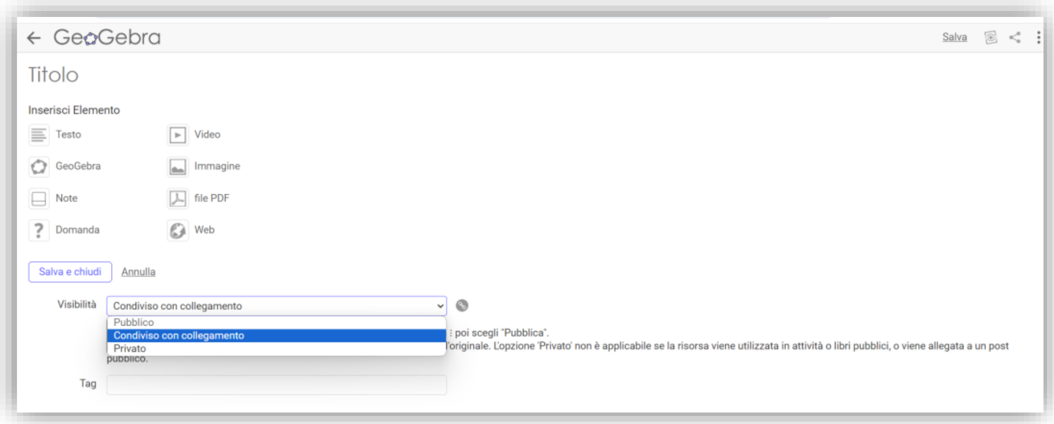


Figura 3: Schermata dell'editor di Attività GeoGebra.

- L'ambiente di creazione di *Libri GeoGebra*[17] che sono collezioni organizzate di vari tipi di risorse. Ogni "pagina" di un *Libro GeoGebra* è un'*Attività GeoGebra* (e, viceversa, ogni *Attività GeoGebra* può essere integrata come pagina in un *Libro GeoGebra*). Dopo aver creato un *Libro GeoGebra*, è possibile impostare il tipo di visibilità. In particolare, può

[9] Ad oggi, le app sono talmente tante e diversificate che ha senso parlare in modo più ampio di software di matematica dinamica. Tuttavia, GeoGebra nasce nel 2001 dalla tesi di laurea di Markus Hohenwarter ed era un software di geometria dinamica. I software di geometria dinamica nascono molto prima, alla fine degli anni '80, da un'intuizione di Jean-Marie Laborde, informatico, matematico e ricercatore di matematica discreta presso l'Université Joseph Fourier di Grenoble, che, in collaborazione con gli studenti di dottorato Philippe Cayet, Yves Baulac e Franck Bellemain, rilasciò nel 1988 la prima versione del *Cabri Géomètre* (http://www.cabri.net/cabri2/historique-e.php).
[10] https://www.geogebra.org/classic?lang=it
[11] https://www.geogebra.org/classic#3d
[12] https://www.geogebra.org/classic#cas
[13] https://www.geogebra.org/cas
[14] https://www.geogebra.org/classic#probability
[15] https://www.geogebra.org/materials
[16] Presentazione del GeoGebra Team German: https://www.geogebra.org/m/e9Z6UDu4
[17] Presentazione di Bea Kristinsdóttir: https://www.geogebra.org/m/ztaQMAMx

essere reso pubblicamente accessibile, consentendo a chiunque connesso ad internet di cercarlo, trovarlo, visualizzarlo e, se in possesso di un account GeoGebra, modificarlo.

- L'ambiente *GeoGebra Classroom*[18] che consente a chi è in possesso di un account GeoGebra di creare classi virtuali associate ad *Attività GeoGebra* o a *Libri GeoGebra.* A seconda del tipo di ruolo che si ha nella classe virtuale realizzata in *GeoGebra Classroom* (insegnante o studente) sono disponibili diversi tipi di funzionalità. In particolare, chi ha il ruolo di insegnante, può assegnare compiti interattivi, monitorare in tempo reale il lavoro degli studenti e mantenere archiviato l'ultimo stato del lavoro da loro svolto.

Nel corpo della tesi, tranne in casi particolari, non saranno presenti ulteriori descrizioni tecniche rispetto alla PSG o ai suoi elementi; tuttavia, per quelle più rilevanti per il lavoro qui descritto, saranno forniti maggiori dettagli in Appendice A. Nel seguito, i comandi e le funzionalità di GeoGebra verranno indicate tra parentesi quadre (es. [Slider]).

1.1.3 La definizione fondamentale di processo di geogebrizzazione di un testo matematico

Facendo riferimento alle due sezioni precedenti, le due espressioni caratterizzate avranno un ruolo cruciale nella definizione del processo di geogebrizzazione: infatti il *testo matematico stampato* sarà il punto di partenza di tale processo mentre la *PSG* sarà il punto di arrivo. In particolare:

La *geogebrizzazione* di un testo matematico (GGBZ) è un processo attraverso il quale uno o più individui trasformano un testo matematico stampato in una *combinazione adeguata di risorse* della PSG.

Lo scopo finale di questo processo è creare un prodotto reso pubblico nella PSG che possa essere utilizzato per scopi comunicativi, divulgativi o didattici. Per *combinazione adeguata di risorse* intendiamo l'insieme di scelte e azioni compiute dagli individui coinvolti nella geogebrizzazione del testo che sfruttano le opportunità fornite dalla PSG[19] in modo tale da soddisfare i due requisiti descritti di seguito.

- **Requisito 1, relativo all'implementazione del processo (R1):** spacchettare e materializzare la matematica incorporata nel testo matematico di partenza sfruttando le *affordances*[20] della PSG.

[18] Presentazione del Geogebra team: https://www.geogebra.org/m/hncrgruu
[19] Come, ad esempio, la dinamizzazione e l'animazione dei contenuti matematici, la possibilità di condividere le risorse, ecc.
[20] Il termine *affordances* è stato coniato dallo psicologo statunitense James J. Gibson nell'ambito dei suoi studi sulla percezione visiva e, in un lavoro del 1977, troviamo la seguente definizione:

- **Requisito 2, relativo alle caratteristiche del prodotto finale (R2)**: aumentare il potenziale comunicativo del testo originale partenza.

La Figura 4 presenta un primo schema della GGBZ, cioè un processo da un ben definito punto di partenza a un ben definito punto di arrivo realizzato in maniera tale da soddisfare due particolari requisiti. Tuttavia, i due requisiti sono ancora vaghi e astratti: per renderli operativi, è necessario sviluppare la loro caratterizzazione radicandola in letteratura, cosa che sarà oggetto delle due sezioni che seguono.

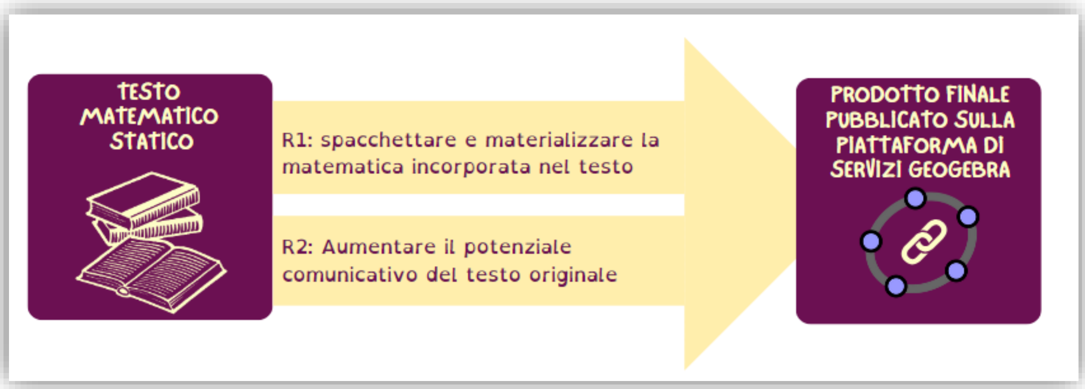


Figura 4: prima schematizzazione della definizione di GGBZ[21].

Caratterizzazione del requisito R1 relativo all'implementazione del processo

Il requisito R1 richiede di spacchettare e materializzare la matematica incorporata nel testo matematico di partenza sfruttando le *affordances* (Gibson, 1977) della PSG[22]. Per caratterizzare l'espressione *spacchettare la matematica incorporata in un testo* – in relazione alla tecnologia digitale – facciamo riferimento al lavoro di Jankvist e Geraniou (2021) che esplorano il ruolo della tecnologia digitale (in particolare l'azione di trascinamento nel software GeoGebra) come *whiteboxing* del contenuto matematico di un estratto di un testo matematico (che nel loro caso è la proposizione 41 degli *Elementi* di Euclide nella traduzione di Fitzpatrick, 2008). Gli autori, rifacendosi ad altri recenti lavori (Balsløv, 2018; Jankvist &

"The *affordances* of the environment are what it *offers* the animal, what it *provides* or *furnishes*, either for good or ill" (Gibson, 1977, p. 67, enfasi nell'originale).

[21] Questa e tutte le immagini e gli schemi del presente lavoro (tranne gli screenshot da video o schermo) sono fatte da me con Canva: https://www.canva.com/it_it/

[22] Considerando la complessità dell'ambiente della GSP (cfr. Sezione 1.1.2) tali *affordances* coinvolgono necessariamente diversi livelli. Facendo ad esempio riferimento alla classificazione proposta in Kircher e colleghi (2004), le *affordances* della GPS possono riguardare il piano tecnologico (proprietà della tecnologia digitale legate all'usabilità), quello didattico/pedagogico (proprietà della tecnologia digitale legate nello specifico all'insegnamento/apprendimento) e quello sociale (proprietà della tecnologia digitale legata all'interazione sociale). Per il caso particolare delle *affordances* delle app di GeoGebra, maggiori dettagli saranno dati nella Sezione 2.3.1.

Geraniou, 2019; Jankvist et al., 2019; Olsen & Thomsen, 2017; Thomsen & Jankvist, 2020) caratterizzano il *whiteboxing* come ciò che accade quando la tecnologia digitale viene impiegata come se fosse un "apriscatole" che permette di svelare e portare alla luce aspetti matematici che altrimenti rimarrebbero inaccessibili o, quantomeno, nascosti agli studenti.

D'altra parte, già Laborde e Laborde (1995), nel caso particolare della geometria e in parte rifacendosi a Parzysz (1988), mettono a fuoco l'opportunità (e la necessità) di precisare meglio il rapporto tra figura, disegno e "disegno idealizzato" quando c'è in campo un software geometrico. Infatti, Parzysz (1988) usa il termine *figura* per indicare il referente teorico nel contesto di una data teoria geometrica (ad esempio, geometria euclidea, proiettiva, sferica, ecc) e il termine *disegno* per indicare l'entità materiale prodotta da un agente. Una gestione consapevole della relazione tra *figura* e *disegno* è strettamente vincolata alla conoscenza matematica e la letteratura in didattica della matematica fornisce oggi lenti potenti per poter interpretare e inquadrare questa delicata relazione[23].

Tuttavia, quando il disegno viene realizzato su uno schermo usando un certo software geometrico S, Laborde e Laborde (1995) delineano con precisione due specifiche cruciali. La prima è che il disegno, per essere realizzato in (e con) S, deve essere codificato attraverso una sua descrizione esplicita che andrà fatta in un linguaggio adeguato rispetto ad S stesso. Infatti, "un disegno prodotto sullo schermo è il risultato di un processo messo in atto da un utente che renda esplicita la definizione del referente" (p. 98, traduzione personale dall'inglese[24]). Il referente di un disegno in (e con) S però, ha delle caratteristiche che dipendono dal design di S: "nella geometria software, la figura è determinata da un processo di costruzione composto da primitive e da operazioni che è possibile realizzare" (p. 98, traduzione personale dall'inglese[25]). La delicatezza di questo passaggio dovrebbe (e può) essere oggetto di studi specifici che, come anticipato in chiusura della Sezione 1.1.1, andranno istanziati rispetto alla specifica tecnologia digitale in uso. Ad esempio, in Del Zozzo e Santi (2023) viene proposta un'analisi comparativa tra l'atto di disegnare una figura geometrica realizzato da un essere umano con mano, carta e penna e quello realizzato da un essere umano che,

[23] Si potrebbero citare moltissimi lavori e diverse prospettive, ma, a titolo di esempio, mi limito solo a nominare la Teoria dei Concetti Figurali (Fischbein, 1993; Mariotti & Fischbein, 1997) e l'approccio semio-cognitivo proposto da Duval (1998, 2005, 2017).
[24] Testo originale: "a drawing produced on the screen is the result of a process performed by the user who makes explicit the definition of the referent".
[25] Testo originale: "In software geometry, the figure is determined by a construction process made of primitives and by the operations which are possible to perform".

usando un linguaggio di programmazione, interagisce con un robottino che può muovere un pennarello su una superficie piana[26].

Un testo matematico però è anche un testo e, come tale, un essere umano può accedere al suo contenuto attraverso la lettura, altro punto che la ricerca in didattica della matematica rivela essere tutt'altro che banale. Basti pensare agli studi sulla leggibilità di testi matematici (ad esempio, Gagatsis, 1999) a quelli sulla comprensione di testi matematici (ad esempio D'Amore e Fandiño Pinilla, 2016[27]), a quelli in cui viene messo in evidenza l'impatto degli aspetti linguistici nelle risposte fornite dagli studenti (ad esempio, Boninsegna e colleghi, 2018), a quelli che mettono in luce come, di fronte al testo di un problema, siano possibili diverse modalità di lettura (ad esempio, Bolondi e colleghi, 2021) e a quelli in cui si mostra come variazioni dell'organizzazione del testo di un quesito possano avere impatto sui processi degli allievi (ad esempio, Daroczy et al., 2015 e Bolondi et al., 2023).

Mettendo assieme le considerazioni riportate finora in merito a R1, una sua operazionalizzazione concreta può essere scandita in due diverse fasi:

- Una prima fase di lettura e analisi del testo di partenza, finalizzata ad acquisire familiarità con i suoi contenuti matematici;
- Una seconda fase, che potremmo chiamare di *whiteboxing*, in cui, attraverso le funzionalità della PSG, viene realizzato un *disegno in GeoGebra*, cioè una visualizzazione dinamica del contenuto matematico del testo che chi è impegnato nel processo di GGBZ realizza per la propria comprensione.

Caratterizzazione del requisito R2 relativo alle caratteristiche del prodotto finale

Il requisito R2 richiede di aumentare il potenziale comunicativo del testo originale partenza. Per caratterizzare l'espressione *aumentare il potenziale comunicativo del testo originale di partenza* abbiamo fatto riferimento sia alla letteratura in didattica della matematica, in particolare al lavoro di Fandiño Pinilla (2019), sia alla Teoria del Carico Cognitivo, in particolare al lavoro di Mayer & Moreno (2003).

Fandiño Pinilla (2019) approfondisce alcuni episodi significativi che si sono verificati a margine di diversi anni di studio empirico finalizzato alla creazione di "una formula oggettiva per la valutazione empirica della comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti di qualsiasi livello scolastico " (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016, p. 59). Uno degli episodi esaminati riguarda la

[26] Per essere più chiari e precisi, nell'articolo si fa riferimento a un robottino chiamato GGBot e il linguaggio di programmazione è SNAP! Per maggiori dettagli, rimando a Baccaglini Frank et al. (2020) e a Del Zozzo e Santi (2023).
[27] Qui ho fatto riferimento all'articolo in italiano ma ne esiste anche una versione in inglese (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2015) e una in spagnolo (Fandiño Pinilla & D'Amore, 2015).

comprensione di dimostrazioni scritte nell’ambito della geometria euclidea nelle quali gli aspetti verbali e simbolici della dimostrazione erano accompagnati da un disegno illustrativo. L’autrice mette in evidenza che decostruire un disegno già completo (che, ricollegandoci a quanto visto nella Sezione 1.1.1 potremmo chiamare il “già disegnato”) sulla base di quanto viene scritto nella parte discorsiva della dimostrazione può essere una prova piuttosto impegnativa per gli studenti, che faticano a coordinare tra loro queste componenti. Più che destrutturare la figura già completa, dunque, un suggerimento utile potrebbe essere quello di "rifare la figura daccapo, passo dopo passo, coordinando quel che c’è scritto nel testo, con quel che appare nella figura stessa" (Fandiño Pinilla, 2019, p. 35). A sostegno di questa indicazione, l'autrice informa di un’interessante evidenza avvenuta nell’ambito della ricerca empirica precedentemente citata (D'Amore & Fandiño Pinilla, 2016) quando gli autori hanno misurato la comprensione del testo della dimostrazione del teorema 5 del libro I degli *Elementi* di Euclide in due diversi scenari. Nel primo, agli studenti è stato proposto un test di comprensione in cui il testo era accompagnato da un unico disegno completo. Alcuni giorni dopo, la stessa classe ha affrontato un nuovo test con lo stesso testo, che però questa volta è stato segmentato in modo da far corrispondere i vari segmenti di testo a una sequenza di disegni parziali in evoluzione che ricostruivano il disegno finale (Figura 5).

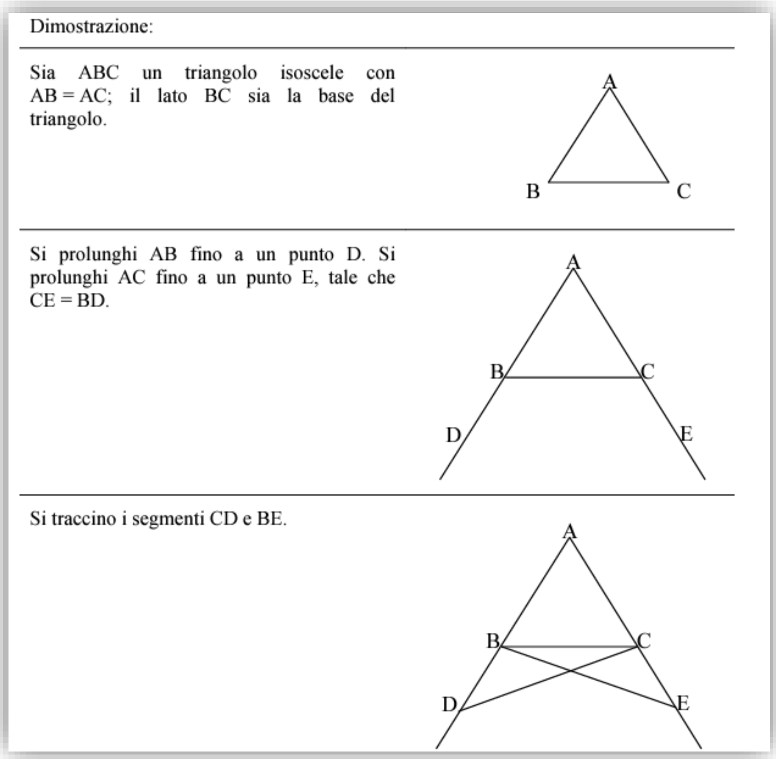


Figura 5: Estratto con i primi tre step dell'apparato in evoluzione sperimentato da Fandiño Pinilla (2019, p. 37) in merito alla comprensione di testi matematici.

Questo particolare approccio, in cui il disegno si sviluppa parallelamente al testo, ha migliorato in modo significativo "la comprensione della relazione fra quel che viene scritto a parole e quel che viene disegnato" (Fandiño Pinilla, 2019, p. 38).

L'apparato in evoluzione sperimentato da Fandiño Pinilla nell'ambito della comprensione del testo matematico è costruito sulla base di una metodologia che incontra riscontro anche se guardata dal punto di vista della *Teoria del Carico Cognitivo* (TCC)*.* Tale teoria vede le prime luci con i lavori dello psicologo australiano John Sweller alla fine degli anni '80 (Sweller, 1988) e nasce dall'intuizione di creare un collegamento operativo tra il funzionamento della cognizione umana e la progettazione della formazione (*instructional design*). Si tratta quindi di una teoria dell'istruzione in cui le indicazioni operative in termini di progettazione didattica vengono delineate sulla base di ciò che sappiamo sul funzionamento dell'architettura cognitiva umana (Sweller et al., 2011), in particolare per quel che riguarda la memoria di lavoro e la memoria a lungo termine[28]. Sin dai primi lavori sulla TCC, vengono distinte diverse tipologie di carico cognitivo: qui faremo riferimento a Sweller e colleghi (2011). Immaginiamo di avere un allievo a cui è proposto un certo materiale/compito/attività; esso presenterà un:

- *Carico Cognitivo Intrinseco*, che è legato alla quantità di interazioni tra elementi che devono essere contemporaneamente gestite dal soggetto che apprende. In Paas e colleghi (2003) viene fornito il seguente esempio: se si sta usando un programma per modificare le foto, imparare l'effetto dei tasti da F1 a F12 della tastiera ha un basso livello di interattività tra elementi perché ciascun tasto può essere esaminato singolarmente; se invece si vuole imparare a modificare una foto, il livello di interattività tra elementi diventa molto alto perché ad ogni azione fatta, ad esempio, sulla luminosità corrisponde una modifica sui contrasti che andrà quindi bilanciata e gestita di conseguenza. Il carico cognitivo intrinseco dipende strettamente da ciò che deve essere appreso e dall'expertise di chi apprende e non può essere modificato agendo solo sulla progettazione didattica.
- *Carico Cognitivo Estraneo*, che è legato al modo in cui le informazioni vengono presentate o dal tipo di attività in cui gli studenti devono impegnarsi. Questo tipo di carico cognitivo è completamente dipendente dalle scelte di progettazione didattica ma ha un effetto sull'apprendimento perché "ruberà" risorse cognitive che avrebbero potuto essere usate diversamente. Prendendo ancora spunto dal lavoro di Paas e colleghi

[28] La *memoria di lavoro* è l'aspetto della memoria umana che consente il mantenimento e la manipolazione di informazioni temporanee, funzionali al raggiungimento di un certo obiettivo. La *memoria a lungo termine* è l'aspetto della memoria umana che riguarda informazioni permanenti acquisite tramite l'apprendimento o l'esperienza (Hartley & Hitch, 2022).

(2003), possiamo illustrare questo concetto con un esempio pratico: immaginiamo che uno studente stia consultando un libro in cui, durante la trattazione di un argomento A, si faccia riferimento a un altro argomento B senza specificare esplicitamente la sua posizione nel testo. In questa situazione, lo studente dovrà impiegare risorse cognitive aggiuntive per cercare B nel libro. Tuttavia, se già nella pagina del libro in cui si tratta A fosse stato fornito il numero di pagina in cui si trova l'argomento B, lo sforzo cognitivo richiesto sarebbe stato notevolmente ridotto.

La “somma” tra il carico cognitivo intrinseco e quello estraneo fornisce il carico cognitivo totale richiesto da un certo compito/attività. Se esso supera le capacità della memoria di lavoro della persona che affronta il compito/compie l’attività, il suo processo di apprendimento, da un punto di vista cognitivamente strutturale, sarà ostacolato (se non impedito). Diventa dunque cruciale, in fase di progettazione didattica, riuscire a dosare il carico cognitivo richiesto dal compito/attività, cercando di minimizzare quello estraneo per permettere a chi apprende di concentrare le proprie risorse cognitive in quello intrinseco. Tra l’altro, in matematica, questo discorso assume particolare rilevanza perché il livello di interattività tra elementi è per natura stessa della disciplina molto elevato e quindi la pratica matematica è qualcosa in cui il carico cognitivo intrinseco è già alto di per sé[29].

La TCC fornisce numerosi esempi di scelte che impattano sul carico cognitivo richiesto per svolgere un certo compito/attività ed enuclea una serie di linee guida operative che permettono all’insegnante (o, in generale, a chi si occupa di progettazione didattica) di intervenire consapevolmente e intenzionalmente nella minimizzazione del carico cognitivo estraneo. Per una trattazione dettagliata e completa delle varie linee guida rimando agli specifici lavori sul tema, come ad esempio quelli già citati, in particolare Sweller e colleghi (2011). Quello che vorrei però evidenziare qui è che il massivo impiego delle tecnologie digitali ha permesso l’approfondimento di una trattazione mirata dei principi della TCC, quando ci si contestualizza nell’ambito dell’istruzione multimediale che, come evidenziato da Mayer e Moreno (2003) comporta "la presentazione di parole e immagini destinate a favorire l'apprendimento" (p. 43). Nel loro articolo, dopo aver approfondito la questione del sovraccarico cognitivo, presentano una serie di

[29] Ho sintetizzato con questa frase alcuni esempi commentati proposti nel capitolo 5 di Sweller e colleghi (2011). Mi rendo conto però che si tratta di una frase che potrebbe (e forse dovrebbe) aprire una trattazione più ampia e specifica in cui la TCC viene messa in seria e scientifica relazione con teorie specifiche di didattica della matematica (prima tra tutte la teoria semio-cognitiva di Duval). Non posso occuparmene in questa sede ma vorrei assumermi la responsabilità scientifica dell’essermi posta questo problema, con la promessa di dedicarci una linea di approfondimento futura, magari in relazione ai lavori su Semiotic Interpretative Knowledge che sto portando avanti con i colleghi Miglena Asenova, Marzia Garzetti e George Santi (Asenova et al., accettato; Asenova et al., 2023a, 2023b).

strategie utili ad abbassarlo. Tra queste strategie, quella che a noi interessa maggiormente è denominata *Principio di contiguità spaziale*, secondo il quale il carico cognitivo richiesto diminuisce quando c'è allineamento tra le parole e le immagini ad esse associate.

Mettendo assieme le considerazioni riportate finora in merito a R2, possiamo delineare una sua operazionalizzazione pratica. L'implementazione si potrebbe concretizzare facendo in modo che le costruzioni realizzate al termine della GGBZ e presenti nel prodotto finale ottenuto – che, ricordiamo, è una risorsa pubblicata nella PSG – siano strutturate in modo da contenere sia la componente iconica che quella discorsiva (testuale e/o simbolica) e da poter essere presentate in evoluzione passo dopo passo. Questo implica che ogni passo della costruzione sarà composto da un segmento discorsivo accompagnato dalla sua corrispondente visualizzazione. In questo modo, si consente a chi fruisce del materiale pubblicato una navigazione chiara e progressiva dell'apparato in evoluzione realizzato.

In conclusione, possiamo riassumere caratterizzando il processo di GGBZ come composto da tre fasi distinte (Figura 6). In primo luogo, a chi mette in atto la GGBZ è richiesto di leggere e analizzare porzioni di testo matematico. Successivamente, si richiede di sfruttare le funzionalità della GPS per visualizzare dinamicamente il contenuto matematico del testo al fine di facilitare la propria comprensione personale. Infine, la visualizzazione dinamica così ottenuta deve essere ristrutturata in vista della pubblicazione nella PSG, integrando le visualizzazioni con le componenti testuali discorsive, suddividendo le parti discorsive inserite in segmenti e sincronizzando ciascun segmento con la visualizzazione appropriata, con l'obiettivo comunicativo di agevolare la comprensione degli utenti che fruiranno il prodotto finale ottenuto.

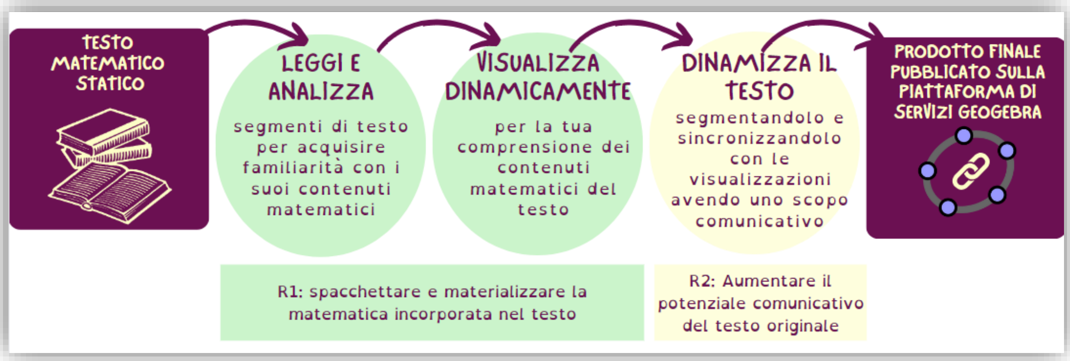


Figura 6: schema del processo di GGBZ. I quadrati viola rappresentano i punti di partenza e di arrivo. I tre cerchi centrali rappresentano le tre fasi e i due riquadri in basso riassumono i requisiti, evidenziando con la corrispondenza cromatica le corrispondenze tra fasi e requisiti.

1.2 Esempio

Prendiamo nuovamente in considerazione l'estratto di testo in Figura 2 relativo alla definizione di quadrilatero completo e consideriamolo come punto di partenza per la GGBZ. In Figura 7 è mostrato il testo originale di partenza (a sinistra) e, a destra, il QR code che rappresenta un possibile esempio di prodotto finale pubblicato sulla PSG, ottenuto dalla GGBZ di quel testo.

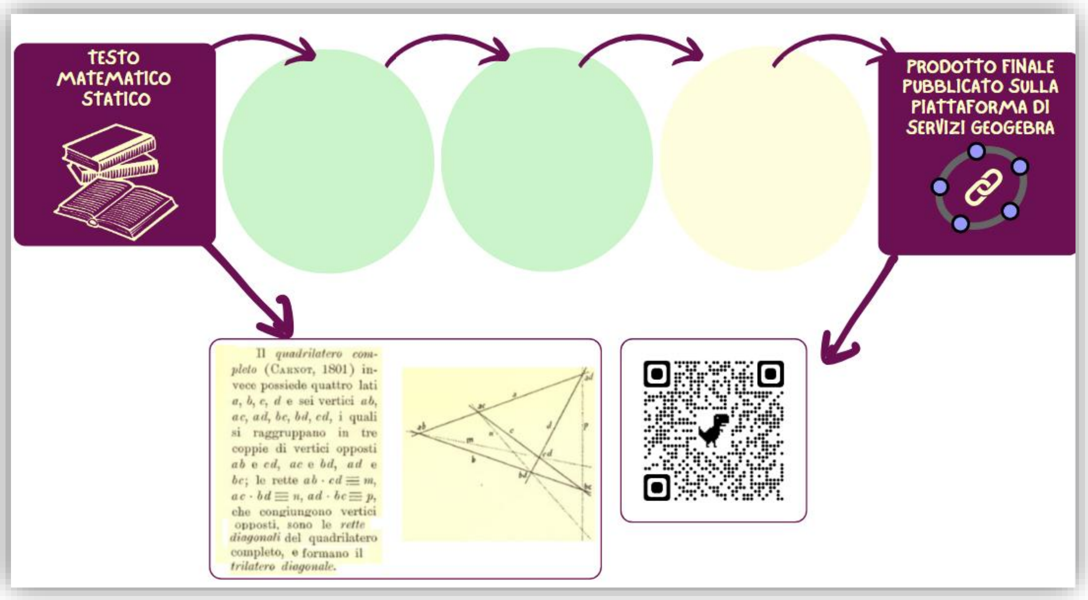
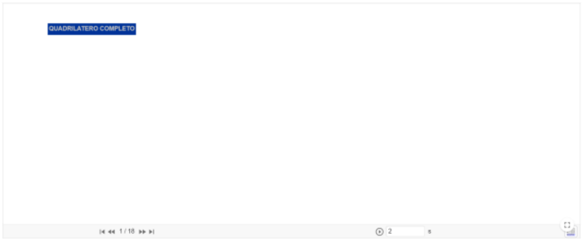
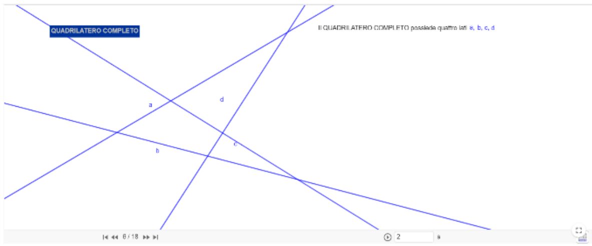
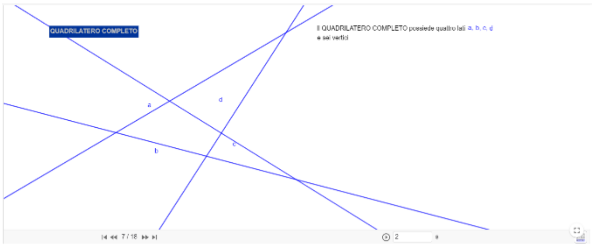
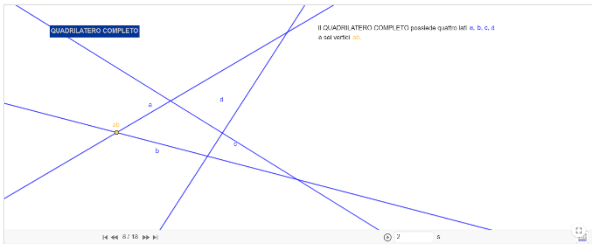
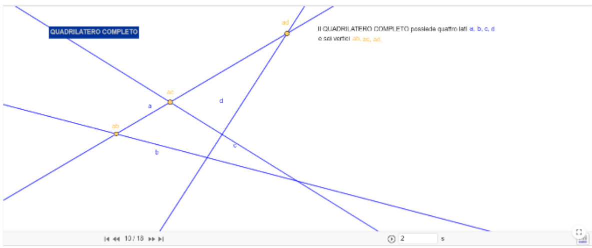
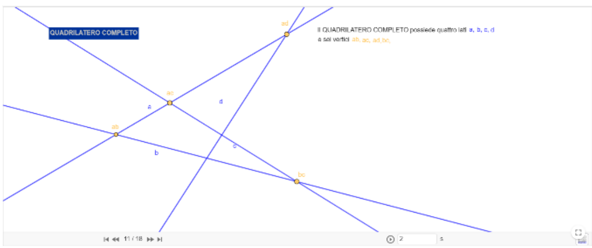
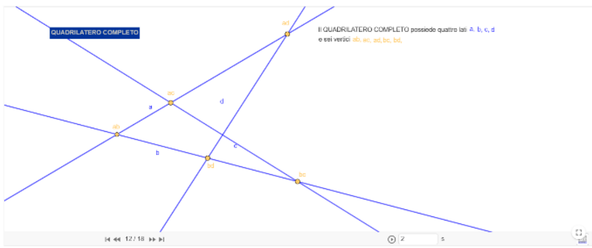


Figura 7: esempio di testo di partenza e prodotto finale di GGBZ. Il link a cui rimanda il QR code è quello di un'Attività GeoGebra accessibile al link: https://www.geogebra.org/m/jw89cagr

Il prodotto finale, realizzato seguendo i criteri metodologici descritti in R2, è un'*Attività GeoGebra* (link in didascalia di Figura 7) che contiene l'applet composto da diciotto step esplicitati in Tabella 1. Essi rivelano la "narrazione della costruzione", che nel libro stampato è incorporata nelle componenti verbali e simboliche del testo ma che rimane nascosta nel disegno fornito (in quanto esso visualizza solo il "già disegnato"). In altri termini, i diciotto step mostrano l'apparato in evoluzione in cui è stato trasformato il testo di partenza attraverso la GGBZ.

DICIOTTO STEP DELL'APPLET NEL PRODOTTO FINALE	
	
	
	
	
	
	

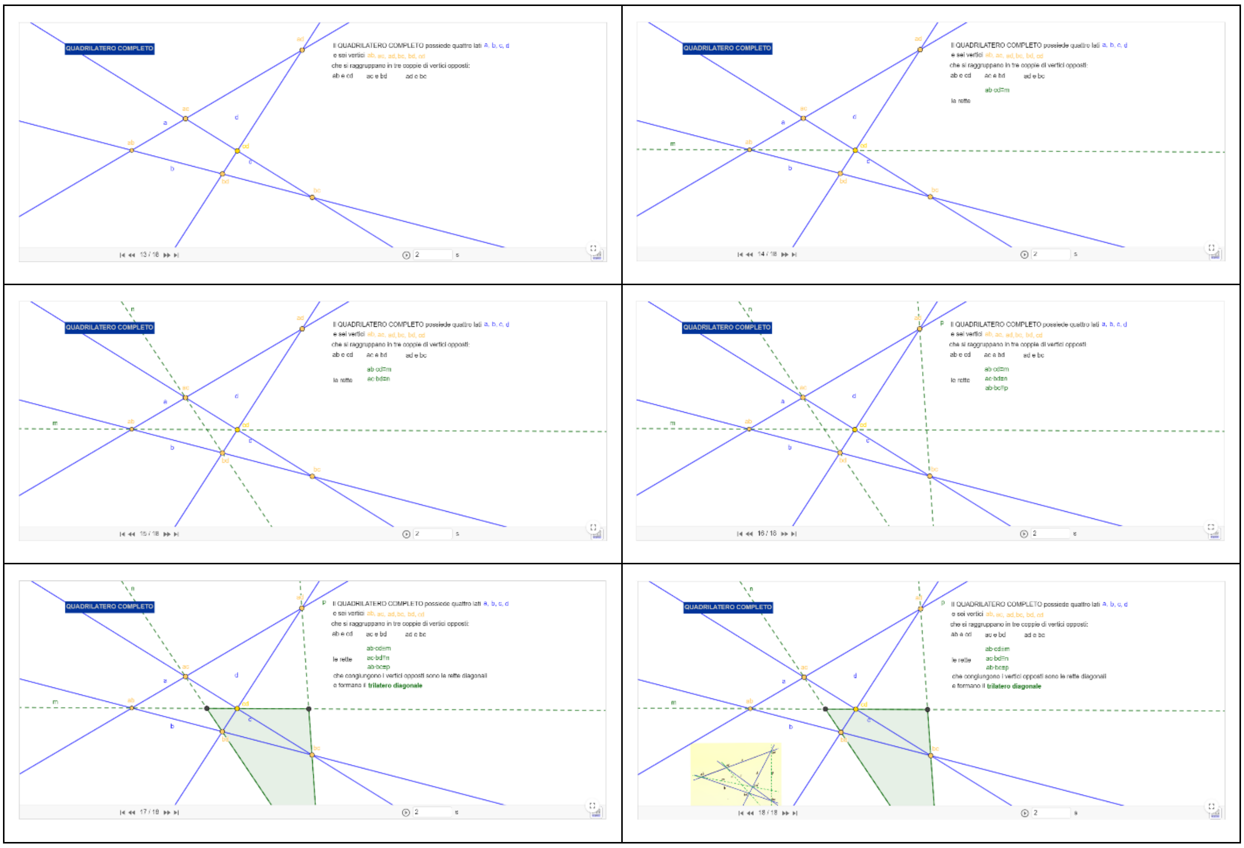


Tabella 1: i diciotto step che compongono l'applet nel prodotto finale.

Ma in che modo si è arrivati a questo prodotto finale? Cioè, da un punto di vista operativo, in che modo vengono implementate le fasi intermedie della GGBZ per arrivare ad un prodotto finale che soddisfi i requisiti R1 e R2? Per rispondere a queste domande, dobbiamo decostruire il percorso che ha portato alla realizzazione del prodotto finale, cosa che faremo nella prossima sezione.

1.2.1 Decostruzione del processo di realizzazione del prodotto finale

In tutta questa sottosezione faremo riferimento a un'*Attività GeoGebra* che contiene la decostruzione completa del processo di GGBZ realizzato e che è accessibile al seguente link: https://www.geogebra.org/m/trx7jfrb. Tale *Attività GeoGebra* è composta da quattro applet, ognuno dei quali ci permetterà di mettere bene a fuoco gli aspetti pragmatici della GGBZ.

Applet con sole visualizzazioni

Implementare le prime due fasi della GGBZ (*Leggi e analizza*, *Visualizza dinamicamente,* Figura 6) significa sostanzialmente soddisfare R1 e, dunque, dopo aver letto e analizzato il testo fornito, si dovrà mettere in atto il *whiteboxing* attraverso il processo di disegnare (in questo caso) nel software *GeoGebra Classico*. Al termine della realizzazione del disegno, si arriva a una costruzione finale che, nell'esempio considerato è quella del primo applet, il cui screenshot è riportato in Figura 8.

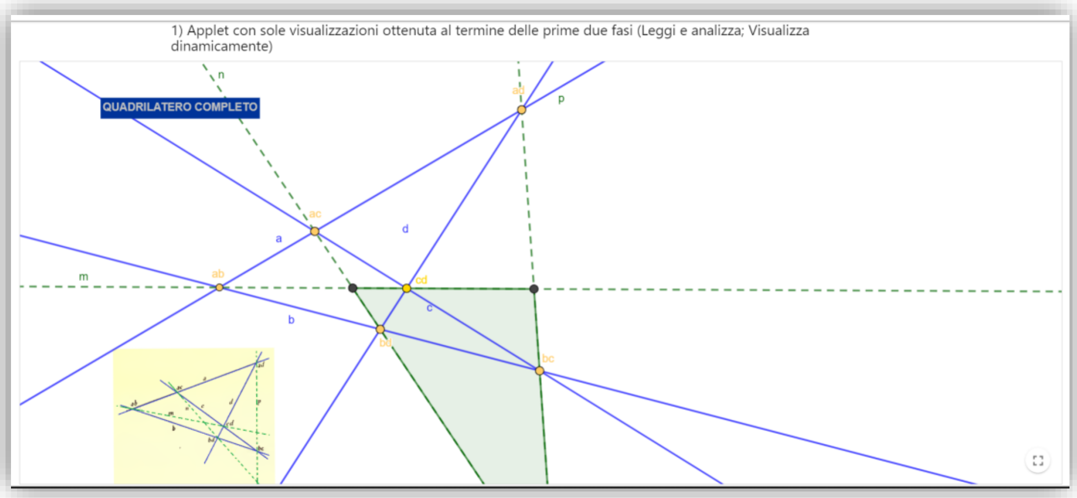


Figura 8: Applet con sole visualizzazioni ottenuta al termine delle prime due fasi (Leggi e analizza; Visualizza dinamicamente).

L'applet certamente visualizza dinamicamente il contenuto matematico del testo ma, al pari della componente iconica del testo stampato, mostra ancora una volta solo il "già disegnato". Infatti, per poter rendere visibile il processo di disegno impiegato per realizzare questa visualizzazione, bisognerebbe visualizzare almeno la [Barra di Navigazione][30]. Inoltre, al momento l'applet non contiene elementi discorsivi. Quindi, è un prodotto che non può essere considerato il prodotto finale della GGBZ per come l'abbiamo definita perché, non aggiungendo nulla da un punto di vista comunicativo, non rispetta ancora il requisito R2.

Dall'applet con sole visualizzazioni all'applet nel prodotto finale

Per poter rispettare R2, è necessario implementare la terza fase della GGBZ (*Dinamizza il testo,* Figura 6). Il primo passo da fare sarà dunque quello di inserire nell'applet anche gli elementi discorsivi del testo, dati dalle componenti verbali e simboliche, opportunamente[31] segmentati. Poi, l'ambiente di GeoGebra che avrà un ruolo cruciale da qui in avanti è il [Protocollo di Costruzione][32] con le sue funzionalità. Nell'*Attività GeoGebra* commentata in questa sezione, l'applet che si ottiene dopo aver inserito il testo (diviso secondo una certa scelta di

[30] La [Barra di Navigazione] è una funzionalità del software GeoGebra che rende disponibili delle frecce con cui navigare gli step della costruzione visualizzata nel file. Maggiori dettagli qui https://wiki.geogebra.org/en/Navigation_Bar.

[31] Per il momento, non specificherò ulteriormente la parola *opportunamente* qui inserita. Sarà specifico oggetto di studio nei capitoli successivi.

[32] Il [Protocollo di Costruzione] è un ambiente disponibile in qualsiasi file GeoGebra e consiste in una tabella interattiva in cui sono visualizzati tutti gli step della costruzione presente in quel file fornita di una [Barra di Navigazione]. Di default, il [Protocollo di Costruzione] contiene la totalità degli step che compongono la costruzione, ordinati in modo cronologico rispetto alla realizzazione della costruzione stessa. Tuttavia, attraverso funzionalità disponibili nell'ambiente [Protocollo di Costruzione], è possibile intervenire sia cambiando l'ordine degli step che inserendo/eliminando nuovi elementi alla costruzione (e quindi inserendo nuovi step o eliminando step già presenti.

segmentazione) è il secondo ed ha un totale di sessanta step, elencati nel [Protocollo di Costruzione] (Figura 9).

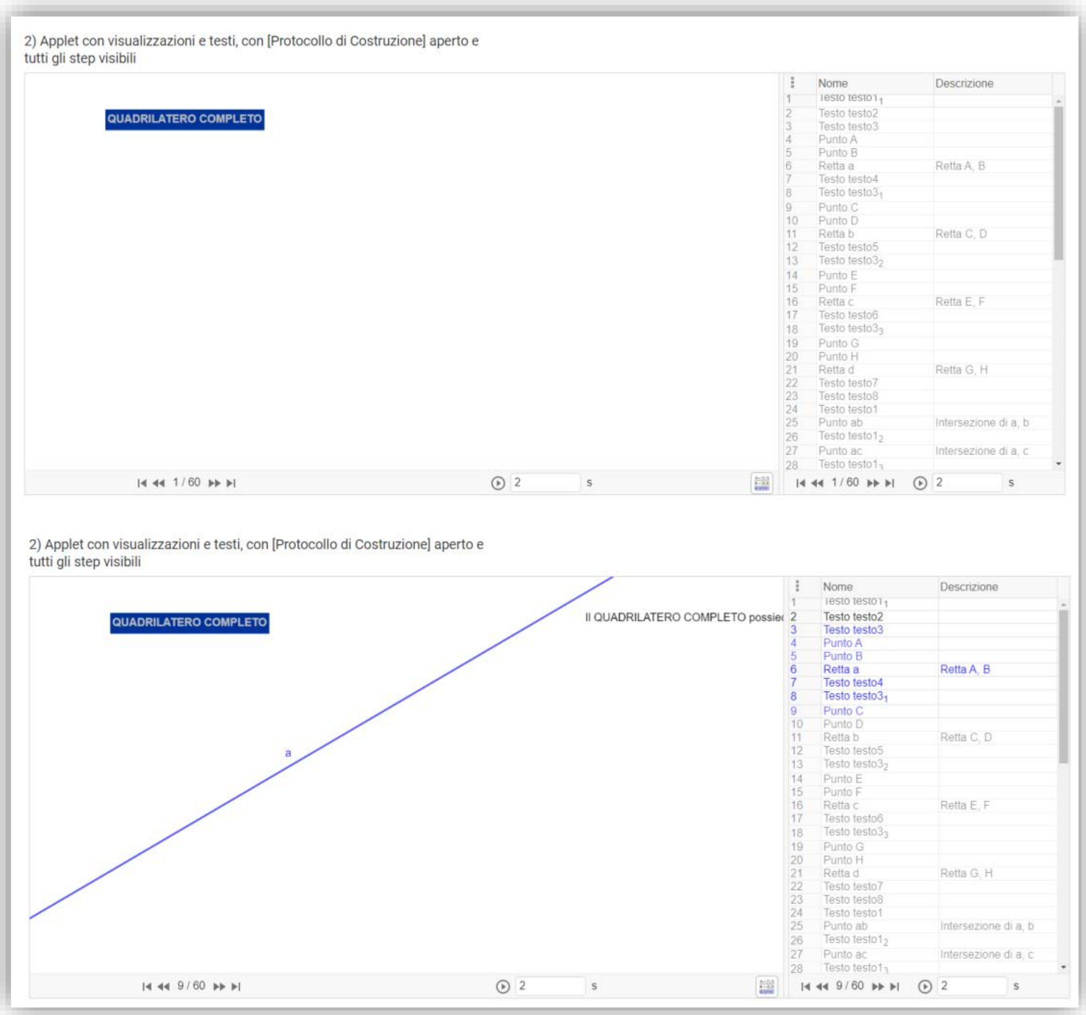


Figura 9: Sopra - Applet con visualizzazioni e testi, con [Protocollo di Costruzione] aperto e tutti gli step visibili. Sotto – step 9 della costruzione in tale applet.

In questo secondo applet, la [Barra di Navigazione] è accessibile; tuttavia, la navigazione della costruzione, che attualmente segue semplicemente la sequenza di inserimento degli oggetti nella schermata, è disorganizzata e non favorisce la comprensione da parte di un utente esterno.

Per personalizzare il comportamento della [Barra di Navigazione] è possibile sfruttare la funzionalità dei [Punti di interruzione][33]. Tecnicamente, inserire un

[33] I [Punti di interruzione] sono un'opzione dell'ambiente [Protocollo di Costruzione] che consente di attribuire il ruolo di punto di interruzione a precisi step della costruzione, permettendo di raggruppare diversi passi della costruzione in un unico step della [Barra di Navigazione]. Maggiori dettagli qui: https://wiki.geogebra.org/en/Construction_Protocol#:~:text=construction%20steps%20as-,breakpoints,-%2C%20i.e.%20group

punto di interruzione in un certo step del [Protocollo di Costruzione] significa che tutti gli elementi di costruzione che lo precedono (fino al punto di interruzione precedente) vengono visualizzati simultaneamente come un unico step della [Barra di navigazione]. Tale funzionalità ha quindi un ruolo cruciale per poter soddisfare R2. Infatti, è proprio attraverso la scelta del posizionamento dei [Punti di Interruzione] che sarà possibile implementare le sincronizzazioni tra testi e visualizzazioni, volute per scopi comunicativi.

Tornando ancora all'*Attività GeoGebra* che stiamo esaminando, il terzo applet mostra la stessa sezione del [Protocollo di costruzione] di Figura 9 in basso, ma stavolta sono stati inseriti i [Punti di interruzione], visibili all'estremità destra del [Protocollo di costruzione]. Tra i sessanta step totali del [Protocollo di costruzione], sono stati inseriti diciotto [Punti di interruzione].

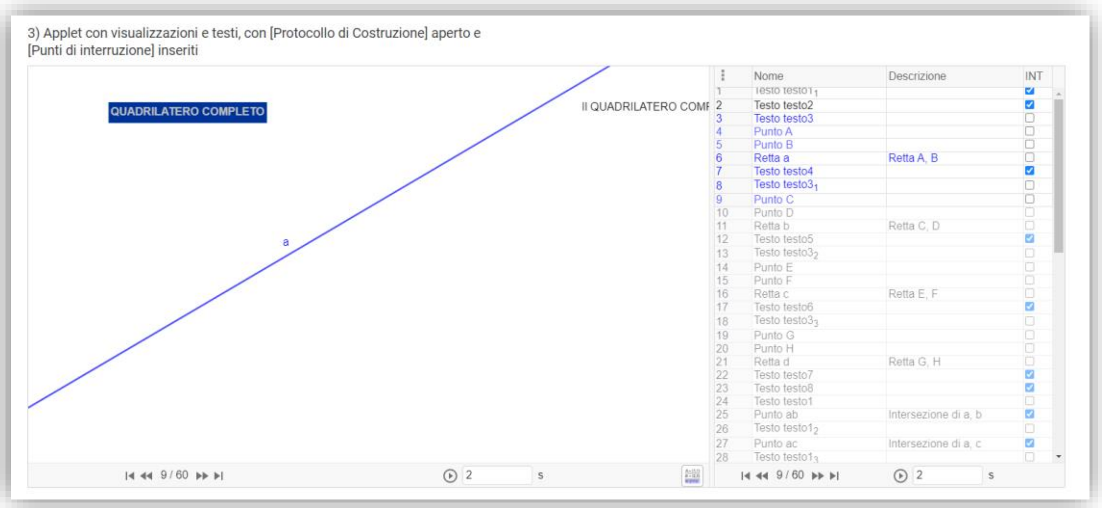


Figura 10: Applet con visualizzazioni e testi, con [Protocollo di Costruzione] aperto e [Punti di interruzione] inseriti.

Attivando ora l'opzione [Mostra solo i punti di interruzione] si arriva al quarto applet dell'*Attività GeoGebra* considerata nel quale sono visibili (e dunque navigabili con la [Barra di Navigazione]) solo i diciotto passi selezionati (Figura 11).

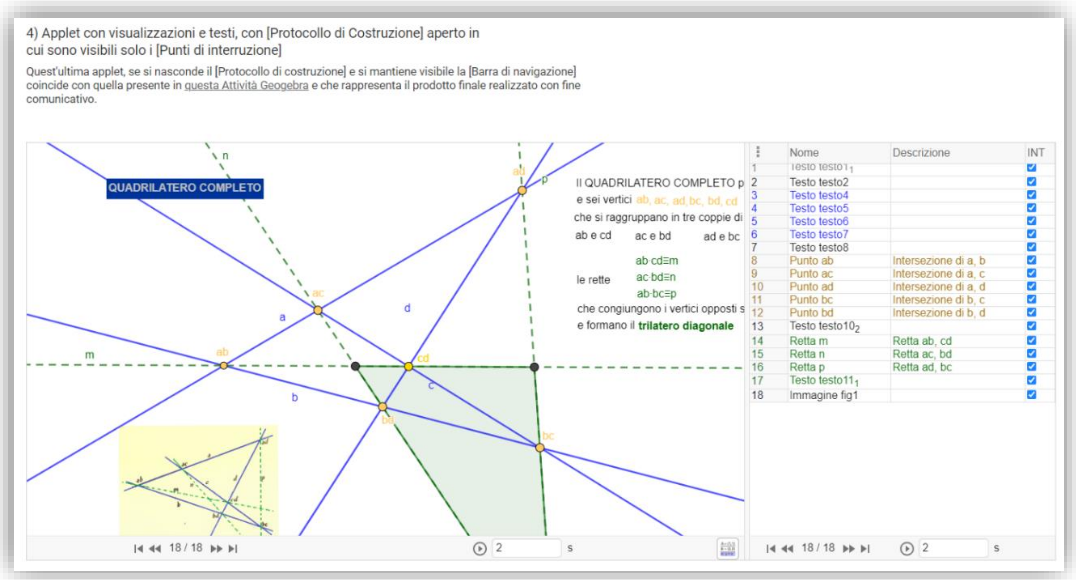


Figura 11: Step finale nell'applet con visualizzazioni e testi, con [Protocollo di Costruzione] aperto in cui sono visibili solo i [Punti di interruzione].

Se in questo quarto applet si nascondesse il [Protocollo di costruzione] si ritroverebbe il prodotto finale a cui si accede tramite il link/QR code in Figura 7 e in cui i diciotto step sono resi espliciti in Tabella 1.

1.3 Commenti conclusivi

Nella Premessa ho esplicitato le prime domande che hanno guidato il lavoro di ricerca presentato in questa tesi. In questo capitolo, ho delineato una risposta alla penultima di quelle domande, che per completezza riporto anche qui: cosa significa da un punto di vista operativo "geogebrizzare" un testo? Infatti, questo capitolo è dedicato alla definizione di GGBZ di un testo matematico, processo che si sviluppa in tre fasi e che da un testo matematico stampato permette di arrivare a un prodotto finale pubblicato nella PSG e realizzato in modo tale da soddisfare due particolari requisiti. Il primo requisito (R1) fa riferimento all'implementazione del processo e richiede di usare opportunamente le *affordances* della PSG per spacchettare e materializzare la matematica incorporata nel testo di partenza. Il secondo requisito (R2) fa riferimento al prodotto finale, che deve essere realizzato in modo da aumentare il potenziale comunicativo del testo di partenza. Tale definizione è stata pensata e formulata in modo da essere il più generale possibile ed è stata accompagnata da un esempio commentato.

L'ultima domanda nella Premessa recitava così: cosa comporta, da un punto di vista didattico e cognitivo, mettere in atto la GGBZ di un testo? Per rispondere, sarà necessario tutto il resto del lavoro. Il primo passo però, è stato quello di concentrarmi su un particolare caso studio che presenterò e contestualizzerò nel capitolo che segue.

2 – Caso studio: Castelnuovo e la geometria proiettiva

Nel capitolo precedente è stata articolata la definizione generale di GGBZ di un testo matematico e la tesi sostenuta nel presente lavoro è che impegnarsi in un processo di GGBZ si inserisca in processi di apprendimento nel senso di Radford (2021, si veda Capitolo 3). In questo capitolo si caratterizzerà il nostro caso studio[34], in cui il testo matematico di partenza considerato è *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Castelnuovo (1904), il punto di arrivo sarà un *Libro GeoGebra* e il contesto dell'attività è la progettazione di una nuova edizione del testo di Castelnuovo (Figura 12).

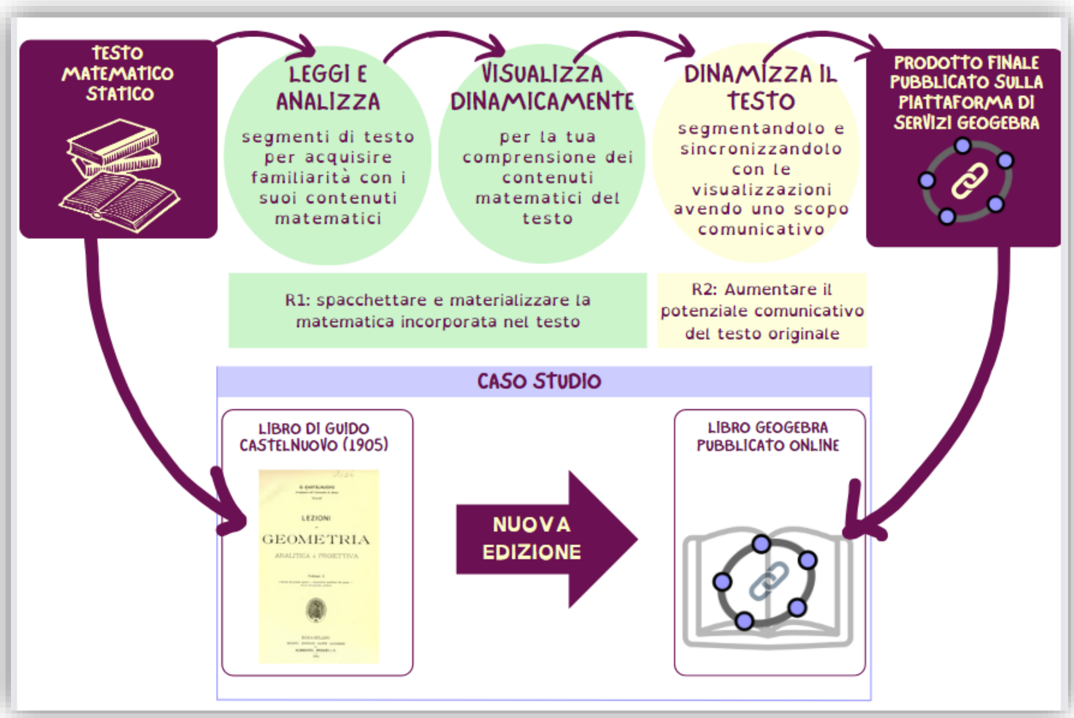


Figura 12: GGBZ e caso studio.

Ma perché scegliere questo testo specifico per studiare il processo di GGBZ? E, più in generale, perché scegliere oggi di lavorare con un testo di geometria proiettiva dell'inizio del XX secolo? Rispondere a domande come queste sarà l'obiettivo delle sezioni che seguono.

[34] L'espressione *caso studio* va intesa nel senso di Yin (2003). In particolare, in questo lavoro si considererà un *caso di studio singolo rivelatore* (p.71) di ciò che accade durante il processo di GGBZ.

2.1 La prima edizione di *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Guido Castelnuovo

Guido Castelnuovo (1865-1952) fu uno dei maggiori esponenti della Scuola Italiana di Geometria Algebrica. Dopo un primo periodo all'Università di Torino come assistente alla cattedra di Enrico D'Ovidio (1843-1933), prese servizio nel 1891 presso l'Università di Roma come titolare della cattedra di *Geometria analitica e proiettiva* per poi succedere nel 1903 a Luigi Cremona (1830-1903) alla cattedra di *Geometria superiore*. L'edizione del 1904 del testo *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*[35] è una delle prime opere scritte da Castelnuovo con intento didattico (Gario, 2016). Si tratta di un testo universitario in cui Castelnuovo, "per far cosa grata ai suoi studenti" (Castelnuovo, 1904, p.v) raccoglie le sue lezioni del primo corso della facoltà di Scienze e, come da lui stesso dichiarato nella prefazione, mostra la sua interpretazione dell'idea di Luigi Cremona e di Valentino Cerruti (1850 - 1909) di sostituire ai corsi tradizionali di geometria proiettiva sintetica e di geometria analitica un unico insegnamento. Come altri libri di testo della stessa epoca, l'opera di Castelnuovo mostra una forte dipendenza dal linguaggio naturale per descrivere contenuti geometrici grafici e dinamici. Inoltre, i geometri del tempo facevano uso di numerosi supporti visivi che mostrare la forma degli oggetti geometrici trattati, si pensi ad esempio al caso dello studio delle superficie e alla collegata grande (seppur breve) diffusione dei *modelli matematici*, espressione che in quel periodo si riferiva proprio alle rappresentazioni fisiche tridimensionali di entità matematiche[36]. Per quel che riguarda nello specifico il disegno geometrico, avevano un ruolo cruciale i corsi di geometria descrittiva, ambito della geometria che si occupa delle tecniche di disegno geometrico per la rappresentazione di oggetti tridimensionali. Nei libri stampati però, i contenuti venivano solo a volte accompagnati da immagini o formalizzati simbolicamente, innanzitutto perché stampare libri che contenessero immagini e formule intercalate al testo era piuttosto complicato e laborioso in quel periodo. Per la scarsità di formalizzazioni vi era poi una seconda ragione, la cui comprensione richiede di inquadrare il testo di Castelnuovo nel suo contesto. La geometria, in particolare la geometria analitica e quella che poi è diventata la geometria algebrica, è stata caratterizzata da un netto

[35] Faremo riferimento alla versione digitalizzata disponibile al link https://archive.org/details/lezionidegeoanal00castrich/mode/2up

[36] Per quanto i modelli matematici fossero molto diffusi, non tutti i matematici del tempo ne avevano la stessa visione. Alcuni, come Felix Klein, li consideravano parte del fare matematica. Kline addirittura organizzava workshop per gli studenti di costruzione di modelli da esporre. Altri matematici li consideravano solo come rappresentazioni imperfette di questioni geometriche sofisticate e ritenevano che potessero essere usati solo come facilitatori della comunicazione. Per una trattazione approfondita rispetto all'affascinante questione dei modelli matematici rimando a Merthens (2004) e a Giacardi (2015) per il caso specifico dell'Italia, in cui Giuseppe Veronese, su ispirazione di Kline, cercò di sviluppare un laboratorio nazionale di produzione di modelli tridimensionali.

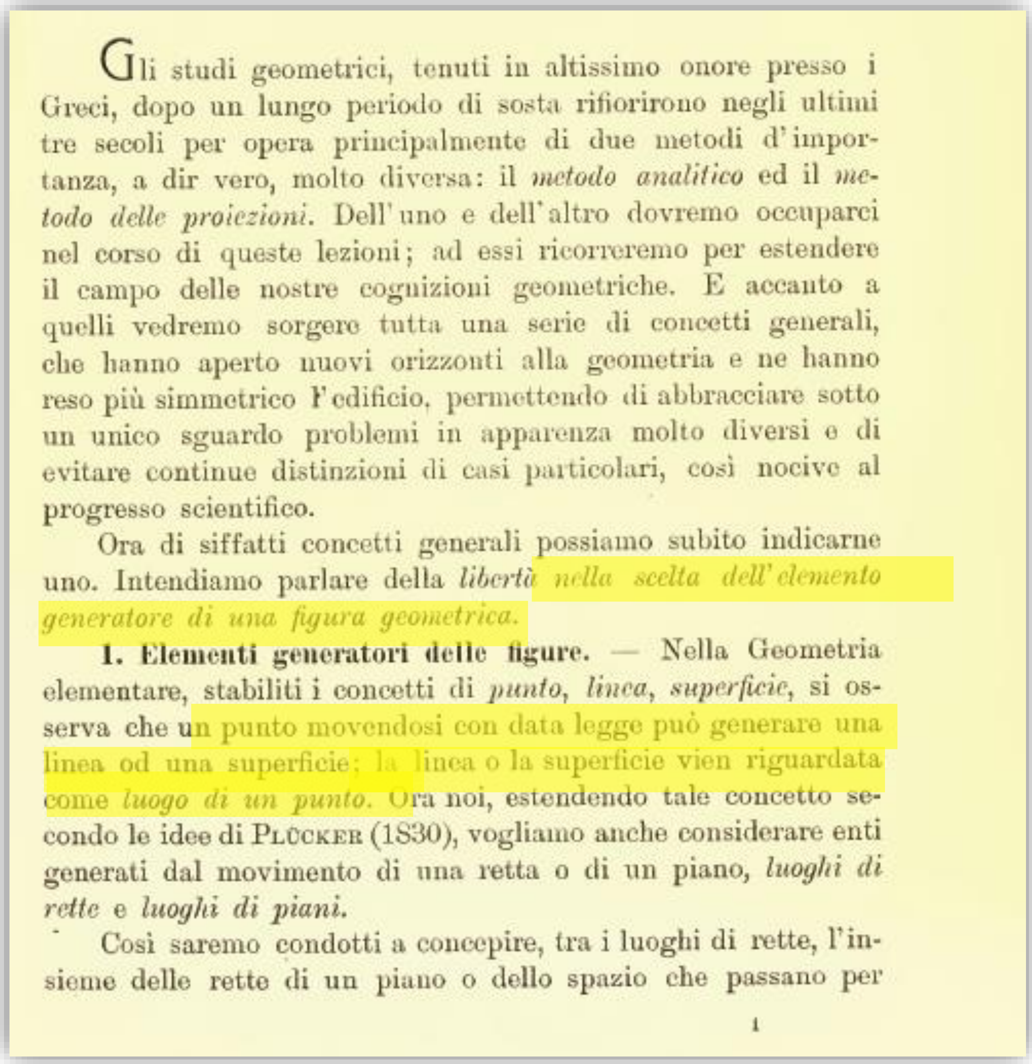
cambiamento di prospettiva, iniziato con l'introduzione delle tecniche di algebra lineare con i lavori di Sylvester, Cayley e Grassmann intorno al 1850 e poi proseguito con l'avvento delle tecniche di algebra commutativa, in un crescendo di innovazioni che hanno poi portato alla teoria degli schemi e infine a un approccio inquadrabile in termini di teoria delle categorie. Inoltre, con il Programma di Erlangen proposto da Felix Klein nel 1872, in cui ogni geometria viene identificata con lo studio degli invarianti rispetto a un gruppo di trasformazioni, la ricerca nell'ambito della geometria proiettiva viene, da un punto di vista metodologico, incorporata e organizzata nell'ambito più generale dell'algebra delle strutture (Bagni & D'Amore, 2020/2023). L'attenzione della ricerca matematica si spostò dallo studio dei singoli enti all'esame degli invarianti all'interno delle famiglie di enti. Per questo spostamento di attenzione è necessario un occhio geometrico unico e "dinamico" che continua a caratterizzare la "geometria avanzata" ancora oggi e che, come vedremo nella prossima sezione, traspare in modo netto nell'opera di Castelnuovo. Infatti, il ruolo della Scuola Italiana di Geometria Algebrica è stato cruciale nell'evoluzione della geometria accademica così come la conosciamo. Riportiamo a tale proposito un breve e illuminante estratto di Brigaglia e Ciliberto (1998):

> "Non spetta certo a noi (anche se ne saremmo tentati!) rivendicare a personalità come Castelnuovo, Enriques, Severi e agli altri principali attori di questa vicenda scientifica e intellettuale il ruolo che a loro compete di protagonisti assoluti delle Matematiche nel periodo che va dall'ultimo decennio del secolo scorso fino agli anni Trenta. Vorremmo tuttavia suggerire di porre in una prospettiva a nostro avviso più corretta lo sviluppo delle moderne tendenze algebrico formali che hanno caratterizzato gli anni successivi fino a circa gli anni Sessanta. Come abbiamo indicato più volte, infatti, la palestra in cui i nuovi metodi si forgiano e trovano progressivamente il loro statuto definitivo, ha avuto il suo terreno di coltura anche, e non in piccola misura, nella problematica della Geometria Algebrica, che la scuola italiana aveva portato a un tale livello di complessità da rendere per così dire inevitabile lo sviluppo di tecniche del tutto nuove e di strumenti concettuali sempre più astratti e raffinati." (p. 302)

Dopo questo brevissimo inquadramento al contesto storico-matematico in cui si colloca il testo di Castelnuovo, le prossime sottosezioni presenteranno una descrizione della struttura di tale testo, una caratterizzazione dei suoi contenuti e delle riflessioni che riguardano, nello specifico, gli aspetti linguistici.

2.1.1 Struttura e contenuti

La prima edizione dell'opera di Castelnuovo si apre con la panoramica degli elementi generatori delle figure geometriche della geometria proiettiva e si conclude con una sezione dedicata alle quadriche[37]. Si tratta di un testo "di base" per studenti universitari al loro primo corso: inizia dalle nozioni fondamentali di "punto, linea e piano" e lo spazio geometrico non supera mai le tre dimensioni. Tuttavia, fin dalle prime parole, si nota come il contenuto sia intriso di quell'occhio geometrico dinamico che sottende e giustifica i successivi (e attuali) progressi della geometria. Per illustrare il tipo di dinamismo a cui ci si riferisce, esaminiamo alcuni brevi estratti di pagina 1, evidenziati in Figura 13.



Gli studi geometrici, tenuti in altissimo onore presso i Greci, dopo un lungo periodo di sosta rifiorirono negli ultimi tre secoli per opera principalmente di due metodi d'importanza, a dir vero, molto diversa: il *metodo analitico* ed il *metodo delle proiezioni*. Dell'uno e dell'altro dovremo occuparci nel corso di queste lezioni; ad essi ricorreremo per estendere il campo delle nostre cognizioni geometriche. E accanto a quelli vedremo sorgere tutta una serie di concetti generali, che hanno aperto nuovi orizzonti alla geometria e ne hanno reso più simmetrico l'edificio, permettendo di abbracciare sotto un unico sguardo problemi in apparenza molto diversi e di evitare continue distinzioni di casi particolari, così nocive al progresso scientifico.

Ora di siffatti concetti generali possiamo subito indicarne uno. Intendiamo parlare della *libertà nella scelta dell'elemento generatore di una figura geometrica.*

1. Elementi generatori delle figure. — Nella Geometria elementare, stabiliti i concetti di *punto, linea, superficie*, si osserva che un punto movendosi con data legge può generare una linea od una superficie; la linea o la superficie vien riguardata come *luogo di un punto*. Ora noi, estendendo tale concetto secondo le idee di Plücker (1830), vogliamo anche considerare enti generati dal movimento di una retta o di un piano, *luoghi di rette* e *luoghi di piani*.

Così saremo condotti a concepire, tra i luoghi di rette, l'insieme delle rette di un piano o dello spazio che passano per

1

Figura 13: pagina 1 di Castelnuovo (1904).

Siamo di fronte alla prima pagina del testo: Castelnuovo ci informa della presenza di "concetti generali" in grado di aprire "nuovi orizzonti della geometria"; poche

[37] Con la seconda edizione del 1909, l'autore apporta modifiche radicali alla struttura del trattato, fatte a seguito di una riflessione critica del proprio lavoro. In ogni caso, il trattato di Castelnuovo rimase un punto di riferimento per la formazione universitaria sino agli anni '60 (Gario, 2016).

righe più avanti, l'autore esplicita uno di tali concetti, secondo il quale c'è "libertà nella scelta dell'elemento generatore di una figura geometrica". Questa semplice frase rivela un occhio geometrico dinamico caratterizzato da una *concezione delle figure geometriche come generate da un moto*, in cui si distingue tra l'elemento generatore (punto, retta e piano) e la figura (ente geometrico) generata dal suo movimento "con data legge".

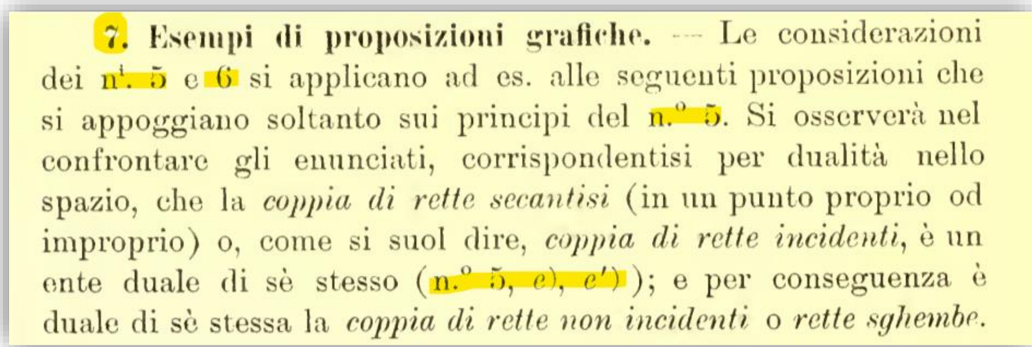
Da un punto di vista strutturale, il testo è formalmente diviso in due volumi (che si trovano spesso uniti) ed è organizzato come segue:

- *Introduzione*, che comprende 16 paragrafi;
- *Parte prima: Forme di prima specie*, che comprende 79 paragrafi organizzati in 3 capitoli;
- *Parte seconda: Geometria analitica del piano*, che comprende 95 paragrafi organizzati in 6 capitoli;
- *Parte terza: Curve del secondo ordine*, che comprende 88 paragrafi organizzati in 6 capitoli;
- *Appendice alla geometria piana*[38]*;*
- *Parte quarta: Geometria analitica dello spazio*, che comprende 61 paragrafi organizzati in 5 capitoli[39];
- *Parte quinta: Superficie del secondo ordine*, che comprende 65 paragrafi organizzati in 5 capitoli.

Globalmente, il testo si compone di 404 paragrafi[40]. Ogni paragrafo è numerato, ha un titolo e, in genere, è dedicato ad un unico tema. Come per molti altri testi scritti a contenuto matematico del periodo, a mano a mano che i paragrafi

[38] Qui termina il Volume I.
[39] Questa parte fino alla fine compone il Volume II.
[40] 21 dei quali sono preceduti da un asterisco (*) ad indicare che ad una prima lettura possono essere saltati (come spiegato da Castelnuovo stesso a p. 34).

progrediscono, il testo si arricchisce di rimandi predisposti dall'autore a paragrafi precedenti, dando vita a una struttura ipertestuale (Figura 14).



7. Esempi di proposizioni grafiche. — Le considerazioni dei n^{i}. 5 e 6 si applicano ad es. alle seguenti proposizioni che si appoggiano soltanto sui principi del n.° 5. Si osserverà nel confrontare gli enunciati, corrispondentisi per dualità nello spazio, che la *coppia di rette secantisi* (in un punto proprio od improprio) o, come si suol dire, *coppia di rette incidenti*, è un ente duale di sè stesso (n.° 5, *e*), *e'*)); e per conseguenza è duale di sè stessa la *coppia di rette non incidenti* o *rette sghembe*.

Figura 14: estratto di pagina 11 che esemplifica la struttura ipertestuale.

Nel testo sono presenti anche 191 immagini, realizzate dal matematico Giulio Bisconcini (1880-1969) a cui Castelnuovo rivolge esplicitamente la propria gratitudine nella prefazione. Figura 15 ne mostra un esempio: le frecce stanno ad indicare l'idea di movimento (nella componente discorsiva che nel testo che accompagna l'immagine viene chiarito che a è una retta mobile del fascio con centro S).

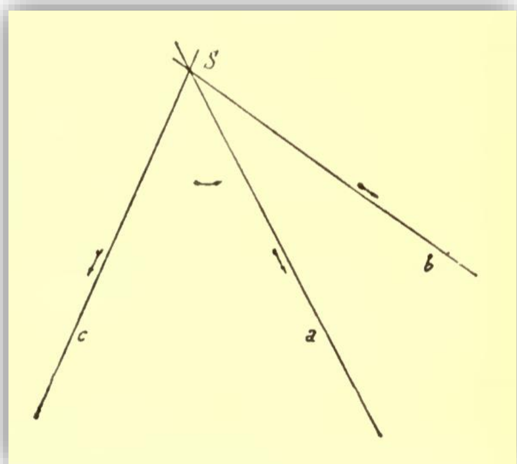


Figura 15: Immagine in corrispondenza del Paragrafo 28 sulle ascisse angolari di un fascio di rette.

La prefazione si chiude con una breve bibliografia in cui l'autore elenca i principali trattati di geometria analitica e di geometria proiettiva che hanno informato la sua opera. All'interno del testo, Castelnuovo fornisce ulteriori informazioni riguardo le origini storiche di particolari risultati (ad esempio indicando il nome dell'autore e la data di pubblicazione, come mostrato in Figura 16); tuttavia, in conformità con il sistema di indicazioni bibliografiche utilizzato ai tempi, tali informazioni non vengono raccolte e organizzate in una bibliografia finale complessiva.

La legge di dualità (o reciprocità) nel piano e nello spazio fu rilevata da Poncelet (1818) partendo da considerazioni di tutt' altra natura, ed enunciata in tutta la sua estensione da Gergonne (1826).

Figura 16: estratto di pagina 11 per esemplificare l'aggiunta di informazioni sulle fonti storiche.

Infine, il testo contiene 49 collezioni di esercizi, proposte in vari punti del testo (a fine capitolo o a fine paragrafo) e una collezione fotografica dei modelli in gesso delle quadriche (Figura 17).

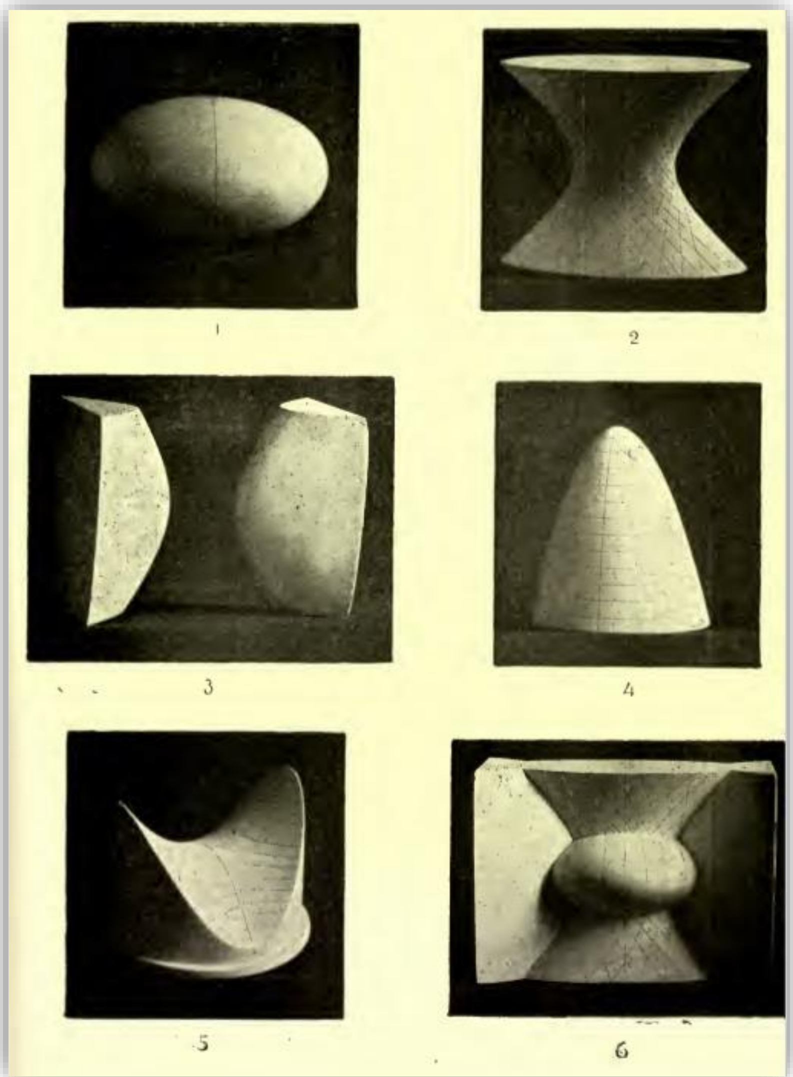
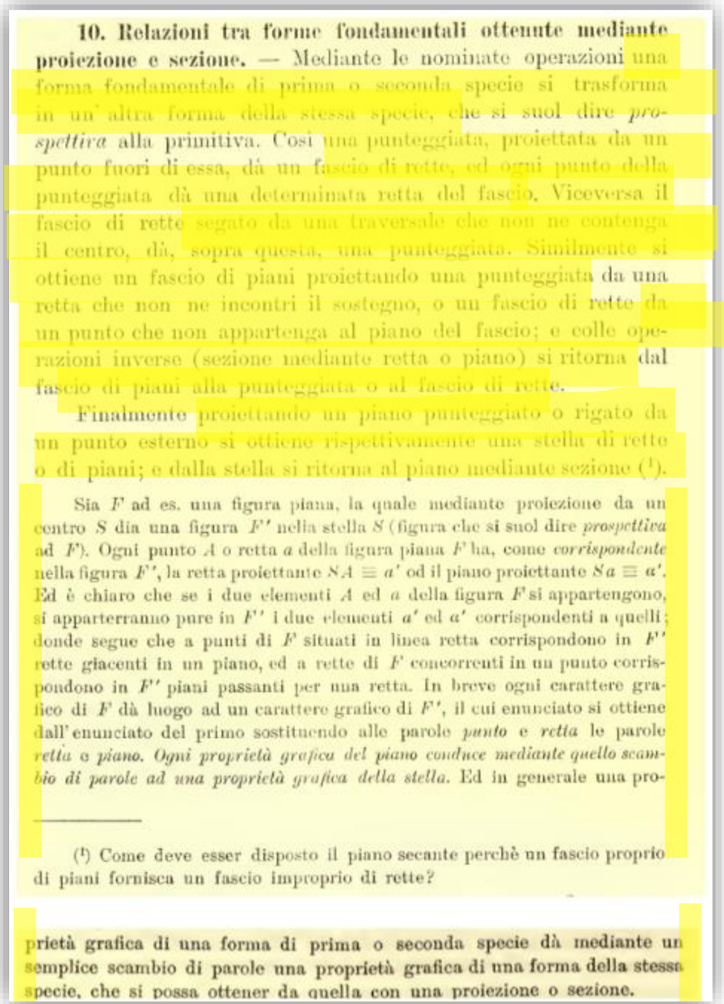


Figura 17: Foto dei modelli in gesso delle quadriche (4 pagine dopo p. 495 della versione digitalizzata disponibile su archive.org).

Finora è stata presentata una descrizione globale dell’opera di Castelnuovo; il caso studio considerato in questa tesi, nello specifico, si focalizzerà sull’*Introduzione* del testo, che è relativa ai fondamenti di geometria proiettiva con trattazione sintetica e che si conclude con il Teorema di Desargues sui triangoli omologici.

2.2 Inquadramento degli aspetti linguistici e metaforici

Da un punto di vista linguistico, Castelnuovo (1904) è un libro caratterizzato da una importante presenza di linguaggio naturale che viene usato per descrivere oggetti e processi geometrici visuali e dinamici. Ad esempio, in Figura 18 è riportato il Paragrafo 10 (Castelnuovo, 1904, p. 17-18), in cui sono evidenziati i tratti di testo emblematici dell’uso del linguaggio naturale per descrivere oggetti e processi geometrici:


10. Relazioni tra forme fondamentali ottenute mediante proiezione e sezione. — Mediante le nominate operazioni una forma fondamentale di prima o seconda specie si trasforma in un' altra forma della stessa specie, che si suol dire *prospettiva* alla primitiva. Così una punteggiata, proiettata da un punto fuori di essa, dà un fascio di rette, ed ogni punto della punteggiata dà una determinata retta del fascio. Viceversa il fascio di rette segato da una traversale che non ne contenga il centro, dà, sopra questa, una punteggiata. Similmente si ottiene un fascio di piani proiettando una punteggiata da una retta che non ne incontri il sostegno, o un fascio di rette da un punto che non appartenga al piano del fascio; e colle operazioni inverse (sezione mediante retta o piano) si ritorna dal fascio di piani alla punteggiata o al fascio di rette.

Finalmente proiettando un piano punteggiato o rigato da un punto esterno si ottiene rispettivamente una stella di rette o di piani; e dalla stella si ritorna al piano mediante sezione [1].

Sia F ad es. una figura piana, la quale mediante proiezione da un centro S dia una figura F' nella stella S (figura che si suol dire *prospettiva* ad F). Ogni punto A o retta a della figura piana F ha, come *corrispondente* nella figura F', la retta proiettante $SA \equiv a'$ od il piano proiettante $Sa \equiv \alpha'$. Ed è chiaro che se i due elementi A ed a della figura F si appartengono, si apparterranno pure in F' i due elementi a' ed α' corrispondenti a quelli; donde segue che a punti di F situati in linea retta corrispondono in F' rette giacenti in un piano, ed a rette di F concorrenti in un punto corrispondono in F' piani passanti per una retta. In breve ogni carattere grafico di F dà luogo ad un carattere grafico di F', il cui enunciato si ottiene dall' enunciato del primo sostituendo alle parole *punto* e *retta* le parole *retta* e *piano*. *Ogni proprietà grafica del piano conduce mediante quello scambio di parole ad una proprietà grafica della stella.* Ed in generale una pro-

[1] Come deve esser disposto il piano secante perchè un fascio proprio di piani fornisca un fascio improprio di rette?

prietà grafica di una forma di prima o seconda specie dà mediante un semplice scambio di parole una proprietà grafica di una forma della stessa specie, che si possa ottener da quella con una proiezione o sezione.

Figura 18: Paragrafo 10 (Castelnuovo, 1904, pp. 17-18) con evidenziate espressioni esemplificative delle descrizioni dell'autore. Le “nominate operazioni” cui si riferisce all’inizio sono le operazioni di proiezione e sezione, che definisce nel Paragrafo 9.

In particolare, la porzione di testo delimitata dalle linee verticali descrive in maniera completamente discorsiva il comportamento degli elementi corrispondenti tra due figure che sono una proiezione dell'altra da un centro S (se ne propone una possibile visualizzazione dinamica al seguente link https://www.geogebra.org/m/pzxduxgr [41]).

Se volessimo descrivere il tipo linguaggio usato in modo più fine, innanzitutto, notiamo che, come in qualsiasi altro testo matematico, anche in Castelnuovo (1904) la presenza di metafore è necessariamente elevata (per l'uso delle metafore nei testi matematici si veda ad esempio Pimm, 1987; per il caso particolare della geometria algebrica si veda Aubry, 2009). Ma, volendo precisare maggiormente la descrizione, nel testo di Castelnuovo è possibile rilevare espressioni metaforiche peculiari, legate allo specifico contenuto trattato e al periodo storico cui il libro appartiene; il tipo di linguaggio usato rimanda all'esperienza sensomotoria e alla percezione spaziale. Per fondare questa affermazione, ricorreremo a due costrutti introdotti in linguistica cognitiva, presentati nella Sezione 2.2.1, che useremo come lente interpretativa di alcuni esempi di testo tratti dal libro (Sezione 2.2.2).

2.2.1 Schemi immagine e metafore concettuali nella linguistica cognitiva

Gli strumenti fondamentali dell'ambito della linguistica cognitiva che ci aiuteranno nel descrivere e analizzare il linguaggio usato in Castelnuovo (1904) sono la nozione di *metafora concettuale* e la nozione di *schemi immagine*[42] (*image schema*), introdotte da George Lakoff (1987) e Mark Johnson (1987). Come sintetizzato da Fuchs (2012), una metafora è, in generale, una proiezione da un dominio *sorgente* (*source*) a un dominio *obiettivo* (*target*). Nell'ambito della linguistica cognitiva si parla di *metafore concettuali* e la proiezione metaforica è vista come un elemento necessario e ordinario del pensiero e del linguaggio umano attraverso cui il dominio *obiettivo* viene concettualmente strutturato in funzione del dominio *sorgente*. Lo stesso dominio *sorgente* può essere proiettato per strutturare diversi domini *obiettivo;* uno stesso dominio *obiettivo* può essere strutturato usando diverse metafore concettuali con domini *sorgente* differenti. Da un punto di vista linguistico poi, ad una stessa metafora concettuale possono corrispondere diverse espressioni. Nonostante la complessità che emerge, Johnson e Lakoff hanno identificato alcuni "domini *sorgenti* basilari", chiamati *schemi immagine*. Uno *schema immagine*, usando le parole di Johnson (1987, p. xiv) è un "modello ricorrente e dinamico delle nostre interazioni percettive e dei

[41] Tale costruzione è stata realizzata da me durante il mio studio personale, mentre mettevo a fuoco le diverse sfumature della definizione di GGBZ data nel Capitolo 1.
[42] Seguendo la scelta fatta in Lakoff, e Núñez (2005), cioè la traduzione in italiano di Lakoff, e Núñez (2000) realizzata Ornella Robutti, Francesca Ferrara e Cristina Sabena, tradurremo l'espressione originale *image schema* con l'espressione italiana *schemi immagine*.

nostri programmi motori che dà coerenza e struttura alla nostra esperienza" (traduzione personale dall'inglese[43]). L'autore spiega anche che ogni *schema immagine* è articolato in un certo numero di componenti che tra loro hanno delle relazioni ben definite: quando uno *schema immagine* è istanziato in un'esperienza, tali componenti tornano in maniera ricorrente. Riproduciamo di seguito la tabella di Fuchs (2012, p. 21) in cui l'autore schematizza, già tradotti in italiano, i principali *schemi immagine* riportati in letteratura (Tabella 2[44]):

Categoria di schema immagine	**Componenti**
Polarità	Pesante-leggero, chiaro-scuro, grande-piccolo, caldo-freddo, forte-debole, femmina-maschio, buono-cattivo, giusto-ingiusto, lento-veloce, alto-basso, liscio-ruvido
Spazio	Posizione, su-giù, davanti-dietro, destra-sinistra, vicino-lontano, centro-periferia, contatto, dritto, verticalità, scala
Movimento	Moto, percorso
Processo	Processo, stato, ciclo
Equilibrio	Asse di equilibrio, bilancia a due piatti, punto di equilibrio, equilibrio
Contenimento	Contenitore, dentro-fuori, superficie, pieno-vuoto, contenuto
Forza/causa	Contrapposizione, costrizione/obbligo, restrizione-rimozione dell'ostacolo, resistenza, impedimento, abilitazione, bloccaggio, deviazione, attrazione, impulso
Unità/molteplicità	Unione, raccolta, divisione, iterazione, parte-tutto, numerabile-non numerabile, collegamento
Identità	Corrispondenza, sovrapposizione
Esistenza	Rimozione, spazio circoscritto, cerchio, oggetto, sostanza, sostanza fluida, processo, agente

Tabella 2: Lista di schemi immagine in letteratura da Fuchs (2012, p.21).

[43] Testo originale: "An image schema is a recurring, dynamic pattern of our perceptual interactions and motor programs that gives coherence and structure to our experience".
[44] È stata aggiunta la prima riga per rendere il contenuto della tabella più esplicito.

Come evidenziato da Lakoff e Núñez (2005), la ricerca nell'ambito della linguistica cognitiva mostra che le relazioni spaziali espresse in una certa lingua possono essere decomposte in *schemi immagine.* Gli autori chiariscono che la natura degli *schemi immagine* è allo stesso tempo percettiva e concettuale e per questa ragione essi fanno da ponte tra linguaggio/ragionamento ed esperienza sensomotoria:

> "Gli schemi immagine possono adattare la percezione visiva, come quando vediamo il latte come qualcosa *nel* bicchiere. Essi possono anche essere imposti sulle scene visive, come quando vediamo le api volare in uno sciame *nel* giardino, dove non c'è un contenitore fisico in cui si trovino le api. Dal momento che i termini di relazione spaziale in una data lingua forniscono i nomi per gli schemi immagine complessi, questi schemi immagine costituiscono il legame tra la lingua e la percezione spaziale" (p. 61, enfasi nell'originale).

2.2.2 Schemi immagine e metafore concettuali in Castelnuovo (1904)

Tornando ora all'opera di Castelnuovo, possiamo individuare molte espressioni linguistiche che richiamano metafore che proiettano dal dominio dell'esperienza sensomotoria a quello della geometria: in Tabella 3 ne sono riportati alcuni esempi emblematici tratti dalle prime pagine[45].

Estratti dal testo di Castelnuovo	Metafora	Schemi immagine
"un punto movendosi con una data legge può generare una linea od una superficie." (p. 1)	Linee e superficie sono tracce di un preciso movimento.	*Movimento* – un punto su muove con una legge del *moto.* *Spazio* – un punto assume diverse *posizioni.* *Movimento* – il *percorso* tracciato dal punto che si muove è un nuovo oggetto. *Forza/Causa* – la *costrizione* che determina il tipo di movimento del punto genera nuove figure.

[45] Tale categorizzazione viene introdotta a scopi descrittivi, per evidenziare alcuni aspetti del testo che, come vedremo nel Capitolo 6, avranno un ruolo cruciale nell'attività di GGBZ analizzata.

"D'ora in poi per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro. […] Le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto comune che dicesi *centro* del fascio; le rette di un fascio improprio non hanno in comune un punto bensì *una direzione*. Per riunire in una sola queste due osservazioni conviene sostituire alla parola direzione la locuzione *punto improprio*, o *punto all'infinito*, che nulla significava finora." (p. 4-5, enfasi nell'originale)	I fasci di rette sono particolari raggruppamenti di oggetti (rette).	*Contenimento* – il *contenitore* di un fascio di rette è un piano. *Contenimento* – due rette sono *dentro* un fascio di rette se hanno un punto in comune o se sono parallele. *Movimento* – da un punto si può far uscire una retta con un *moto* che parte dal punto. *Contenimento* – una retta uscente da un punto *contiene* quel punto. *Unità/molteplicità* – Dato un punto, un fascio di rette *unisce* tutte le rette di un piano che passano per quel punto. *Unità/molteplicità* – Date due rette parallele, un fascio di rette *unisce* tutte le rette di un piano parallele a una di esse. *Unità/molteplicità* – L'avere la stessa direzione *unisce* due rette parallele. *Unità/molteplicità* – Il punto in comune *unisce* due rette incidenti. *Polarità* – i punti possono essere propri o impropri[46]. *Unità/molteplicità* – Un fascio di rette *unisce* tutte le rette di un piano che hanno un punto

[46] Questo tipo di polarità non è presente in Tabella 2 ma in questa sede ne postuliamo l'esistenza.

		in comune (proprio o improprio). *Unità/molteplicità* – Dato un fascio di rette, ogni retta del fascio è *parte* del fascio. *Contenimento* – Dato un fascio di rette, ogni retta del fascio è *dentro* il fascio.
"*Congiungere un punto proprio* B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione come quello di congiungere B con un punto proprio A." (p. 5, enfasi nell'originale)	Una retta è un collegamento (tra due punti).	*Movimento* – una retta è un certo *percorso* che congiunge un punto a un altro. *Movimento* – una retta è tracciata eseguendo un certo *moto.* *Identità* – c'è una *corrispondenza* tra l'unicità della retta per due punti tra il caso di punti propri e quello di punti impropri[47].

Tabella 3: Esempi del tipo di espressioni linguistiche usate nel testo di Castelnuovo e loro decodifica metaforica.

Per gli scopi di questa tesi, non andremo oltre questi pochi esempi, sufficienti però a offrire un'intuizione sia del tipo di linguaggio usato nel libro di Castelnuovo sia del forte richiamo che esso rimanda all'esperienza sensomotoria e alla percezione spaziale.

2.3 Ragioni per scegliere il libro Castelnuovo (1904) come punto di partenza per la geogebrizzazione

Articoleremo la spiegazione intorno a tre punti. Il primo punto riguarda la particolare assonanza a livello di trattazione geometrica tra i contenuti del testo di Castelnuovo (e, in generale, dei trattati di geometria proiettiva classica) e le *affordances* di GeoGebra (ad esempio si veda Wassie & Zergaw, 2019; per una panoramica più ampia, segnalo anche la ricca revisione della letteratura di Drijivers et al., 2019). Il secondo punto riguarda l'ingresso delle opere di Castelnuovo tra quelle di pubblico dominio. Il terzo riguarda le potenzialità più in generale offerte dai software di geometria dinamica in relazione all'uso didattico di fonti storiche.

[47] A questo punto del testo non è ancora stata introdotta la definizione di retta impropria: viene fatto nella pagina successiva.

2.3.1 Geometria proiettiva classica e *affordances* di GeoGebra

Come detto, l'opera di Castelnuovo (come altre dello stesso periodo) presenta numerose descrizioni espresse in linguaggio naturale di oggetti e processi grafici e dinamici. Nella Sezione 2.1.1 abbiamo descritto brevemente i contenuti geometrici trattati, che comprendono la geometria proiettiva e quella analitica in un unico percorso, in cui vengono alternati metodi sintetici a metodi analitici a seconda del contesto e delle esigenze. In particolare, la prima edizione del testo di Castelnuovo si apre con i fondamenti di geometria proiettiva, trattati per via sintetica. Le caratteristiche strutturali delle varie app di GeoGebra disponibili nella GSP (si veda Capitolo 1) sono particolarmente funzionali all'obiettivo di geogebrizzare un testo di questo tipo. Innanzitutto, offrono la possibilità di materializzare variazioni continue attraverso il trascinamento, l'uso degli [Slider][48] e l'attivazione di animazioni. Poi, le app di tipo geometrico offrono la possibilità di personalizzare lo "stato iniziale" della *Vista Geometria*, ad esempio nascondendo gli assi del sistema di riferimento cartesiano ortogonale standard e la griglia. Inoltre, è sempre possibile accompagnare la *Vista Geometria* con la *Vista Algebra*, nel caso si volesse ricorrere a metodologie di tipo analitico.

In ultimo, GeoGebra ha un particolare comportamento che risulta essere congeniale per l'ambito della geometria proiettiva. Per illustrarne un esempio, mi servirò di un breve estratto che, stavolta, non proviene dal testo di Castelnuovo, bensì da un'opera ancora in uso nelle università italiane negli anni '70 scritta da un altro esponente della Scuola Italiana di Geometria Algebrica, allievo di Guido Castelnuovo e Federigo Enriques: Luigi Campedelli (1956).

> "Così sopra ogni retta r, accanto ai punti ordinari (*punti propri*) si introduce il *punto improprio*, che è comune alla r e a tutte le sue parallele. In tal modo la r si viene a riguardare come una *linea chiusa*, che può essere percorsa per intero da un punto mobile, il quale, partendo da una posizione iniziale, A, ritorna ad essa movendosi sempre in un medesimo senso e passando attraverso il punto all'infinito." (p. 151, enfasi nell'originale)

Possiamo materializzare la situazione descritta da Campedelli in *GeoGebra Classico* costruendo prima una retta e poi un punto A *su* di essa (usando il comando [Punto su oggetto][49]). In quanto punto *su* una retta, GeoGebra permette di attivare l'animazione automatica su A, che farà diventare A un punto mobile sulla retta r. Il comportamento di A come punto mobile sulla retta è esattamente

[48] Gli [Slider] permettono di rappresentare graficamente parametri di vario tipo, collegandoli agli elementi della costruzione. Maggiori dettagli: https://wiki.geogebra.org/en/Slider_Tool
[49] Il comando [Punto su oggetto] permette di creare oggetti vincolati ad altri oggetti già presenti nella costruzione. Maggiori dettagli qui https://wiki.geogebra.org/en/Point_on_Object_Tool.

quello descritto da Campedelli[50]: parte dalla posizione iniziale e poi “ritorna ad essa movendosi sempre in un medesimo senso”: potremmo quindi immaginare che l’uscita dallo schermo di A (immagine 5 in Figura 19), seguita dal suo ritorno “da sotto” (immagine 5 in Figura 19), equivalga al/richiami il passaggio “attraverso il punto all’infinito”.

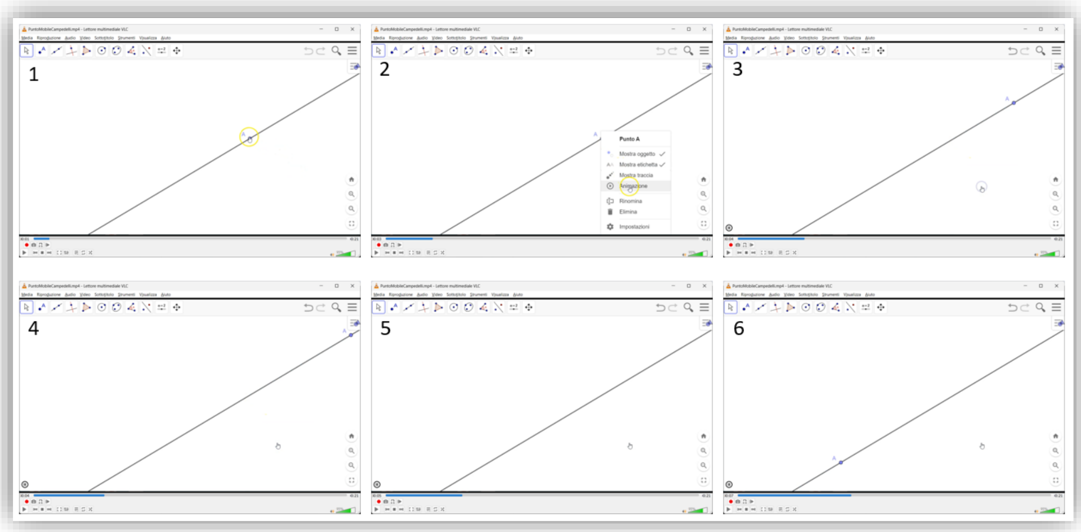


Figura 19: Il comportamento di un punto mobile su una retta in GeoGebra è stato qui esemplificato con una sequenza di immagini (seguire la numerazione). Il link in nota[51] rimanda a un’animazione che lo illustra in modo dinamico.

Potremmo riassumere dicendo che GeoGebra è un ambiente digitale che si rivela *strutturalmente* adeguato all’insegnamento/apprendimento anche nell’ambito della geometria proiettiva (così come lo è per la geometria euclidea).

2.3.2 Opere geometriche di pubblico dominio

Finora abbiamo chiarito le ragioni per cui GeoGebra ha particolare assonanza con il contenuto geometrico del testo considerato. Ma perché considerare un *Libro GeoGebra* come punto di arrivo del caso studio che stiamo considerando? La motivazione risiede nella possibilità di sfruttare questo ambiente per realizzare delle nuove edizioni del testo. Infatti, in Europa, le attuali leggi su copyright[52] prevedono che il diritto d’autore per le opere letterarie duri per l’intera durata della vita dell’autore e per 70 anni dopo la sua morte. Trascorso tale termine, cioè dal 1° gennaio del 71° anno dopo la morte dell’autore, le sue opere diventano di pubblico dominio. Nello specifico, le opere di Castelnuovo sono diventate di

[50] Le ragioni di questo comportamento dipendono proprio da scelte di programmazione strutturali del software, spiegate alla pagina che segue https://wiki.geogebra.org/en/PathParameter_Command. Ringrazio Michael Borcherds per avermi segnalato tale pagina.
[51] https://drive.google.com/file/d/1aHqT1jVf-LAPu7yEy4_EZ5lqi7gXRHAp/view
[52] https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2006/116/oj

pubblico dominio dal 1° gennaio 2023[53]. Più in generale, considerando le informazioni biografiche di tutti i geometri che tra il 1850 e il 1970 hanno fatto parte della Scuola Italiana di Geometria Algebrica[54], si possono monitorare quali delle loro opere (che troviamo elencate nel database[55] realizzato da Aldo Brigaglia, Ciro Ciliberto e Edoardo Sernesi) di volta in volta assumono questo nuovo status relativo ai diritti d'autore[56].

Questo fatto richiama l'intera comunità dei matematici a una grande responsabilità in termini di valorizzazione di una tale eredità culturale, implementata ciascuno secondo il proprio specifico punto di vista. In questa tesi si esamina il possibile contributo della didattica della matematica, con l'idea di modellizzare un'attività che sia da un lato un'attività di insegnamento/apprendimento e dall'altro lato fornisca uno spunto per la realizzazione di nuove edizioni di tali testi (o di loro estratti).

2.3.3 Geometria dinamica e testi storici

Negli ultimi decenni, si è delineata una corrente di ricerca internazionale che riguarda lo studio dell'interazione tra l'uso della tecnologia digitale (con particolare focus sui software di geometria dinamica) in riferimento ad attività che, a diverso titolo, fanno uso della storia della matematica, ad esempio considerando fonti originali (o primarie). Un aspetto particolarmente fertile di questa interazione, evidenziato da Jankvist e Geraniou (2019), è dato dal fatto che, per il caso specifico dell'uso di fonti originali, le tecnologie digitali sembrano favorire l'accessibilità delle fonti usate, che a loro volta impongono agli studenti un uso epistemico delle risorse digitali.

Per quanto riguarda nello specifico la geometria, le ricerche relative all'interazione tra storia e tecnologie digitali si focalizzano principalmente sugli *Elementi* di Euclide. Ad esempio, Thomsen e Jankvist (2022) analizzano due episodi in cui studenti di grado 7° sono coinvolti in varie attività che prevedono

---

[53] Facendo riferimento alla Premessa, uno dei risultati della tesi magistrale di LM3 era proprio quello di arrivare a delineare anche da un punto di vista teorico e metodologico una possibile struttura per nuove edizioni di testi geometrici storico come *Libri Geogebra*. Tale struttura, di cui verranno forniti maggiori dettagli in Appendice B, prevede la realizzazione di due *Libri GeoGebra* tra loro collegati: un primo libro, il *Libro originale*, ha contenuto completamente fedele al testo originale (con aggiunta solo la bibliografia e con "realizzata" la struttura ipertestuale inserendo i vari link tra paragrafi); il secondo libro, chiamato *Libro delle costruzioni*, collegato al *Libro Originale* attraverso un sistema di link e contiene la geogebrizzazione di opportuni estratti di testo originale.

[54] Riassunte in questo documento https://docs.google.com/spreadsheets/d/1-0FOW31XtpcPnq5_Guu0OSujaGKw03aM/edit?usp=sharing&ouid=115903772982099678467&rtpof=true&sd=true

[55] http://www.mat.uniroma3.it/users/sernesi/BIBLIOGRAFIA/INDEX.HTM

[56] Ad esempio, anche le opere di Gino Fano (1871-1952) sono diventate di pubblico dominio a partire dal 1° gennaio 2023; dal 1° gennaio 2025 lo diventeranno le opere di Fabio Conforto (1909-1954).

l'uso di Geogebra in relazione ad alcune porzioni degli *Elementi* di Euclide (Secondo Postulato nel primo episodio analizzato e Proposizione 6 nel libro IV nel secondo). Gli autori mettendo in evidenza come tale tipo di esperienza avesse favorito lo sviluppo di competenze matematiche, facendo riferimento al quadro danese delle competenze matematiche elaborato da Niss e Jensen (2009). Prieto e Arredondo (2021) analizzano con la Teoria dell'Oggettivazione (TO) di Luis Radford l'apprendimento di futuri insegnanti impegnati in compiti di costruzione basati su alcune proposizioni di Euclide.

Per una visione più generale, Thomsen e colleghi (2022) presentano una revisione della letteratura sul tema dell'interazione tra storia della matematica e tecnologie digitali che tiene in considerazione diversi parametri di classificazione dei risultati in base al tipo di fonti storiche usate (primarie o no), al ruolo attribuito alla storia (come strumento o come scopo), al ruolo di mediazione svolto dalla tecnologia digitale (pragmatica, epistemica o giustificativa) e al ruolo del quadro teorico scelto (per fornire spiegazioni, per permettere predizioni, per guidare le azioni, per fornire lenti di interpretazione, per fornire rigore scientifico, per difendere il lavoro da "attacchi esterni"). Tuttavia, gli autori in conclusione evidenziano come, per quanto promettente, lo studio della relazione tra storia della matematica e tecnologie digitali sia ancora poco sviluppato, anche per la mancanza, in molti studi, di un vero e proprio inquadramento teorico. Il loro auspicio finale per la ricerca è dunque quello di inquadrare gli studi in questo settore con prospettive teoriche in grado di equilibrare in modo opportuno sia gli aspetti storici, matematici e didattici coinvolti, sia il loro legame con l'uso della tecnologia digitale.

In questa tesi, ci poniamo l'obiettivo di contribuire alla ricerca nel settore di studi descritto in questa sottosezione con le seguenti specifiche:

- il focus è sulla geometria proiettiva – un "nuovo" tipo di geometria che non è euclidea e sul quale non abbiamo ancora trovato riscontri nella letteratura in questo ambito;
- il testo di Castelnuovo scelto come caso studio potrebbe essere considerato una fonte originale di matrice didattica;
- la GGBZ di un testo matematico, definita nel Capitolo 1, verrà resa operativa in un percorso didattico sperimentale (cfr. Capitolo 4) che sarà alla base di un'attività condotta con diversi partecipanti e analizzata alla luce del quadro teorico scelto (TO) con l'obiettivo di mostrare che si tratti, effettivamente, di un'attività di insegnamento/apprendimento nel senso di Radford (2021);
- la scelta della TO come quadro teorico è fatta ipotizzandone l'efficacia nella ricerca di un fondamento solido e completo per gli aspetti storici, matematici e didattici della geogebrizzazione di un testo matematico. Alla

verifica di tale ipotesi sarà dedicata una delle domande di ricerca che guidano questa tesi (cfr. Capitolo 3).

2.4 Valore educativo della geometria proiettiva oggi

In ultimo, ci apprestiamo a illustrare il valore che la geometria proiettiva può avere nella didattica odierna, trattando la questione da diverse prospettive. Infatti, la geometria proiettiva è una branca della matematica che forse più di altre è in contatto con i temi appartenenti ad altre discipline, anche per la sua storia particolare. Bagni e D'Amore (2020/2023), che ricostruiscono le tappe storiche dello sviluppo della prospettiva, mettono bene in luce come le basi matematiche risalgano già all'*Ottica* di Euclide in cui, per la prima volta, si propone un approccio matematico agli "sforzi umani per ottenere una rappresentazione verosimile della realtà" (p. 9). Il periodo di maturità dell'uso sia artistico che matematico della prospettiva è quello rinascimentale in cui avviene:

> "la svolta che porta artisti, studiosi e matematici a distaccarsi dall'empirismo e dall'improvvisazione per puntare sull'elaborazione di regole precise per la rappresentazione del reale, codificate in tratti sistematici." (p. 37)

Le idee che si sviluppano in questo periodo in Toscana, con contributi dell'architetto Filippo Brunelleschi (1377-1446), di Leon Battista Alberti (1404-1472), di Piero della Francesca (1412-1492), di Leonardo Da Vinci (1452-1519), presentano una commistione tra l'approccio matematico e il problema artistico di rappresentazione del reale. Tali idee però sono talmente feconde che ben presto i diffondono nel resto d'Italia e in Europa anche se "lo studio squisitamente matematico della prospettiva, in senso astratto, non è praticato e l'identificazione della prospettiva in una branca della geometria resta legato al ricordo dell'*Ottica* euclidea" (p. 57). Sarà con il contributo di Federico Commandino (1509-1575) e del suo allievo Guidobaldo del Monte (1545-1607) che la strada matematica e la strada artistica della prospettiva si separeranno definitivamente, tanto che con Joannes Kepler (1571-1630) e Simon Stevin (1548-1620) abbiamo i primi trattati sulla prospettiva privi di motivazioni artistiche alla base. Con il lavoro di Stevin in particolare, si inizia a delineare anche il problema di collocare delle figure nello spazio conoscendo le loro rappresentazioni in prospettiva (Bagni & D'Amore, 2020/2023 p. 67 e 68). I tempi diventano dunque maturi per la nascita di una nuova branca della matematica, la geometria proiettiva, che, sintetizzando la ricostruzione storica dei due autori, vedrà tra i maggiori contribuenti Girard Desargues (1591-1661) – che introduce il concetto di proiezione e quelli di punti e rette improprie – Blaise Pascal (1623-1662) – che partendo dagli studi del suo maestro Desargues mette a punto una nuova e più generale impostazione per la teoria delle coniche basata sull'idea che tutte le coniche possono essere ricondotte alla circonferenza attraverso opportune proiezioni – Gaspar Monge

(1746-1818) – il fondatore della geometria descrittiva – Jean-Victor Poncelet (1788-1867) – allievo di Monge il cui lavoro segna la nascita della moderna geometria proiettiva. È sulla base dei risultati geometrici di tali matematici che Guido Castelnuovo imposta il proprio trattato didattico.

Parallelamente agli studi sulla prospettiva, si sviluppano anche gli studi di cartografia, il cui problema caratterizzante è quello di rappresentare su un piano la superficie terrestre (o parte di essa) data una certa scala e le cui radici possono essere ricondotte ai lavori di Claudio Tolomeo (circa 100-circa 168) nelle quali "va sottolineato che non poche parti dell'opera di Tolomeo possono essere ricondotte all'*Ottica* di Euclide; e ciò conferma la stretta connessione tra le ricerche cartografiche (e astronomiche) e lo sviluppo della geometria in generale e della prospettiva in particolare." (Bagni & D'Amore, 2020/2023, p. 64).

Il legame storicamente così intimo tra geometria, arte, architettura, geografia e astronomia, "aggrappolato" attorno a idee e concetti legati alla geometria proiettiva, permette di spiegare due fenomeni. Il primo riguarda il fatto che, anche se la geometria proiettiva in Italia compare esplicitamente solo nei Corsi di Laurea in Matematica, nel contesto scolastico italiano numerosi suoi concetti vengono incontrati molto prima. Infatti, anche considerando solamente la scuola del primo ciclo, facendo riferimento alle Indicazioni Nazionali (MIUR, 2012) possiamo trovare:

- un esplicito riferimento alla tecnica della rappresentazione in prospettiva, tra gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza di scuola primaria* per la disciplina *Geografia*;
- per la disciplina *Tecnologia*, un esplicito riferimento alle regole del disegno tecnico sia tra gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta di scuola primaria* che tra gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza di scuola secondaria di primo grado*;
- per la disciplina *Arte e immagine* ci sono riferimenti espliciti all'utilizzo consapevole delle regole della rappresentazione visiva sia per osservare l'ambiente circostante (tra gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta di scuola primaria*) sia per produrne rappresentazioni (tra gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza di scuola secondaria di primo grado*).

Il secondo fenomeno riguarda un'interessante corrente di ricerca in Architettura, avviata da Riccardo Migliari, che si propone di rinnovare lo studio della geometria descrittiva sfruttando le tecnologie informatiche[57]. In questo approccio, come punti di partenza, vengono considerati trattati geometrici classici di autori come

[57] Rispetto a questo punto, e considerando l'attuale sviluppo delle tecnologie digitali, segnaliamo anche il ruolo che la geometria proiettiva ha in relazione alla computer vision (si veda, ad esempio, Hartley e Zisserman 200 e la tesi di dottorato di Michele Giuliano Fiorentino, 2017).

Monge, Jean Nicolas Pierre Hachette (1769 - 1834), di geometri italiani come Gino Fano, o lavori ancora precedenti di Piero della Francesca, Luca Pacioli (1445 circa – 1517), o addirittura di Archimede. Sono esempi di contributi in questa direzione, i volumi di geometria descrittiva di Migliari (2008, 2009), la tesi di dottorato di Federico Fallavolita (2008), quella di Alessandro Martinelli (2023) e i lavori di Marta Salvatore (ad esempio Salvatore, 2022; Salvatore & Fallavolita, 2014; Salvatore et al., 2021).

D'altra parte, i due fenomeni appena riportati lasciano trasparire anche il segno della separazione tra l'ambito geometrico e il resto delle discipline, tradito dal fatto che assistiamo oggi a una sorta di doppia mancanza. Infatti, da un lato l'approfondimento delle questioni geometriche sottese a ciò che viene fatto, ad esempio, in arte, geografia e tecnologia rimane appannaggio di pochi (ad esempio, di coloro che sceglieranno di studiare matematica all'università). Dall'altro lato però, il rinnovato interesse per la geometria proiettiva e descrittiva classica, così attuale nell'ambito della formazione in architettura, non trova ancora una controparte nella formazione matematica né a livello universitario (la geometria descrittiva è praticamente scomparsa) né a livello pre-universitario, dove il problema riguarda anche la geometria dello spazio (Bolondi, 2005). Tale scissione però, con un opportuno recupero di opere didattiche classiche come quella di Castelnuovo e altri lavori che riguardano la geometria della visione (Catastini & Ghione, 2006), potrebbe forse essere superata e, in questo modo, sarebbe possibile accogliere in modo operativo l'osservazione di Bagni e D'Amore (2020/2023) secondo i quali "lo studio della prospettiva condotto attraverso la geometria costituisce un importante esempio di matematizzazione di un problema pratico" (p. 9).

Per concludere questa sezione, si propone un breve accenno anche ad altri tipi di lavori che forniscono forza e fondamento all'idea di recuperare i concetti fondamentali della geometria proiettiva con approccio sintetico classico. Infatti, da un lato troviamo lavori di ricerca in didattica della matematica recenti che pongono attenzione su questo ambito geometrico. Due esempi sono Nemirovsy (in pubblicazione) – in cui si analizza il lavoro di due futuri insegnanti di scuola superiore durante un corso focalizzato sulla geometria proiettiva. In particolare, l'attività coinvolge l'uso di un particolare dispositivo per realizzare delle proiezioni chiamato *finestra di Alberti* e riguarda l'esplorazione delle proiezioni di una parabola su un piano perpendicolare al piano di partenza – e Thom e colleghi (2021) che sostengono che per poter lavorare efficacemente sul ragionamento spaziale, abilità cruciale in qualsiasi disciplina STEM (Scienza, Tecnologia, Ingegneria e Matematica), è consigliabile considerarlo nel contesto della geometria proiettiva.

Dall’altro lato, troviamo riflessioni più classiche che attribuiscono allo studio della geometria proiettiva un ruolo cruciale per affrontare in maniera didatticamente efficace altre questioni matematiche. Due esempi sono Ferri (1996) - che attraverso esempi commentati sostiene l’importanza di introdurre l’idea di piano proiettivo sin dalle scuole superiori per poter risolvere qualsiasi sistema di due equazioni algebriche in due incognite – e il già citato Parzysz (1988) – in cui alle nozioni di geometria proiettiva viene dato un ruolo cruciale rispetto alla trattazione della geometria dello spazio. Infatti, l’autore mette in evidenza come sia proprio la nozione di proiezione a premettere di approcciare alle rappresentazioni bidimensionali di oggetti tridimensionali in maniera consapevole, permettendo uno sviluppo più profondo del ragionamento spaziale, del processo del disegnare e della capacità di interpretare delle rappresentazioni grafiche.

2.5 Commenti conclusivi

In questo capitolo è stato presentato il caso studio su cui si baserà l’analisi del processo di GGBZ, il cui punto di partenza sarà la porzione del testo di Guido Castelnuovo (1904) dedicata alla trattazione sintetica dei fondamenti di geometria proiettiva visti come prerequisiti geometrici al Teorema di Desargues sui triangoli omologici. L’opera di Castelnuovo è stata descritta, analizzata e la sua scelta è stata contestualizzata sia dal punto di vista didattico che dal punto di vista culturale.

Alla luce degli elementi finora delineati, il testo di Castelnuovo potrebbe essere considerato una fonte originale di matrice didattica in cui si affronta un “nuovo” tipo di geometria che non è euclidea. Inoltre, nella GGBZ il ruolo della tecnologia digitale è costitutivo dell’attività stessa e la scelta di inquadrare l’analisi con la TO di Radford (2021), se da un lato accoglie l’invito di Thomsen e colleghi (2022) relativo alla scelta di prospettive teoriche robuste e che permettano di equilibrare gli aspetti storici, matematici e didattici coinvolti, dall’altro lato definisce strutturalmente sia il ruolo della storia nel processo di insegnamento/apprendimento della matematica, sia il ruolo di segni e artefatti. Approfondiremo tali questioni nel prossimo capitolo.

3 – Quadro teorico

Questo capitolo è dedicato ad introdurre gli elementi chiave della Teoria dell'Oggettivazione (TO, Radford, 2021). La TO fa parte delle *teorie socioculturali*, che concepiscono gli esseri umani - ciò che pensano, fanno, sentono, immaginano e sognano - come profondamente interconnessi con la cultura in cui vivono (p. 17). In particolare, la TO si basa sulla *Teoria dell'Attività Storico-Culturale* di Vygotskij e Leont'ev (Leont'ev, 1978, 1981).

Asenova e colleghi (2023) collocano la nascita della TO in Radford (2006), in cui l'autore delinea le basi generali della teoria definendo e caratterizzando i seguenti punti:

- una visione non mentalista, non razionalista e antropologica del *pensiero*, visto come una *praxis cogitans*, "considerato come una riflessione mediata sul mondo secondo la forma o la modalità dell'attività degli individui" (p. 5, traduzione personale[58], enfasi nell'originale);
- il ruolo di *segni e artefatti culturali* intesi come ciò con e attraverso cui gli esseri umani pensano, ciò che permette di materializzare il pensiero, e per i quali esiste:

  > "[…] una regione esterna che, parafrasando Voloshinov (1973), chiameremo zona dell'artefatto. È in questa zona che la soggettività e oggettività culturali si sovrappongono reciprocamente e dove il pensiero trova il suo spazio d'azione e la mente si estende oltre la pelle (Wertsch, 1991)" (p. 5, traduzione personale[59]);

- il ruolo dei *Sistemi Semiotici di Significazione Culturale* (SSSC), particolari sovrastrutture simboliche – come, ad esempio, le concezioni culturali rispetto agli oggetti matematici e rispetto ai modi per stabilire la verità, i pattern sociali e i modi accettati di produzione di significato, …– che favoriscono e dettano i vincoli dell'agire umano determinandone forme e modalità;
- una visione degli *oggetti matematici* come qualcosa di "storicamente generato nel corso dell'attività matematica degli individui. Più precisamente, gli oggetti matematici *sono gli schemi fissi dell'attività riflessiva mediata* […] *incorporati nel mondo in continua evoluzione della*

[58] Testo originale: "thinking is considered to be a mediated reflection on the world in accordance with the form or mode of the activity of individuals"

[59] Testo originale: "there is an external region which, to paraphrase Voloshinov (1973), we will call the zone of the artefact. It is within this zone that cultural subjectivity and objectivity mutually overlap and where thinking finds its space to act and the mind extends itself beyond the skin (Wertsch, 1991)."

pratica sociale mediata dagli artefatti" (p. 9, traduzione personale[60], enfasi nell'originale);

- una visione dell'*apprendimento* come processo di elaborazione attiva del significato che permette l'acquisizione di conoscenza attraverso il contatto con il mondo degli artefatti culturali e attraverso l'interazione con gli altri, che nella TO è vista come consustanziale all'apprendimento stesso (p. 12);
- una visione dell'*insegnamento* che "consiste nel generare e mantenere in movimento attività contestuali che sono situate nello spazio e nel tempo e che si indirizzano verso un pattern fisso di attività riflessiva incorporato nella cultura" (p. 14, traduzione personale[61]);
- una visione della *classe di matematica* come una comunità di apprendimento in cui si riconsidera il concetto di individuo che apprende e si propone una visione dell'imparare ad *essere con gli altri* (*being-with-others*) in matematica;
- un'accurata attenzione metodologica alle *modalità di gestione della classe*, realizzata in modo da effettivamente permettere l'implementarsi della comunità di apprendimento.

Già da questa brevissima sintesi dei temi chiave di quello che Asenova e colleghi (2023) indicano come il "big bang" della TO, risulta chiaro come si tratti di una teoria olistica. Da questo articolo seminale, la teoria si è evoluta e alcuni suoi termini sono stati definiti in maggiore dettaglio: nelle sezioni successive presenteremo i concetti chiave della TO che risultano di particolare rilevanza per questo lavoro; per farlo, faremo principalmente riferimento al testo di Radford (2021).

3.1 Motivazioni alla base della scelta della TO

La scelta della TO come unico quadro di riferimento per quanto riguarda l'insegnamento/apprendimento della matematica discende da tre motivazioni principali. Innanzitutto, la TO caratterizza e definisce in modo esplicito molti termini chiave legati ad apprendimento e insegnamento, inclusi ad esempio, come abbiamo visto e come vedremo, concetti come *conoscenza*, *apprendimento*, *pensiero* e *attività*. Questa completezza concettuale è essenziale per il tipo di studio descritto nella tesi, che mira a definire un processo specifico, operazionalizzato in termini di attività, per esaminarne caratteristiche ed effetti.

[60] Testo originale: "that mathematical objects are historically generated during the course of the mathematical activity of individuals. More precisely, mathematical objects *are fixed patterns of reflexive activity (in the explicit sense mentioned previously) incrusted in the ever-changing world of social practice mediated by artefacts*".

[61] Testo originale: "Teaching consists of generating and keeping in movement contextual activities which are situated in space and time and which are heading toward a fixed pattern of reflexive activity incrusted in the culture".

La seconda motivazione riguarda la concezione della storia della matematica in relazione allo studio dell'apprendimento: nella TO, la storia della matematica non è concepita come qualcosa di esterno al processo di apprendimento ma è considerata una necessità per capire la nostra natura di esseri storico-culturali. Per dare fondamento a questo punto faremo riferimento al lavoro di Radford e Santi (2022) che si colloca in un campo della ricerca all'intersezione tra storia e didattica della matematica. Gli autori, con la sperimentazione proposta analizzata secondo la prospettiva della TO, vogliono rispondere alla richiesta di Barbin e colleghi (2020) riguardo alla necessità di creare maggiore ponte tra le ricerche teoriche e quelle empiriche in questo campo e all'esigenza di definire temi di ricerca in modo specifico. Rispetto al ruolo della storia nel contesto della TO, Radford e Santi mettono in evidenza che la storia *deve* essere parte del processo di apprendimento, infatti:

> "Noi incontriamo la matematica, cosa che non ci preclude la possibilità di apportare nuovi contributi ad essa. Incontrando la matematica, ci impegniamo in essa, ne godiamo, assumiamo una posizione critica nei suoi confronti e possiamo ampliarla e trasformarla" (p 1482, traduzione personale[62])

La terza motivazione trova fondamento nel seguente estratto, ancora una volta preso da Radford (2006):

> "In effetti, non esiste una formulazione linguistica possibile per il pensiero matematico che, per quanto attenta possa essere la sua lettura, sia in grado di rendere comprensibile il pensiero matematico. Il pensiero […] è al di là del discorso: è una *praxis cogitans*, qualcosa che si impara riflettendo e *facendo* criticamente." (p. 13, traduzione personale[63])

In particolare, essa riguarda la volontà e il bisogno di sperimentare il potenziale pragmatico della TO usandola sia come struttura per la progettazione dell'attività sia come lente per l'analisi dei dati.

3.2 Sapere, conoscenza e attività

Iniziamo con il definire alcuni termini ed espressioni chiave della TO, a partire dalla concezione degli *oggetti matematici*. Quando si apprende, si apprende un qualche contenuto che appartiene a un certo dominio che nel nostro caso è la matematica. Nella TO, gli oggetti matematici sono considerati esistenti come

[62] Testo originale: "We encounter mathematics, which does not preclude us from making novel contributions to it. In encountering mathematics, we engage in it, we enjoy it, we take a critical position towards it, and we can expand and transform it".

[63] Testo originale: "In effect, there is no possible linguistic formulation for mathematical thinking that, if we were to do a reading of it—however careful that reading might be—would be able to render mathematical thinking comprehensible. Thinking […] is beyond discourse: it is a praxis cogitans, something that is learned by reflectively and critically doing".

oggetti culturali che si generano e materializzano nel corso delle attività umane. La matematica viene di conseguenza concepita come qualcosa che è allo stesso tempo ideale e materiale e che viene prodotta dall'attività di insegnanti e studenti. Questa visione determina la necessità di riconcettualizzare in un'ottica storico-culturale i concetti di *knowledge* e *knowing* che, in italiano, seguendo Asenova e colleghi (2020) scegliamo di tradurre con *sapere* e *conoscenza*. Il termine *sapere* nella TO fa riferimento a un'entità generale e dinamica, una potenzialità, alla capacità generativa di fare qualcosa o di pensare in un certo modo; è costituito da:

> "un sistema di archetipi di pensiero, di azione e di riflessione storicamente e culturalmente costituiti dal lavoro collettivo materiale, incarnato e sensibile." (Radford, 2021, p. 40, traduzione personale[64])

La dinamicità del sapere risiede proprio nel suo essere storicamente e culturalmente costituito: studiare il sapere significa studiare il movimento e le trasformazioni delle sue parti e delle sue interconnessioni (p. 46). In particolare:

> "Il materialismo dialettico ha un termine specifico per spiegare il movimento e la trasformazione del sapere. Il nuovo sapere è, rispetto al precedente, più concreto. Chiaramente, il significato di "concreto" nel materialismo dialettico è diverso da quello empirista. In quest'ultimo, il concreto è visto come qualcosa che, se toccato, porta a formare idee astratte. Nel pensiero empirista […] ogni idea dovrebbe incarnare proprietà di oggetti empirici, "nettamente e stabilmente separati gli uni dagli altri" (Inwood, 1992, p. 30). Nella visione materialista dialettica adottata nella teoria dell'oggettivazione, il concreto è piuttosto legato ai fluidi legami tra le sue componenti; è legato al *movimento del sapere* e a nuovi *modi di capire* il mondo (Ilyenkov, 1982)." (p. 47, traduzione personale[65], enfasi nell'originale)

Per esemplificare l'idea, Radford ricorre a un efficace esempio in analogia con la musica, che riportiamo di seguito. La Sinfonia n.7 di Beethoven in quanto tale è

---

[64] Testo originale: "Knowledge is a system of archetypes of thinking, action, and reflection constituted
historically and culturally out of material, embodied, and sensible collective labour."

[65] Testo originale: Dialectical materialism has a specific term to explain the movement and transformation of knowledge. New knowledge is, with respect to the previous, more concrete. Clearly, the meaning of "concrete" in dialectical materialism has a different meaning from the empiricist one. In the latter, the concrete is seen as something that, as we touch it, leads us to form abstract ideas. In empiricist thought […] each idea supposedly embodies properties of empirical objects, "sharply and fixedly separated from each other" (Inwood, 1992)
1992, p. 30). In the dialectical materialist view adopted in the theory of objectification, the concrete is rather related to fluid links between its components; it is related to the movement of knowledge and to new understandings of the world (Ilyenkov , 1982).

un esempio di sapere in quanto è pura potenzialità, è qualcosa di generale storicamente e culturalmente costituito; è un archetipo storico di azioni collettive.

È attraverso l'attività umana che il sapere può essere messo in movimento, materializzato e attualizzato in qualcosa di concreto percepibile in maniera sensibile; l'attualizzazione del sapere è ciò che nella TO è chiamata *conoscenza*. Tornando all'esempio in ambito musicale, quando un'orchestra, situata nello spazio e nel tempo, suona la Sinfonia n.7 di Beethoven, ecco che il sapere viene messo in movimento, materializzato e *appare* in una singolarità, in un fenomeno sensibile unico e irripetibile: la conoscenza, che attualizza ciò che, come sapere, era potenzialità.

Il termine *attività*, nella TO, non va inteso come un semplice fare qualcosa ma il suo significato va ricondotto al termine tedesco *Tätigkeit* e a quello russo *deyatel'nost'* che fanno riferimento a un sistema dinamico di sforzo comune di individui che interagiscono collettivamente in maniera fortemente sociale, rendendo un prodotto collettivo anche il prodotto dell'attività stessa. Con questa accezione, l'attività è una *forma di vita* e, per evitare fraintendimenti con altre accezioni della parola attività, nella TO si usa l'espressione *joint labour*[66]. In quest'ottica, non è possibile pensare all'apprendimento e all'insegnamento come entità separate perché esse sono un'unica attività: l'insegnamento/apprendimento che si sviluppa nel *joint labour* di insegnanti e studenti.

Sapere, conoscenza e attività sono legati da una relazione dialettica in cui l'attività che permette di mettere in movimento il sapere materializzandone alcuni aspetti in conoscenza, *trasforma* il sapere stesso ampliandolo in un nuovo sapere che attraverso altre attività verrà materializzato e rivelato in nuova conoscenza e così via, in una dinamica di trasformazioni che prosegue con il proseguire dell'attività umana. La conoscenza non può materializzare ogni aspetto del sapere e quindi in questo senso la conoscenza è una mancanza. Allo stesso tempo però, essendo attualizzazione sensibile di una potenzialità:

> "la conoscenza è un eccesso: data la sua natura materiale sensibile, la conoscenza supera la potenzialità e dà modo di porre nuovi problemi, di creare nuove linee di riflessione e di ricerca. Quindi, incarnando il sapere, la conoscenza *conferma* e *afferma* il sapere; e, allo stesso tempo, come eccesso, lo *nega*. Il principio dialettico del conoscere e del sapere non è un principio di identità: è un principio di *differenza*." (p. 55, traduzione personale[67], enfasi nell'originale)

---

[66] In linea con la scelta di Asenova e colleghi (2020) e Asenova e colleghi (2023), si è scelto di non tradurre in italiano questa espressione.

[67] Testo originale: "knowing is excess: given its sensible material nature, knowing exceeds potentiality and makes way to set out new problems, to create new lines of reflection and

Quindi il sapere, concepito come una potenzialità culturale e generato dalla pratica sensibile, concreta, storica e culturale, si attualizza in conoscenza attraverso l'attività umana.

Nello specifico contesto di questa tesi, il testo di partenza scelto per la GGBZ, che qui è Castelnuovo (1904), rappresenta un artefatto culturale. Si tratta di un oggetto in uno spazio-tempo culturale che attualizza un sapere storico che è la geometria proiettiva (e analitica) di quel periodo (o almeno una sua parte).

3.3 Processo di oggettivazione, *sensuous cognition* e addomesticamento dell'occhio

La visione di sapere e conoscenza introdotta nella sezione precedente corrisponde a (e richiede) una particolare visione dell'*apprendimento*. Infatti, nella TO lo studio dell'apprendimento non può prescindere dalle specificità del sapere matematico che viene appreso. Il sapere, in quanto prodotto collettivo delle generazioni precedenti, è qualcosa che esiste nella cultura indipendentemente dallo specifico individuo che apprende. Dunque, una persona non può né costruire, né tantomeno possedere il sapere. È *qualcosa che gli individui incontrano* nel corso della loro vita e il processo di incontro con sistemi di pensiero storico-culturali è ciò che nella TO viene chiamato *processo di oggettivazione* (Radford, 2021, p 71). Il termine oggettivazione va inteso facendo riferimento alla fenomenologia Hegeliana in cui si presenta una distinzione tra *Objekt* – un oggetto storico-culturale generale, indipendente dall'individuo - e *Gegenstand* - un oggetto intenzionale, di coscienza, che si evolve con l'evolversi della coscienza dell'individuo. Nella TO, l'apprendimento è concepito come un processo di oggettivazione nel senso di *Vergegenständlichung*, cioè:

> "un processo che comprende lo sforzo dell'individuo di cogliere un oggetto (*Objekt*) che è già lì presente (oggetto dinamico, mutevole, sempre legato alla cultura); un processo in cui l'individuo *manifesta sé stesso* proprio attraverso lo sforzo che compie per prestare attenzione all'oggetto (*Objekt*). […] Etimologicamente parlando, *Gegenstand* ha il suo corrispettivo nella parola latina *ob-jacere*. Ciò che si oppone a me: *objectare*. È da questo senso di oggettivazione, come qualcosa che mi sta di fronte e la cui presenza mi sfida, che la teoria dell'oggettivazione prende il nome." (p. 77 – 78, traduzione personale[68], enfasi nell'originale)

---

research. Therefore, in embodying knowledge, knowing confirms and affirms knowledge ; and, at the same time, as excess, denies it. The dialectic principle of knowledge and knowing is not a principle of identity: it is a principle of difference."

[68] Testo originale: "a process that includes the individual's effort to apprehend an object (*Objekt*) that is already there (dynamic, changing object, always related to culture); a process in which the individual *expresses* herself precisely through the effort she makes to attend to the object (*Objekt*). […] Etymologically speaking, *Gegenstand* has its counterpart in the Latin word *ob-*

Ciò che permette l'innesco di un processo di oggettivazione è l'*attività* umana – sociale, intellettuale, corporea, sensoriale e semiotica – durante la quale gli individui incontrano l'oggetto culturale (*Objekt,* il sapere) che inizialmente si oppone ad essi ma che, al procedere dell'attività, si trasforma sempre più in un oggetto di coscienza. Questa trasformazione riguarda la coscienza perché appaiono nuovi significati ma riguarda anche il sapere che da entità generale, attraverso l'attività, si trasforma e diventa oggetto di coscienza verso cui gli individui si posizionano criticamente. Infatti, nella concezione di apprendimento proposta nella TO, oltre al processo di oggettivazione che si focalizza su sapere e conoscenza, si definisce anche un altro importante processo ad esso intrecciato che riguarda la dimensione dell'individuo e del divenire (*becoming*): il processo di soggettivazione. In definitiva:

> "I processi di oggettivazione sono quegli atti con cui si nota in modo significativo qualcosa che si rivela alla nostra coscienza attraverso la nostra attività semiotica corporea, sensoriale e artefattuale. È *notare o percepire* qualcosa nel corso della nostra attività pratica concreta attraverso le intenzioni e comprensioni emergenti e in evoluzione mentre proiettiamo e ci manifestiamo nell'espressività storico-culturale dei sistemi semiotici, degli artefatti e del movimento cinestetico del nostro corpo." (p. 78, traduzione personale, enfasi nell'originale[69])

Nella TO, l'apprendimento è dunque concepito come un processo di oggettivazione, innescato dalla presenza di un'alterità, un *Altro*, che si oppone all'individuo e che si sostanzia con l'attività sociale di insegnamento/apprendimento, che Radford chiama *joint labour*. In questo processo, in cui con l'attività umana il sapere (oggetto culturale generale) si manifesta in maniera concreta e sensibile come conoscenza, alcuni aspetti e collegamenti degli oggetti culturali vengono notati dagli individui e trasformati in *oggetti di coscienza*. A questo punto è necessario fare una precisazione importante: questo processo trasformativo non va inteso come un movimento dall'esterno verso l'interno, dal fuori (cultura) al dentro (individuo), anzi è piuttosto il contrario, "[…] gli studenti *si muovono verso qualcosa di fronte a loro*" (p. 99, traduzione personale[70], enfasi nell'originale).

---

jacere. That which objects to me: *objectare*. It is from this sense of objectification, as something that stands before me and whose presence challenges me, that the theory of objectification borrows its name."

[69] Testo originale: "Objectification processes are those acts of meaningfully noticing something that reveals to our consciousness through our bodily, sensory, and artefactual semiotic activity. It is noticing or perceiving something in the course of our concrete practical activity through the emerging and evolving intentions and understandings as we project and cast themselves in the cultural-historical expressivity of semiotic systems, artefacts, and the kinesthetic movement of our body."

[70] Testo originale: "[…] the students *move towards something in front of them*".

In questo quadro dinamico, il *notare* avviene nella prospettiva di quella che nella TO viene chiamata *sensuous cognition*[71] (Radford, 2014), cioè una concezione ampia della mente e della coscienza, che include non solo le caratteristiche ideali e mentali, ma anche quelle incarnate come la percezione, i sentimenti e l'attività cinestesica. Nella *sensuous cognition*, gli aspetti immaginativi, percettivi e sensomotori si integrano, si producono storicamente e culturalmente e la trasformazione della coscienza dovuta all'incontro con gli oggetti culturali corrisponde a (e permette) nuovi modi di percepire il mondo. Infatti, l'apprendimento come processo di oggettivazione risulta in un *addomesticamento dell'occhio* (Radford, 2010), un lungo processo che permette agli individui - in un'attività storico-culturale intrecciata con l'uso di segni e artefatti - di trasformare l'occhio (e altri sensi) in sofisticati organi teorici in grado di prendere coscienza e dare senso al sapere matematico incontrato con l'attività. La percezione si trasforma, al di là della sua funzione biologica, in una percezione teorica. Seguendo ancora Radford che riprende Wartofsky (1984): la percezione umana è "un artefatto culturale plasmato dalle nostre stesse pratiche di cambiamento" (Radford, 2010, p. 2 che cita Wartofsky, 1984, p. 865, traduzione personale[72])

3.3.1 Ruolo di segni e artefatti

In un'attività di insegnamento/apprendimento e nella materializzazione del sapere in conoscenza assumono un ruolo cruciale segni e artefatti che nella TO sono visti come "depositari dell'attività cognitiva e quindi della conoscenza raggiunta, costruita, depositata in un ipotetico forziere culturale sociale, delle generazioni precedenti." (Asenova et al, 2020). In particolare, nello svilupparsi del processo di oggettivazione sono determinanti quelli che nella TO vengono chiamati *mezzi semiotici di oggettivazione*:

> "Questi oggetti, strumenti, dispositivi linguistici, e segni che gli individui intenzionalmente usano nel processo sociale di attribuzione di significato per il raggiungimento di una forma stabile di consapevolezza, per rendere visibili le loro intenzioni, e per portare avanti le loro azioni per raggiungere l'obiettivo delle loro attività, sono chiamati *mezzi semiotici di oggettivazione*. Sono semiotici in quanto sono pezzi chiave nella produzione di significato racchiuso nel processo di oggettivazione" (p. 100, traduzione personale[73], enfasi nell'originale).

[71] In linea con la scelta di Asenova e colleghi (2020) e Asenova e colleghi (2023), si è scelto di non tradurre in italiano questa espressione.
[72] Testo originale della citazione di Warofsky in Radford "a cultural artifact shaped by our own historically changing practices".
[73] Testo originale: "These devices are fundamental to the manner in which things become progressively noticed. These objects, tools, linguistic devices, and signs that individuals intentionally use in social meaning-making processes to achieve a stable form of awareness, to

I mezzi semiotici di oggettivazione impiegati scolpiscono le forme e i modi dell'attività e sono dirimenti rispetto al *notare* e rispetto alla modalità con cui nuovi modi di percepire il mondo si sviluppano. Radford (2008) usa l'espressione *territorio del pensiero artefattuale*[74] per riferirsi alla configurazione dei mezzi semiotici di oggettivazione. Seguendo la prospettiva proposta in Del Zozzo e Santi (2023) il caso degli artefatti digitali (ad esempio GeoGebra e, in generale, la PSG) va trattato con precisione perché non possono essere considerati come un *singolo* mezzo semiotico di oggettivazione. Piuttosto, essi *definiscono la topologia del territorio del pensiero artefattuale*. Gli artefatti digitali, infatti, rappresentano realtà complesse in quanto incorporano una cultura matematica e sono progettati con una serie di *affordances* predefinite. Queste *affordances* influenzano le modalità di attività e di pensiero, fungendo da motori che attivano un insieme ricco e variegato di mezzi semiotici di oggettivazione.

In generale, il ruolo dei mezzi semiotici di oggettivazione è talmente indicativo che la loro analisi nel contesto dell'attività sociale umana che fornisce loro senso permette di studiare lo sviluppo del processo di oggettivazione e, dunque, di rilevare e studiare l'apprendimento. Entriamo così in considerazioni di carattere metodologico alle quali è dedicata la prossima sottosezione.

3.3.2 Approccio metodologico nella TO: nodi semiotici e contrazioni semiotiche

Il costrutto metodologico che permette di descrivere e interpretare l'apprendimento inteso come processo di oggettivazione mediato dall'uso di mezzi semiotici è il *nodo semiotico* (Radford & Sabena, 2015). L'espressione *nodo semiotico* fa riferimento a un segmento di attività di insegnamento/apprendimento in cui si individua un nucleo di processo di oggettivazione testimoniato da una ricca e complessa organizzazione di mezzi semiotici di oggettivazione che permette l'emergere di nuovi oggetti di coscienza. Pertanto, la ricerca di nodi semiotici e l'analisi dei mezzi semiotici di oggettivazione fornisce importanti informazioni riguardo al modo in cui l'apprendimento sta avendo luogo (Radford, 2021). La più profonda coscienza che i soggetti acquisiscono nel processo di oggettivazione dà luogo a un fenomeno successivo chiamato *contrazione semiotica*. Infatti, il processo di oggettivazione permette una riorganizzazione delle risorse semiotiche in cui si prendono decisioni su quali di esse siano rilevanti o irrilevanti (Radford, 2021, p. 102). In altri termini, il processo di oggettivazione, testimoniato dal nodo semiotico, avviene attraverso *una trasformazione dell'occhio* con cui si

---

make apparent their intentions, and to carry out their actions to attain the goal of their activities, are called semiotic means of objectification. They are semiotic in that they are key pieces in the production of meanings embedded in the processes of objectification."

[74] Abbiamo visto che la stessa nozione era già presente anche in Radford (2006), denominata zona dell'artefatto.

percepisce l'oggetto matematico che porta a una rifinitura delle risorse semiotiche messe in campo durante il nodo semiotico stesso. Nella TO, la contrazione semiotica viene considerata *evidenza di apprendimento.*

L'approccio metodologico qui descritto è alla base dell'analisi dei dati in questo lavoro e sarà maggiormente approfondito e operazionalizzato nel Capitolo 5.

3.4 Attività di insegnamento/apprendimento e progetto didattico collegato

L'attività di insegnamento/apprendimento, nell'accezione di *Tätigkeit* usata nella TO, è il processo attraverso cui il sapere viene materializzato in conoscenza. Tale processo nella TO viene denotato con la lettera greca Θ e il suo decorso dipende dal progetto didattico che struttura l'attività stessa (indicato con la lettera ϕ) e da altre variabili non determinabili a priori perché fortemente condizionate dai partecipanti e dalle dinamiche sociali che si instaurano, dal contesto, ecc. Per quanto riguarda, in generale, l'attività Θ in classe, per quanto essa sia un processo complesso, dinamico e indeterminabile a priori, nella TO vengono messi a fuoco alcuni "momenti" funzionali alla creazione delle condizioni necessarie all'apprendimento quali ad esempio l'interazione sociale degli studenti tra loro e di insegnanti e studenti. Figura 20 schematizza alcuni di tali momenti, riadattando da Radford (2021, p. 91, fig. 17).

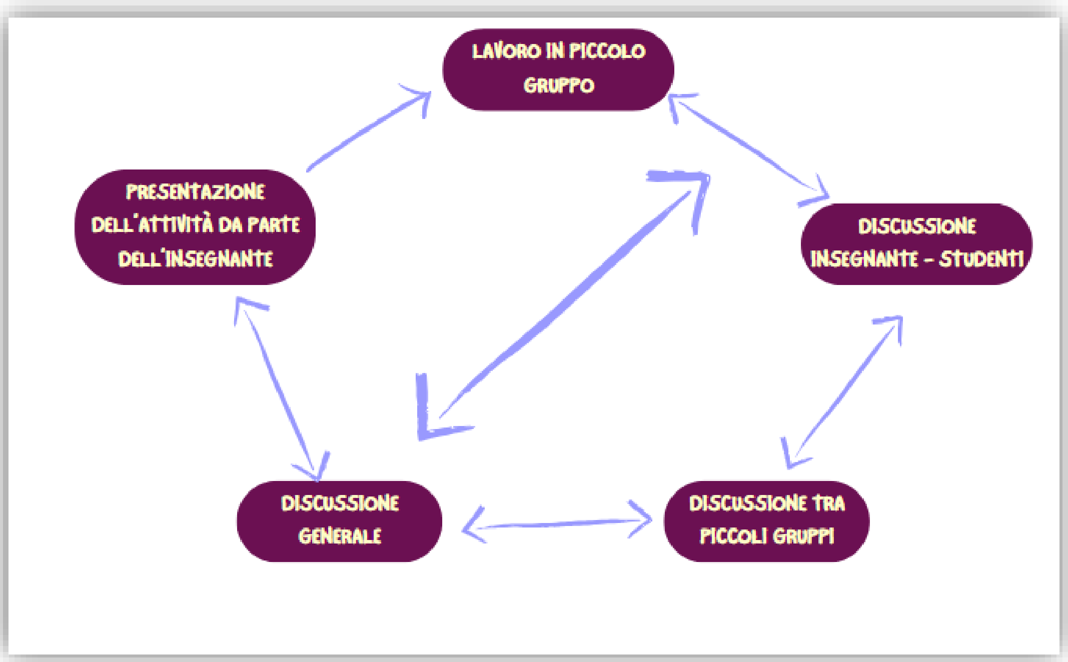


Figura 20: Alcuni "momenti" dell'attività di insegnamento apprendimento (riadattato da Radford, 2021, pag. 91, fig. 17).

Per quanto riguarda il progetto didattico ϕ, Radford riprende la struttura oggetto-obiettivo-compito, proposta in Leont'ev (1978), arricchita da un'analisi epistemologica del contenuto matematico trattato e da un'analisi a priori. In particolare:

- l'*oggetto* è definito dall'insegnante sulla base del progetto pedagogico e, nel caso della TO, sarà espresso in termini coerenti con i principi della teoria. Esempi di oggetto possono essere, l'incontro degli studenti con i modi storico-culturali di pensare algebricamente a delle sequenze o, nel nostro caso, l'incontro con i modi storico-culturali di inizio 1900 di pensare ai fondamenti della geometria proiettiva;
- l'*obiettivo* (o gli obiettivi) è (sono) ciò che è necessario realizzare/raggiungere durante lo sviluppo dell'attività verso l'oggetto stabilito. Sono esempi di obiettivi quello di risolvere problemi sulle sequenze in modo algebrico o di geogebrizzare un libro cartaceo (o un suo estratto) in un *Libro GeoGebra*;
- un *task* o *compito* è ciò che concretamente configura l'attività, ciò che viene richiesto allo studente di svolgere. Il compito si compone di diversi *problemi* che portano a *quesiti* a cui rispondere o ad *azioni* da compiere.

Rispetto alla configurazione dell'attività, in Radford (2021, p. 133 e 134) vengono fornite alcune indicazioni di progettazione generali che riportiamo di seguito.

- <u>Considerazioni generali sul progetto didattico</u>, che andrà configurato cercando di:
  - valorizzare delle conoscenze pregresse degli studenti, anche per favorire il loro coinvolgimento;
  - coinvolgere l'uso di artefatti (che potranno essere, ad esempio, oggetti concreti, e/o dispositivi informatici e tecnologici).
- <u>Considerazioni sui problemi che compongono il compito del progetto didattico</u>, che andranno definiti cercando di:
  - stimolare l'interesse e la curiosità degli studenti, fornendo un contesto che dia senso all'attività stessa e alle azioni degli individui coinvolti;
  - creare la possibilità di incontrare il sapere matematico a diversi livelli di generalizzazione, partendo da esperienze concrete da usare come partenza per delle riflessioni sempre più teoriche che permettano l'emergere di nuovi modi di percepire gli oggetti matematici;
  - progettare un insieme di problemi interrelati e strutturati attorno a un'*unità concettuale e contestuale*. Questo accorgimento facilita lo stabilire connessioni e relazioni tra oggetti matematici;

    - organizzare la sequenza dei problemi proposta in modo da avere una *complessità concettuale crescente*.
- Considerazioni rispetto all’organizzazione degli aspetti sociali dell’attività, configurando i diversi “momenti” in modo da:
    - incoraggiare la riflessione critica, anche attraverso l’incontro con l’Altro;
    - incoraggiare scambi e collaborazioni sia degli studenti tra loro che tra studenti e insegnanti.

Per quanto riguarda l’analisi epistemologica e l’analisi a priori, è necessario ricordare che nella TO ogni oggetto matematico e, in generale, il sapere è il prodotto storico-culturale del lavoro collettivo delle generazioni precedenti. Per capire ciò che accade quando nell’attività entra in gioco una fonte storica o un problema storico, faremo riferimento a Radford e Santi (2022) in cui gli autori analizzano un gruppo di futuri insegnanti alle prese con un problema del periodo rinascimentale sul moto preso dal *Trattato d'Aritmetica* di Paolo dell'Abbaco (XIV secolo). Nei problemi rinascimentali di questo tipo, il tempo non era menzionato esplicitamente ma implicitamente attraverso il moto e gli autori con il loro lavoro cercano di “rilevare le dissonanze e le risonanze, le tensioni e i conflitti emersi nel dispiegarsi dello stupore dell'incontro con l'Altro storico” (p. 1480, traduzione personale[75]). Nell’analisi del processo di oggettivazione che si sviluppa durante questa conversazione con il passato, emerge come si venga a creare uno spazio nuovo che non è né quello del passato di Dell’Abbaco né quello degli studenti e insegnanti coinvolti nell’attività ma è un terzo spazio intermedio in cui il sapere storico matematico viene accolto:

> “Questo spazio è lo spazio del tempo condiviso, dove il passato *sfida* il presente e, essendo sfidato, il presente si *riconosce* nel passato, così come lo stare parlando può riconoscersi nel detto, senza coincidere con esso, poiché ci sarà sempre un residuo dello stare parlando che non può essere detto e non sarà mai detto. Riconoscendosi nel passato, il presente, tuttavia, resiste inglobando il passato. Allo stesso modo, il passato resiste inglobando il presente (cioè a vedere nel presente la propria immagine; ad essere semplicemente "*un présent antérieur*", un presente più antico). Nello spazio comune, presente e passato acquisiscono nuovi significati. Entrambi appaiono l'uno all'altro come qualcosa di incompiuto, come presenti che non terminano mai di essere; si mostrano l'uno all'altro come presenze che non sono mai trascorse. Appaiono in relazione, riscrivendo sé stessi reciprocamente,

[75] Testo originale: “[we attempt to] trace the dissonances and resonances, and tensions and conflicts that emerged in the unfolding awe of the encounter with the historical Other.”

trasformandosi a vicenda." (p. 1491, traduzione personale[76], enfasi nell'originale)

Questo terzo spazio è costituito da relazioni basate sul riconoscimento delle proprie specificità e sul riconoscimento etico e responsabile dell'Altro storico (Radford e Santi, 2022, p. 1491).

Come vedremo nel Capitolo 6, anche nel caso della GGBZ del testo di Castelnuovo si realizza una dinamica simile, istanziata in maniera diversa in tutte le diverse situazioni esaminate.

A valle di questa breve presentazione della TO, concluderemo il capitolo rileggendo alla luce degli elementi chiave di questa teoria la definizione di GGBZ di un testo matematico e articolando le domande di ricerca che guideranno il resto della tesi.

3.5 Commenti conclusivi: definizione di geogebrizzazione riletta alla luce della TO e domande di ricerca

Possiamo ora proporre un'interpretazione della definizione di GGBZ di un testo matematico informata dalla TO. Geogebrizzare un testo matematico secondo la definizione proposta nel Capitolo 1 è un'attività che permette di materializzare il sapere del testo di partenza, incarnando e animando le sue componenti iconiche, simboliche e verbali (cioè il linguaggio naturale e le sue strutture metaforiche), sfruttando tutte le *affordances* della PSG.

Per la realizzazione di tale attività, è stato progettato un progetto didattico ϕ sperimentale che sarà descritto in dettaglio nel prossimo capitolo ed è obiettivo di questo lavoro mostrare come l'attività di GGBZ di un testo sia *effettivamente* un'attività Θ di insegnamento/apprendimento nel senso definito nella prospettiva della TO.

Il lavoro finora è stato guidato da domande di ricerca generiche (come quelle citate nella Premessa: cosa significa da un punto di vista operativo geogebrizzare un testo? E cosa comporta, da un punto di vista didattico e cognitivo, metterlo in atto? Che valore ha?) che a questo punto possiamo riformulare alla luce della TO:

[76] Testo originale: "This space is the space of shared time, where the past *challenges* the present and, by being challenged, the present *recognizes* itself in the past, as the saying may recognize itself in the said, without coinciding with it, as there will always be a remnant of the saying that can never be said and will never be said. In recognizing itself in the past, the present, however, resists absorbing the past. In the same way, the past resists absorbing the present (i.e., to see in the present its own image; to merely be '*un présent antérieur*,' an ear-lier present). In the joint space, present and past acquire new meanings. Both appear to each other as something unfinished, as presents that never cease to be; they show to each other as presences that have never elapsed. They appear in relation, rewriting themselves mutually, transforming each other."

- **DR1**: Quando si è coinvolti in un'attività di GGBZ di un estratto del testo di Castelnuovo (1904) relativo ai fondamenti della geometria proiettiva, in che modo si sviluppa l'addomesticamento dell'occhio e in che misura si può affermare che si tratti di un'attività Θ di insegnamento/apprendimento?
- **DR2**: Volendo progettare un percorso didattico ϕ che configuri l'attività di GGBZ di un testo matematico qualsiasi, quali linee guida operative si possono delineare?

A tali domande specifiche e contestualizzate, ne aggiungiamo una terza, più ampia, per accogliere la sfida di Thomsen e colleghi (2022):

- **DR3**: Più in generale, posizionandoci nel terreno di ricerca che riguarda la relazione tra storia, didattica della matematica e uso di tecnologie digitali, in che misura la TO può essere una prospettiva efficace a inquadrare la complessità dei problemi in questo ambito?

4 – Percorso didattico sperimentale ϕ

Finora è stata presentata la definizione di GGBZ di un testo matematico (Capitolo 1), è stato presentato e descritto il caso studio a cui tale definizione viene applicata in questa sede (Capitolo 2) e sono stati presentati alcuni elementi chiave della TO (Capitolo 3), quadro teorico con cui viene strutturata e (verrà) analizzata l'attività di GGBZ di un estratto del testo di Castelnuovo (1904). In particolare, l'attività di GGBZ è configurata con un percorso didattico sperimentale ϕ alla cui descrizione è dedicato il presente capitolo. La progettazione di tale percorso didattico è frutto del confronto effettuato con LM1, LM2, LM3 e LM4 e ADR durante la fase esplorativa preliminare di questo lavoro di tesi. In particolare, nella progettazione di ϕ, si è tenuto conto di:

- tutti i commenti e le osservazioni che LM1, LM2, LM3, LM4 e ADR hanno condiviso durante la loro esperienza di GGBZ di ampie porzioni dei testi in esame (Castelnuovo, 1904; Enriques, 1898; Enriques, 1908).
- una serie di incontri di progettazione condivisa con LM3 che, nello specifico, si era occupata del testo di Castelnuovo. In questi incontri il focus della collaborazione era quello di progettare un percorso didattico che fosse focalizzato su un tema specifico e della durata di poche ore, ma che concentrasse tutti gli aspetti più significativi dell'attività di GGBZ.

Il percorso didattico sperimentale ϕ oggetto di questo capitolo ha un duplice ruolo in questa tesi. Da un lato, sarà la componente del progetto didattico ϕ associato all'attività di GGBZ che analizzeremo nel Capitolo 6 per dare risposta alla prima domanda di ricerca DR1 relativa all'analisi di come avviene l'incontro con i modi storico-culturali di pensare ai fondamenti della geometria proiettiva all'inizio del 1900, mostrando come l'attività di GGBZ di un testo matematico possa *effettivamente* essere considerata un'attività Θ di insegnamento-apprendimento nel senso della TO. Dall'altro lato, sarà la base per delineare una risposta alla domanda di ricerca DR2 relativa alle linee guida metodologiche per la configurazione di un'attività di GGBZ in generale.

In questo capitolo, facendo riferimento a Del Zozzo (2023, in pubblicazione) e seguendo Radford (2021), analizzeremo in dettaglio la componente ϕ dal punto di vista della configurazione dell'attività.

4.1 Visione globale

Riprendendo brevemente ciò che abbiamo visto nel Capitolo 3, da un punto di vista pragmatico, la TO considera l'attività di insegnamento-apprendimento come caratterizzata da:

- un *oggetto*, parte di un progetto didattico;

- uno o più *obiettivi*, da raggiungere durante lo sviluppo dell'attività verso l'oggetto stabilito;
- un *task* o *compito*, che configura l'attività. Il compito si compone di diversi *problemi* che portano a *quesiti* a cui rispondere o ad *azioni* da compiere.

Tenendo presente questo quadro strutturale, l'esempio di attività di GGBZ oggetto del presente capitolo istanzia tali elementi nel modo che segue:

- l'*oggetto* dell'attività è la visualizzazione e l'animazione dinamica del contenuto geometrico di un testo matematico che riguarda i prerequisiti al Teorema di Desargues sui triangoli omologici (per come è presentato in Castelnuovo, 1904). In particolare, tratta i principi fondamentali della geometria proiettiva, compresi gli elementi all'infinito e le operazioni di proiezione e sezione;
- l'*obiettivo* dell'attività è quello di trasformare estratti di Castelnuovo (1904) in un *Libro GeoGebra* da pubblicare online;
- il testo originale considerato nell'attività, che globalmente comprende circa 7 pagine tra le prime 30 del testo[77], è stato segmentato, da me, in "unità tematiche"[78]. Ogni unità tematica rappresenta un *problema* che è formato da una porzione del testo originale, cui si riferiscono uno o più *quesiti* e/o *azioni*. L'insieme di tutti i problemi (nove in totale) costituisce il *compito*. In alcuni casi, e per alcune delle domande o azioni proposte, vengono fornite anche le *soluzioni*, date da estratti del testo originale, siano essi composti da testo o da immagini.

Figura 21 schematizza la struttura generale del percorso didattico sperimentale ϕ:

[77] Non sono sette pagine consecutive ma sono l'insieme degli estratti di testo e paragrafi tra le prime 30 pagine che rappresentanti i prerequisiti del Teorema di Desargues.
[78] Per enucleare le unità tematiche mi sono basata sul contenuto del paragrafo in esame. In generale, l'obiettivo è stato di minimizzare la quantità di informazioni geometriche da gestire in ciascuno dei problemi mantenendo però l'*unità concettuale e contestuale* richiesta dalla TO riguardo l'organizzazione dei problemi.

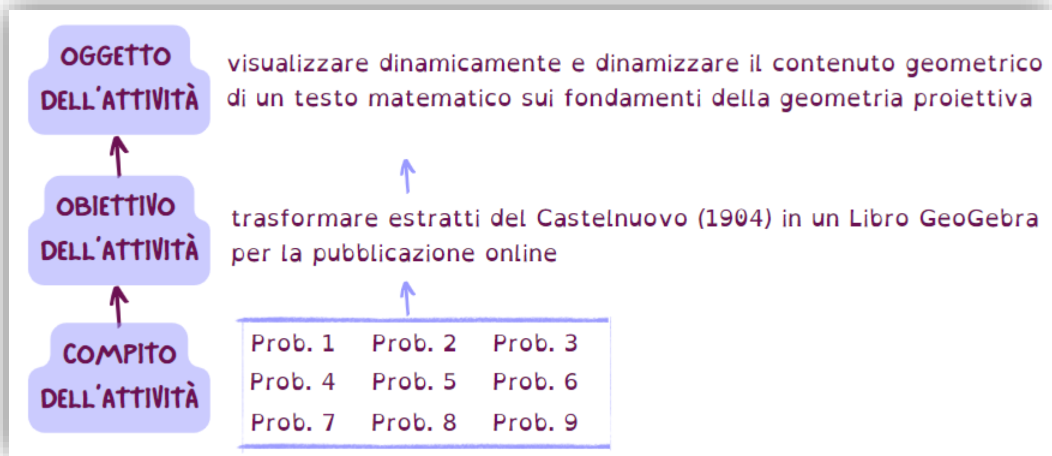


Figura 21: struttura generale della componente ϕ.

Facendo riferimento alle tre fasi della GGBZ descritte nel Capitolo 1 e schematizzate in Figura 6, i primi otto problemi si focalizzano sugli aspetti delle prime due fasi che sono particolarmente rilevanti ai fini del requisito R1 del processo di GGBZ; il Problema 9 invece, riguarda la terza fase della GGBZ e, in particolare, si focalizza sul requisito R2 (Figura 22).

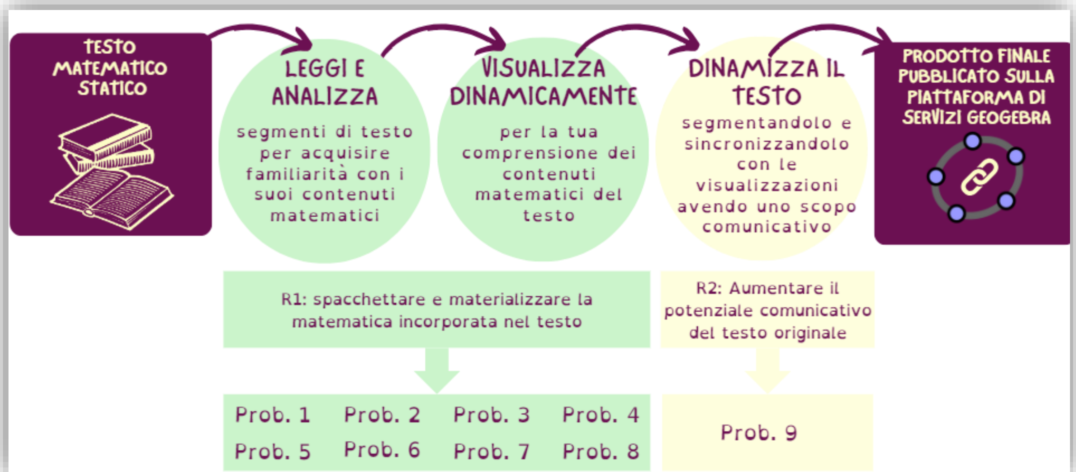


Figura 22: corrispondenza tra problemi e fasi della GGBZ.

Il progetto didattico è organizzato a sua volta come un *Libro GeoGebra* ed è disponibile sia in italiano (https://www.geogebra.org/m/fkaz9ewc) che in inglese (https://www.geogebra.org/m/ksxsjc3v).

Nel seguito verrà descritto in dettaglio e commentato ciascuno dei nove problemi che lo compone.

In accordo con Radford (2021), nella sequenza dei problemi proposti e nella progettazione di quesiti e azioni, si è cercato di mantenere coerenza con il requisito di *incremento della complessità concettuale* (si veda Capitolo 3, particolare la Sezione 3.4). Le notazioni usate sono:

- i problemi saranno numerati da 1 a 9 e il nucleo tematico cui si riferiscono è indicato nel titolo;
- in ogni problema, i blocchi di testo in colore azzurro e le immagini con sfondo giallo sono estratti di testo matematico originale[79]. I testi in nero sono testi scritti da me e possono essere o brevi introduzioni o le consegne dei vari quesiti e azioni;
- i quesiti, le azioni e le soluzioni saranno indicati rispettivamente con Qi.j, Ai.j e Si.j in cui i indica il problema e j indica il numero progressivo di quesito/azione in quel problema. Quindi ad esempio, la scrittura Q4.2 fa riferimento al secondo quesito del Problema 4;
- in alcune situazioni, quesito e problema vengono presentati insieme e saranno legati da un + (es. Q2.3+A3.2);
- alcuni problemi contengono delle osservazioni che, per poter facilitare il riferimento in capitoli successivi, sono numerate: l'Osservazione i.j sarà l'osservazione numero j del problema i;
- la parola "studente" non si riferisce allo studente di scuola/università ma alla persona che svolge l'attività descritta. Si tratta quindi di una persona che ha il ruolo di *studente rispetto allo svolgimento dell'attività di GGBZ*.

Un'ultima precisazione: tutte le schermate GeoGebra usano l'ambiente *Grafici 3D* di GeoGebra Classic[80], in cui sono stati nascosti sia gli assi del sistema di riferimento cartesiano ortogonale standard sia il [Piano grigio] usato per la costruzione di punti liberi[81].

4.2 Problema 1: Punti propri e impropri

Il Problema 1 riguarda i punti propri e impropri e si apre con un estratto di testo originale tratto dal Paragrafo 3 del libro di Castelnuovo (Figura 23).

[79] All'interno di questi blocchi di testo originale, le componenti simboliche sono in colore nero ma questo dipende dalle caratteristiche tecniche di GeoGebra.
[80] https://www.geogebra.org/classic#3d
[81] In realtà, rispetto a quest'ultimo punto fa eccezione il Problema 6, per ragioni che verranno spiegate in seguito.

Punti propri e impropri

Ricordiamo che due rette a, b di un piano π si segano in un punto O, o sono parallele. Nel primo caso esiste *un* fascio di rette che contiene a e b, ed è costituito dalle rette di π passanti per O. Invece nel secondo caso non esiste un fascio contenente a e b. Se però osserviamo che tutte le rette del piano parallele ad a e b costituiscono pure un sistema di rette il quale, come si vedrà, ha molte proprietà comuni col fascio sopra nominato, si presenta naturale l'idea di estendere nel modo seguente il significato della locuzione *fascio di rette*.
Da ora in poi per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un dato punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro.
E solo quando sarà necessario di distinguere i due casi, diremo *improprio* l'ultimo fascio, chiamando *proprio* il fascio costituito da rette concorrenti in un punto.
Le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto comune che dicesi *centro* del fascio; le rette di un fascio improprio non hanno in comune *un punto*, bensì *una direzione*. Per riunire in una sola queste due osservazioni, conviene sostituire alla parola *direzione*, la locuzione *punto improprio*, o *punto all'infinito*, che nulla significava finora. Volendo poi (quando occorra) distinguere l'ente a cui convenzionalmente attribuiamo il nome di *punto improprio* dai punti intuitivi dello spazio, chiameremo questi ultimi *punti propri*. Ora possiamo dire che le rette di un fascio hanno sempre un punto comune (*centro*), *proprio* se il fascio è proprio, *improprio*, cioè una direzione, se il fascio è improprio. In particolare: due rette di un piano hanno sempre un punto in comune, *proprio* quando si segano (nel senso della Geometria elementare), *improprio* se sono parallele.
Una retta a possiede infiniti punti propri ed un punto improprio o all'infinito A_∞, cioè una direzione; questo punto (o questa direzione) è completamente definito quando è data la retta, e non varia quando la retta venga sostituita con una ad essa parallela.

Congiungere un punto proprio B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione, come quello di congiungere B con un punto proprio .

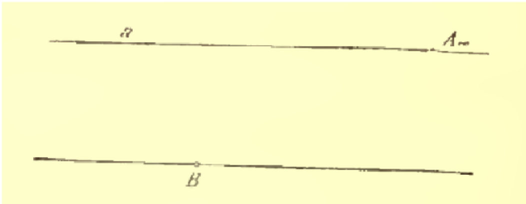


Figura 23: screenshot del testo originale all'inizio del Problema 1.

Il testo contiene informazioni sui fasci di rette propri e impropri, sui punti propri e impropri e descrive, sia verbalmente (ultime due righe in blu di Figura 23) che iconicamente (immagine con sfondo giallo sempre in Figura 23), il significato grafico dell'espressione *congiungere un punto proprio con un punto improprio*.

Osservazione 1.1. Il testo contiene delle espressioni cardine che - anche se circostanziate e presenti solo all'inizio del libro - permeano e definiscono l'intera opera. Ne sono un esempio le prime due frasi del secondo paragrafo[82]: "**D'ora in poi** per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro. E **solo quando sarà necessario** distinguere i due casi, diremo *improprio* l'ultimo fascio, chiamando proprio il fascio costituito dalle rette concorrenti in un punto". O anche, poco più avanti, "Volendo poi (**quando occorra**) distinguere l'ente a cui convenzionalmente attribuiamo il nome di *punto improprio* dai punti intuitivi dello spazio, chiameremo questi ultimi *punti propri*. Ora possiamo dire che le rette di un fascio hanno **sempre** un punto comune (*centro*), *proprio* se il fascio è proprio, *improprio*, cioè una direzione, se il fascio è improprio". In tali espressioni le locuzioni in grassetto, oltre a permettere maggiore concisione testuale, hanno una portata notevole da un punto di vista matematico ed un impatto su tutto ciò

[82] I corsivi sono presenti anche nel testo originale; le parti in grassetto sono invece enfasi personali.

che le segue. Tuttavia, questo impatto nel resto del testo si ha l'impressione che rimanga invisibile e comunque non localizzabile a priori: sembra visibile e localizzabile solo per un lettore che ha un occhio già esperto e teoreticamente addomesticato. Ad esempio, vedremo nei problemi successivi che il riconoscimento di situazioni in cui è necessario operare una distinzione richiede un occhio già consapevole di ciò che tale distinzione comporta (o non comporta). Queste riflessioni hanno informato alcune delle scelte di progettazione compiute che verranno discusse nel seguito.

All'estratto di testo originale con cui si apre il Problema 1, segue l'azione A1.1 che, data una situazione iniziale in cui sono dati un punto proprio B e un punto improprio A_∞ rappresentato da una retta, richiede allo studente di congiungere B e A_∞ (Figura 24).

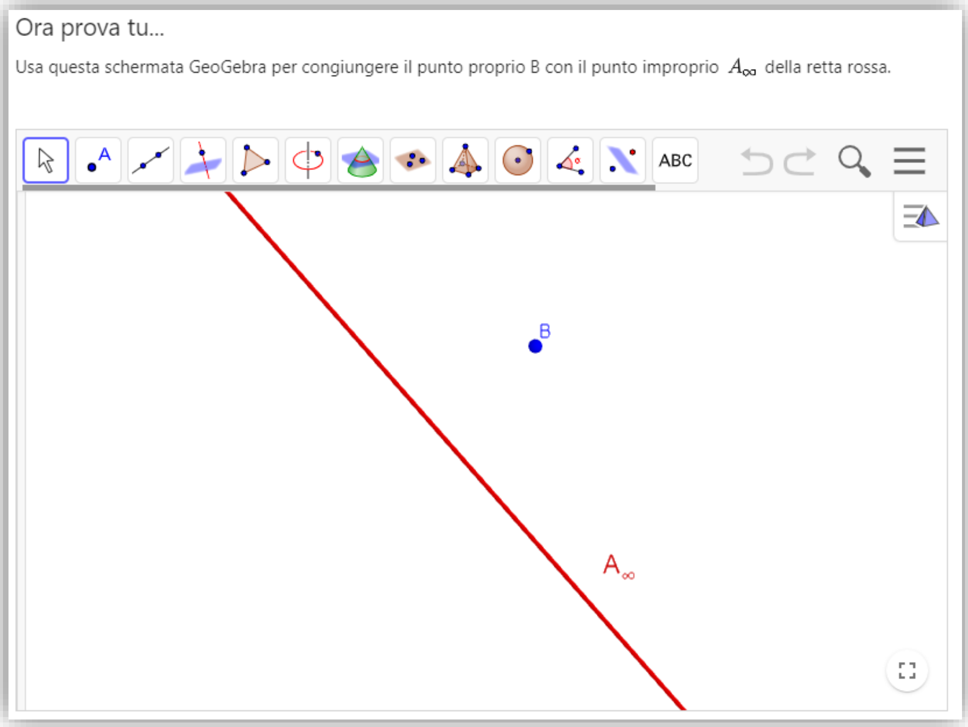


Figura 24: A1.1.

Per fare ciò che A1.1 propone lo studente deve prima ricollegare gli elementi geometrici già disponibili nella schermata con le informazioni fornite dal testo originale; poi, sfruttando le *affordances* dell'applet (che includono non solo i comandi del software ma anche gli elementi già presenti), dovrà materializzare con un atto grafico l'ultima parte della costruzione. In dettaglio, ad una prima analisi, lo studente dovrà:

- riconoscere gli elementi B e A_∞ presenti nella schermata GeoGebra come materializzazioni di quanto espresso dalla penultima frase “Una retta a possiede…una ad essa parallela”;
- riconoscere gli elementi B e A_∞ presenti nella schermata GeoGebra come riproduzioni degli elementi B e A_∞ visibili nella componente iconica del testo originale;
- materializzare graficamente il significato dell’ultima frase del testo originale relativa all’atto del congiungimento di B con A_∞, usando il comando [Retta parallela] di GeoGebra applicato al punto B e alla retta rossa[83];
- riconoscere la corrispondenza tra quanto mostrato nella componente iconica del testo originale e quanto ottenuto al termine della costruzione realizzata.

L’azione A1.1 è accompagnata dalla soluzione S1.1 (https://www.geogebra.org/m/ukphky5e) in cui è visibile una costruzione completa con aperto il [Protocollo di Costruzione], che esplicita lo step fatto per arrivare alla costruzione finale.

4.3 Problema 2: Rette proprie e improprie

Il Problema 2 riguarda le rette proprie e improprie e si apre con un estratto di testo originale tratto ancora dal Paragrafo 3 del libro di Castelnuovo (Figura 25). Il testo contiene informazioni su fasci di piani (propri e impropri) e su rette proprie e improprie. L’ultima riga di testo originale fornisce informazioni su cosa significhi *individuare una retta all’infinito*. Qui il testo originale presenta solo componenti verbali e simboliche.

> Rette proprie e improprie
>
> In modo perfettamente analogo introdurremo il concetto di *retta impropria*. Partiamo da due piani α e β. Se questi hanno una retta comune r, resta individuato un fascio di piani che contiene α e β, ed è costituito da tutti i piani dello spazio che passano per la r. Se invece i due piani α e β sono paralleli (hanno la stessa *giacitura*) rimane individuato il sistema dei piani paralleli ad α e β; poiché il detto sistema ha molte proprietà comuni col fascio, conviene di estendere il nome di *fascio di piani* anche al sistema di piani tutti paralleli. Quando occorra distinguere i due casi, chiameremo *fascio proprio* l'ente costituito da tutti i piani che passano per una retta; *improprio* quello costituito dai piani che sono paralleli ad uno stesso piano. E potremo dire ormai che due piani dello spazio determinano sempre un fascio, proprio od improprio, che li contiene.
> I piani di un fascio proprio hanno in comune *una retta* (asse del fascio), mentre quelli di un fascio improprio hanno in comune *una giacitura*. Sostituendo alla locuzione *giacitura* quella, non ancora adoperata, di *retta impropria* o *all’infinito*, potremo dire che i piani di un fascio proprio o improprio hanno sempre in comune una retta (propria, cioè una retta intuitiva, nel 1°. caso, impropria nel 2°.) che chiameremo *asse del fascio*; in particolare due piani dello spazio hanno sempre una retta comune, *propria* se si segano (nel senso della Geometria elementare), *impropria* se sono paralleli.
>
> Una retta all'infinito è individuata quando si dia un piano che la contenga, che abbia la giacitura definita dalla retta.

Figura 25: screenshot del testo originale all'inizio del Problema 2.

[83] Il comando [Retta parallela], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato una retta e un punto già presenti nella costruzione.

A questo estratto segue la coppia Q2.1+A2.1 in cui viene posto un quesito riguardo al congiungimento di un punto proprio con una retta all'infinito e viene fornita una schermata GeoGebra vuota per realizzare una costruzione (Figura 26).

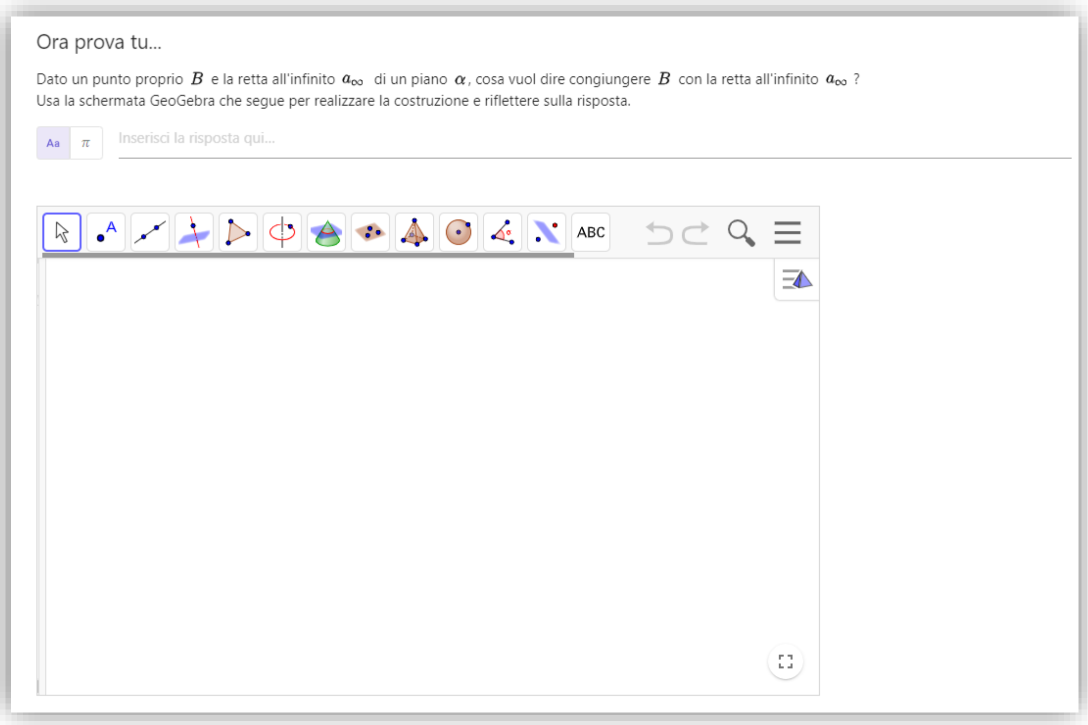


Figura 26: Q2.1+A2.1.

Per fare ciò che Q2.1+A2.1 richiede, e dunque per realizzare la costruzione e rispondere alla domanda, lo studente deve compiere due passi concettuali importanti. Il primo, che riprende quanto fatto al problema precedente, riguarda la materializzazione con un atto grafico del significato dell'ultima riga del testo originale. Il secondo passo concettuale richiede di attribuire un significato grafico all'atto di congiungere un punto proprio con una retta all'infinito. A differenza di quanto fatto nel Problema 1, stavolta il testo originale fornito non contiene informazioni su cosa significhi graficamente effettuare tale congiungimento ed è lo studente che, al termine delle sue riflessioni, dovrà rispondere alla domanda descrivendo il procedimento fatto.

La coppia Q2.1+A2.1 è accompagnata dalla soluzione S2.1 in cui è riportato l'estratto di testo originale in cui Castelnuovo informa sul significato grafico dell'espressione *congiungere un punto proprio con una retta impropria* (Figura 27).

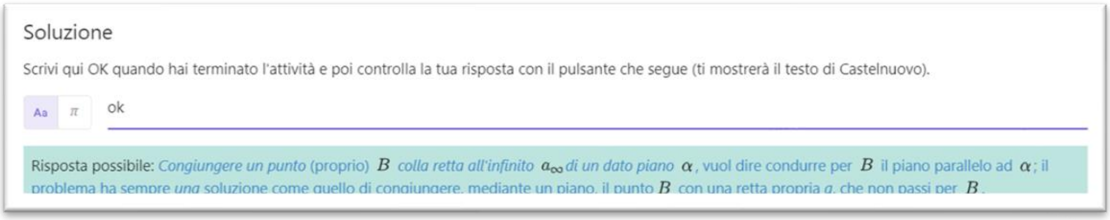


Figura 27: nel riquadro verde è riportato il testo di Castelnuovo che rappresenta S2.1.

Ad una prima analisi, lo studente dunque dovrà:

- combinare le informazioni fornite dall'ultima riga di testo originale con le notazioni introdotte nella consegna in Figura 26;
- costruire nella schermata GeoGebra un piano α che rappresenti la retta impropria a_∞ e un punto B che non appartenga ad α;
- individuare nel testo originale le informazioni utili a capire come proseguire con la costruzione (ad esempio, il fatto che i piani paralleli hanno la stessa giacitura, che i piani di un fascio improprio hanno in comune una giacitura, che la parola giacitura viene sostituita con la locuzione "retta impropria" e il fatto che due piani nello spazio hanno sempre una retta in comune);
- connettere tali informazioni in maniera significativa, ipotizzando una modalità grafica per operazionalizzare tali connessioni;
- materializzare graficamente le proprie ipotesi nella schermata fornita, usando il comando [Piano parallelo] e selezionando i già presenti piano α e punto B[84];
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna, il che significa produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto al punto precedente;
- (una volta visualizzata la soluzione) confrontare il proprio procedimento e il proprio testo con il testo originale scritto da Castelnuovo.

4.4 Problema 3: Proiettare da un punto una figura composta da punti e rette

Il Problema 3 riguarda l'operazione di proiezione da un punto e si apre con un estratto di testo originale tratto dal Paragrafo 9 del libro di Castelnuovo (Figura 28).

[84] Il comando [Piano parallelo], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato un piano e un punto già presenti nella costruzione.

Proiettare da un punto una figura composta da rette

Proiettare da un punto S *(centro di proiezione)* una figura $(A, B, ..., a, b...)$ composta di punti e rette, significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura. la nuova figura così ottenuta, composta di rette e piani uscenti da S, si designa con $S(A, B, ..., a, b...)$ e si chiama *proiettante* o *visuale* della figura primitiva dal centro S.

Figura 28: Screenshot con il testo originale all'inizio del Problema 3.

Il testo presenta la definizione di proiezione da un punto di una figura composta da punti e rette, introducendo anche terminologia e notazioni.

<u>Osservazione 3.1.</u> Per come è presentata da Castelnuovo, l'operazione di proiezione presenta una natura epistemologica particolare. La figura proiettante (che, in qualche modo, rappresenta il risultato dell'operazione di proiezione) coincide con il processo stesso del proiettare. Seguendo la definizione in Figura 28, per, ad esempio, proiettare un punto A da un centro S dovremo condurre la retta che congiunge S ad A: la figura $S(A)$ che si ottiene così facendo (cioè SA, la "retta uscente da S" che materializza l'operazione di proiezione) sarà la proiettante o visuale di A da S. Quindi, graficamente, prodotto e processo coincidono. Questo punto è estremamente delicato e, come vedremo nel Capitolo 6, ha avuto un ruolo cruciale nello sviluppo dell'attività.

<u>Osservazione 3.2.</u> L'operazione di proiezione definita come in Figura 28 non specifica la natura propria o impropria dei punti e rette coinvolti. Da un punto di vista puramente proiettivo non c'è effettivamente alcuna ragione per fare tale distinzione. Tuttavia, da un punto di vista grafico, nei due casi si agisce in maniera differente e riconoscere gli invarianti per cui la distinzione non è necessaria non è spontaneo né automatico. Ci troviamo quindi di fronte ad un esempio emblematico di situazione in cui l'impatto delle espressioni discusse nell'Osservazione 1.1 rimane invisibile e nascosto.

All'estratto di testo in Figura 28 seguono tre blocchi operativi: l'azione A3.1, la coppia Q3.2+A3.2 e la coppia Q3.3+A3.3. In A3.1 è fornita una schermata GeoGebra in cui, dati un punto proprio S e cinque altre diverse figure (due punti propri, un punto improprio e due rette proprie), si chiede allo studente di proiettare dal punto S le cinque figure (Figura 29).

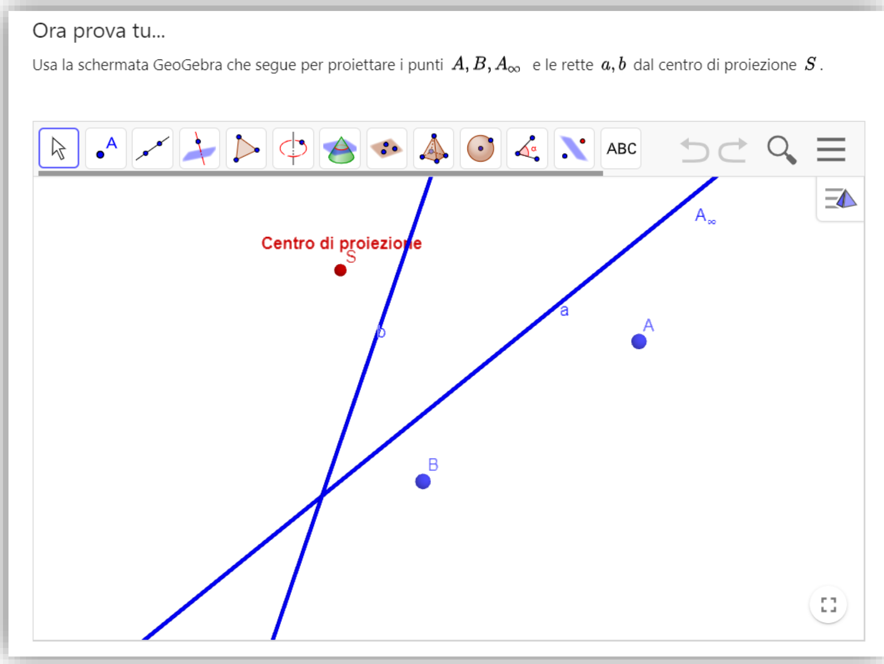


Figura 29: A3.1.

Per fare ciò che A3.1 richiede, e dunque per completare la costruzione, lo studente deve compiere due passi concettuali importanti. Il primo riguarda la materializzazione con degli atti grafici del significato della definizione di proiezione appena letta (che riguarda un generico punto e una generica figura composta di punti e rette). Il secondo riguarda la gestione del caso della proiezione da S del punto improprio A_∞ che richiede la coordinazione tra le informazioni date nella definizione di proiezione e quelle usate nell'ambito del Problema 1. Ad una prima analisi lo studente dovrà:

- nella definizione di proiezione, separare le informazioni relative alla proiezione di punti da quelle relative alla proiezione di rette;
- materializzare con un atto grafico le proiezioni dei punti propri A e B attivando il comando [Retta] e selezionando prima i punti S e A e poi i punti S e B[85];
- materializzare con un atto grafico le proiezioni delle rette proprie a e b attivando il comando [Piano] (o [Piano per tre punti]) e selezionando prima il punto S e la retta a (o due punti su a) e poi il punto S e la retta b (o due punti su b)[86];

---

[85] Il comando [Retta], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato due punti già presenti nella costruzione.
[86] Il comando [Piano], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato un punto e una retta, o due rette, già presenti nella costruzione; il comando [Piano per tre punti], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato tre punti già presenti nella costruzione.

- ricollegare in maniera significativa l'espressione "condurre le rette che congiungono" nella definizione di proiezione con quanto visto nel Problema 1 riguardo al congiungere un punto proprio con un punto improprio;
- materializzare con un atto grafico la proiezione del punto improprio A_∞ attivando il comando [Retta parallela] e selezionando i già presenti punto S e retta a.

Osservazione 3.3. Come vedremo nel Capitolo 6, quest'ultimo passaggio aprirà un nuovo livello di complessità concettuale e segnerà l'inizio di un'importante transizione tra la gestione di elementi propri (o, per usare il termine scelto da Castelnuovo, intuitivi) e la gestione di quelli impropri che finiscono per avere quasi una natura percettivamente paradossale perché pur avendo un legame con l'esperienza visiva, in realtà vanno oltre ciò che possiamo effettivamente vedere o percepire direttamente.

Ad A3.1 segue la coppia Q3.2+A3.2 che fa riferimento alla situazione proposta in A3.1 e chiede di esplorare il caso del centro di proiezione improprio, fornendo una schermata GeoGebra vuota per realizzare la costruzione (Figura 30).

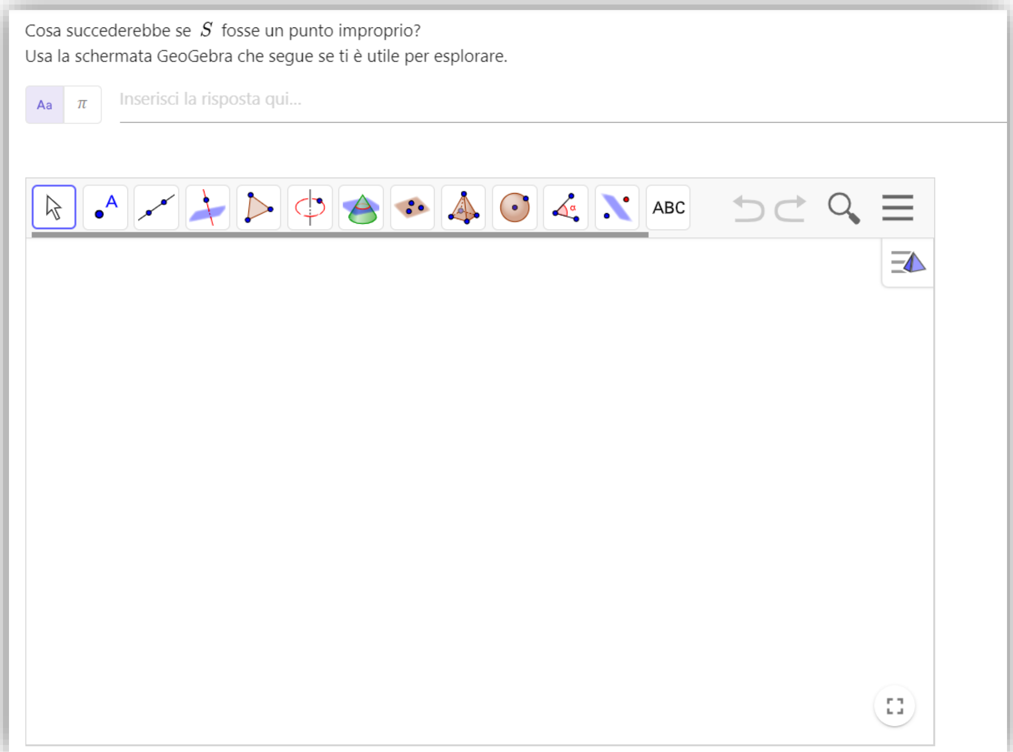


Figura 30: Q3.2+A3.2.

In questo caso, allo studente è richiesto un ulteriore passo concettuale perché dovrà istanziare nel caso del centro improprio non solo la costruzione di partenza

(Figura 29) ma l'intera definizione di proiezione. Ad una prima analisi lo studente dovrà:

- nella schermata GeoGebra, riprodurre la situazione di partenza, considerando che però stavolta il centro di proiezione è un punto improprio e, quindi, sarà necessario fare nuovamente riferimento a quanto visto nel Problema 1;
- individuare le opportune istanziazioni della definizione di proiezione al caso del centro improprio;
- materializzare con un atto grafico le proiezioni da centro improprio dei punti propri A e B attivando il comando [Retta parallela] e selezionando la retta che rappresenta il centro improprio e poi A (e ripetendo la stessa procedura con B);
- materializzare con un atto grafico le proiezioni da centro improprio delle rette proprie a e b. Ci sono diversi modi per farlo e vedremo più esempi nel Capitolo 6. Qui ci limitiamo a presentarne uno: si sceglie una precisa retta rappresentante il centro improprio, quella che interseca la retta che si vuole proiettare; poi, attivando il comando [Piano], si seleziona la retta da proiettare e la nuova rappresentante del centro improprio;
- materializzare con un atto grafico le proiezioni da centro improprio del punto improprio A_∞. Quest'ultimo passaggio non è banale e, per brevità, non lo descriveremo qui ma in Figura 31 ne viene mostrato un esempio tratto dalla sperimentazione e realizzato da una delle coppie di partecipanti;

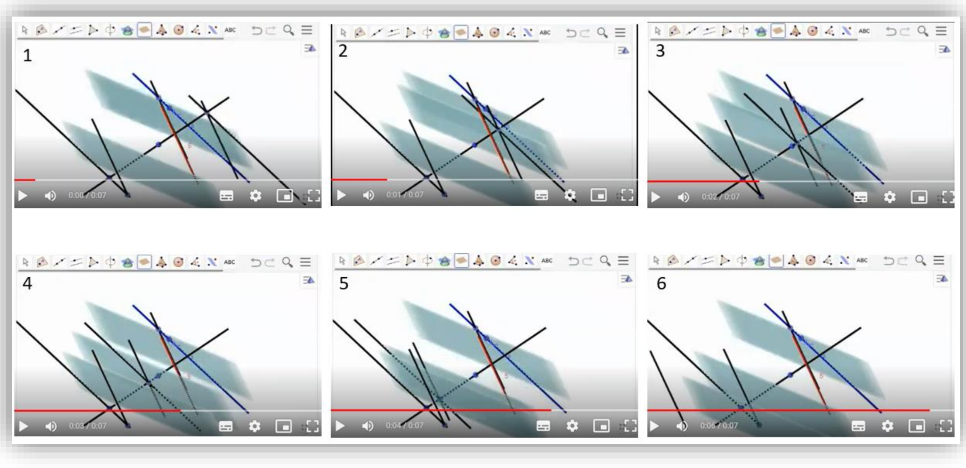


Figura 31: Proiezione di un punto improprio da un punto improprio materializzata con una sequenza di immagini (seguire la numerazione). Il link in nota[87] rimanda a un'animazione che illustra tale proiezione in modo dinamico.

[87] https://drive.google.com/file/d/1bVhtr2fBFjtUOPYv9S2InHou1fGgUAkU/view

- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna, ovvero produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto ai punti precedenti.

I penultimi due punti presentano una forte rottura concettuale rispetto a quanto esperito finora. Infatti, è qui che lo studente ha *veramente* la possibilità di incontrare il significato delle espressioni usate nel testo originale del Problema 1, in cui viene svelata la particolare natura dei punti impropri (Figura 23, ma per comodità del lettore viene riportata anche di seguito):

> “le rette di un fascio improprio non hanno in comune un punto, bensì una *direzione* […] conviene sostituire alla parola direzione, la locuzione *punto improprio*, o *punto all’infinito* […] Una retta a possiede infiniti punti propri ed un punto improprio o all'infinito A_∞ , cioè una direzione; questo punto (o questa direzione) è completamente definito quando è data la retta, e non varia quando la retta venga sostituita con una ad essa parallela.”

In particolare, un punto improprio non è “solo” la direzione di una retta precisa ma è la direzione comune a una famiglia di rette parallele.

Alla coppia Q3.2+A3.2 segue la coppia Q3.3+A3.3 che chiede di esplorare il caso della proiezione da centro proprio di una retta impropria e fornisce una schermata GeoGebra vuota per eventualmente realizzare una costruzione esplorativa (Figura 32).

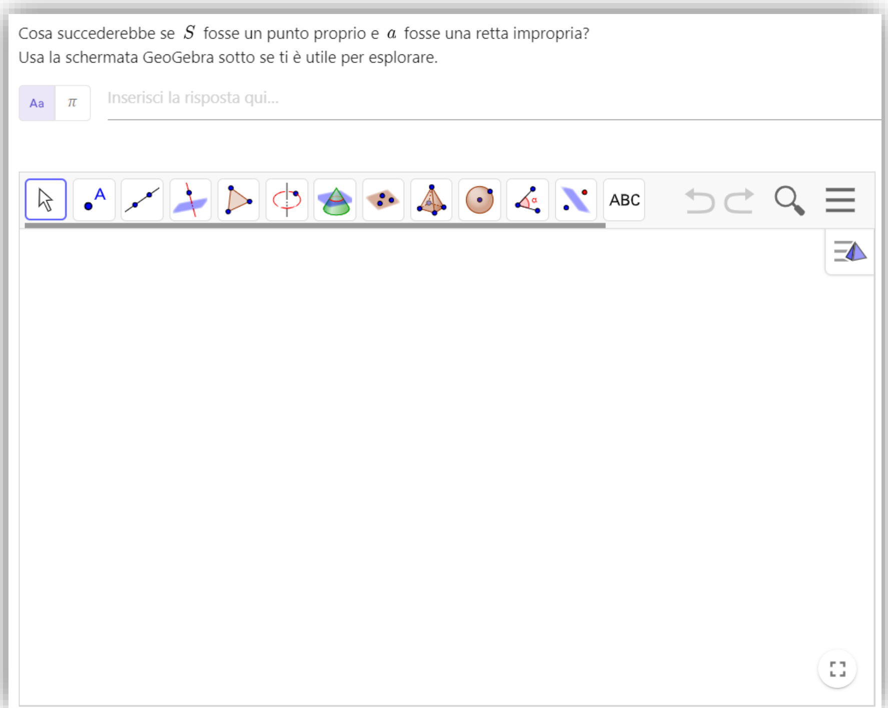


Figura 32: Q3.3+A3.3.

Ad una prima analisi, per fare ciò che Q3.3+A3.3 richiede lo studente dovrà:

- nella schermata GeoGebra, realizzare una costruzione che visualizzi il punto proprio centro di proiezione e la retta impropria da proiettare;
- ricollegare in maniera significativa l'espressione "condurre i piani che congiungono" nella definizione di proiezione con quanto visto nel Problema 2 riguardo al congiungere un punto proprio con una retta impropria;
- materializzare con un atto grafico tale proiezione attivando il comando [Piano parallelo] e selezionando il piano che rappresenta la retta impropria e il punto proprio centro di proiezione;
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna, ossia produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto al punto precedente.

4.5 Problema 4: Proiettare da una retta una figura composta da punti

Il Problema 4 riguarda l'operazione di proiezione da una retta e si apre con un estratto di testo originale tratto ancora dal Paragrafo 9 del libro di Castelnuovo (Figura 33).

Proiettare da una retta una figura composta da punti

Proiettare da una retta s (*asse di proiezione*) una figura composta da punti, significa condurre i piani che congiungono la retta s ai punti della figura.

Figura 33: Screenshot del testo originale all'inizio del Problema 4.

Il testo presenta la definizione di proiezione da una retta di una figura composta da punti e ad esso seguono tre blocchi operativi: l'azione A4.1, il quesito A4.2 e la coppia Q4.3+A4.3. In A4.1 è fornita una schermata GeoGebra in cui, dati una retta propria s e tre altre diverse figure (due punti propri e un punto improprio), si chiede allo studente di proiettare dall'asse di proiezione s le tre figure (Figura 34).

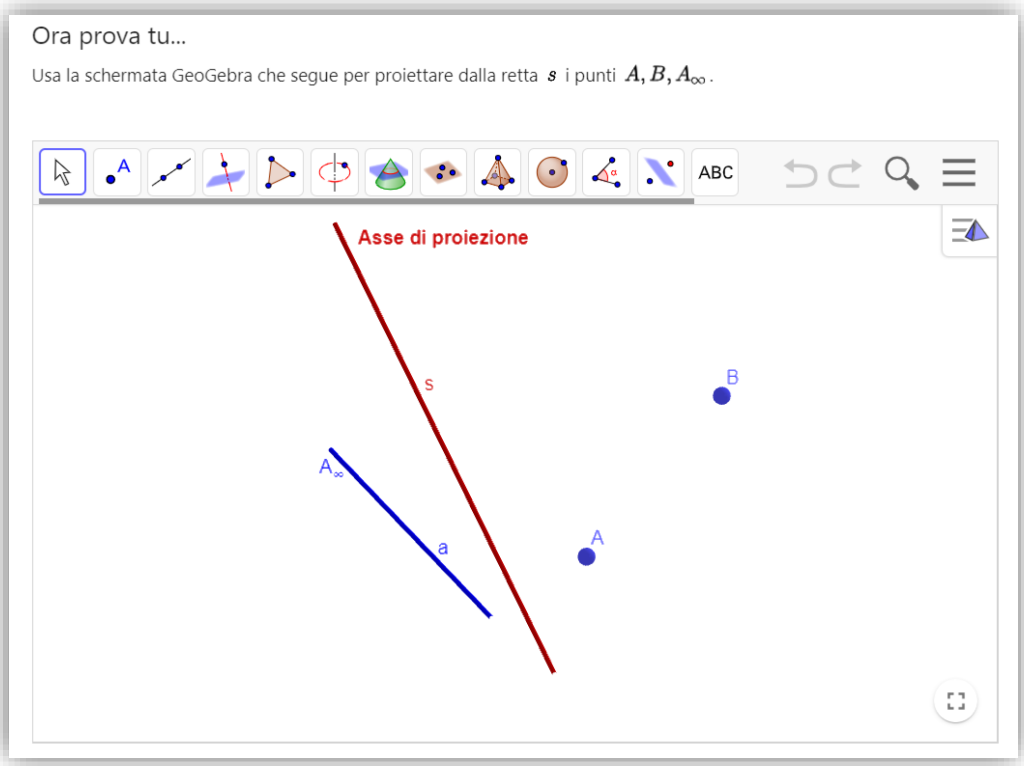


Figura 34: A4.1.

Per fare ciò lo studente deve procedere in maniera analoga a quanto fatto nel caso di A3.1 e, ancora una volta, si troverà di fronte alla necessità di gestire il caso della proiezione dall'asse s del punto improprio A_∞. Ad una prima analisi dunque lo studente dovrà:

- materializzare con un atto grafico le proiezioni dei punti propri A e B attivando, ad esempio, il comando [Piano] e selezionando prima la retta s e il punto A e poi la retta s e il punto B;
- ricollegare in maniera significativa l'espressione "condurre i piani che congiungono" nella definizione di proiezione con quanto fatto in Q3.3+A3.3;
- materializzare con un atto grafico la proiezione del punto improprio A_∞ attivando il comando [Retta parallela] e selezionando i già presenti punto S e retta a.

Ad A4.1 segue A4.2 che fa riferimento alla situazione proposta in A4.1 e chiede di fornire una spiegazione scritta riguardo la gestione del caso della proiezione dall'asse s del punto improprio A_∞ (Figura 35).

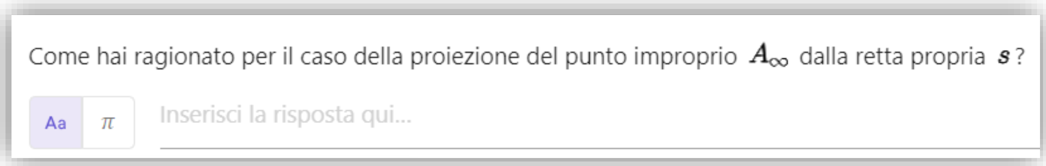


Figura 35: Q4.2.

Allo studente è quindi richiesto di fornire una risposta scritta che descriva il ragionamento fatto per gestire il caso della proiezione del punto improprio.

Il Problema 4 si conclude con la coppia Q4.3+A4.3 che fa riferimento alla situazione proposta in A4.1 e chiede di esplorare il caso dell'asse improprio nel solo caso della proiezione dei due punti propri, fornendo una schermata GeoGebra vuota per realizzare la costruzione (Figura 36).

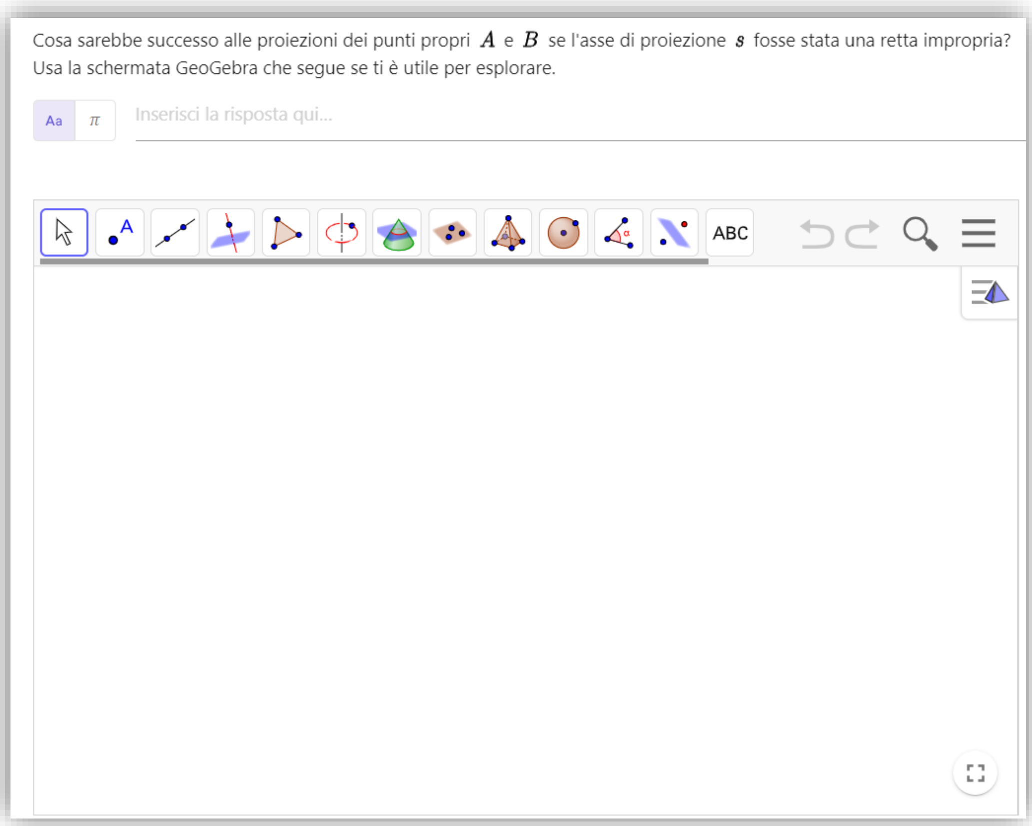


Figura 36: Q4.3+A4.3.

Ad una prima analisi, allo studente viene quindi richiesto di:

- realizzare nella schermata GeoGebra una costruzione che visualizzi l'asse di proiezione (che stavolta, essendo una retta impropria, potrà essere materializzato con un piano che la rappresenta) e i due punti propri da proiettare;

- ricollegare in maniera significativa l'espressione "condurre i piani che congiungono" nella definizione di Figura 33, istanziata nella particolare situazione proposta in Q4.3+A4.3, con quanto fatto in Q3.3+A3.3 e quanto visto nel Problema 2;
- materializzare con un atto grafico tale proiezione attivando il comando [Piano parallelo] e selezionando, per due volte consecutive, il piano che rappresenta l'asse improprio e il punto proprio da proiettare;
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna, ovvero produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto al punto precedente.

In generale, con Q4.2 e Q4.3+A4.3 viene messa sempre più in luce la necessità di articolare le diverse soluzioni dei problemi precedenti, sollecitando la connessione tra le varie componenti degli oggetti matematici coinvolti (elementi impropri e operazione di proiezione). Dall'altro lato, la richiesta di descrivere il proprio ragionamento con un testo scritto incoraggia il raggiungimento di un nuovo raffinamento semiotico.

4.6 Problema 5: Segare con un piano una figura composta di piani e rette

Il Problema 5 è il primo ad introdurre un nuovo oggetto matematico: l'operazione di sezione. In particolare, tale problema si apre con un estratto di testo originale che definisce l'operazione di sezionamento con un piano di una figura composta da piani e rette, introducendo anche terminologia e notazioni (Figura 37). A tale estratto seguono Q5.1+A5.1 e il quesito Q5.2.

Segare con un piano una figura composta di piani e rette

Segare con un piano δ (*piano di sezione* o *quadro*) una figura $(\alpha, \beta, \ldots, a, b \ldots)$ composta da piani e rette, significa determinare le rette e i punti in cui δ sega i piani e le rette della figura. La nuova figura così ottenuta, composta di rette e punti giacenti in δ, si designa con $\delta(\alpha, \beta, \ldots, a, b \ldots)$ e si chiama *sezione* o *traccia* della figura primitiva (eseguita) col piano δ.

Figura 37: Screenshot del testo originale all'inizio del Problema 5.

Nella coppia Q5.1+A5.1 è fornita una schermata GeoGebra che contiene un piano proprio δ e cinque altre figure aventi diverse relazioni con δ: un piano α parallelo a δ, un piano β secante δ, una retta a parallela a δ, una retta b appartenente a δ e una terza retta c secante δ (Figura 38). La richiesta è quella di sezionare con δ i cinque elementi dati, esplicitando con un testo ciò che si ottiene per ciascun caso.

Osservazione 5.1: L'operazione di sezione definita come in Figura 37 non specifica particolari relazioni tra il piano di sezione e le figure da sezionare ma le figure in blu di Figura 38 presentano diverse particolarità, che lo studente dovrà gestire istanziando opportunamente la definizione nei vari casi. Questo passaggio offre l'opportunità di accedere a un nuovo passo concettuale: infatti un testo matematico è qualcosa che allo stesso tempo permette a chi legge l'incontro con un oggetto storico culturale, mentre plasma l'oggetto stesso, materializzandolo in parole, simboli e immagini. Il rapporto dialettico tra questi due aspetti, come abbiamo visto nel Capitolo 3, è legato al rapporto dinamico tra sapere e conoscenza e presenta per lo studente la possibilità di accedere a nuove consapevolezze riguardo le relazioni tra un oggetto matematico e un testo che, parlandone, lo scolpisce.

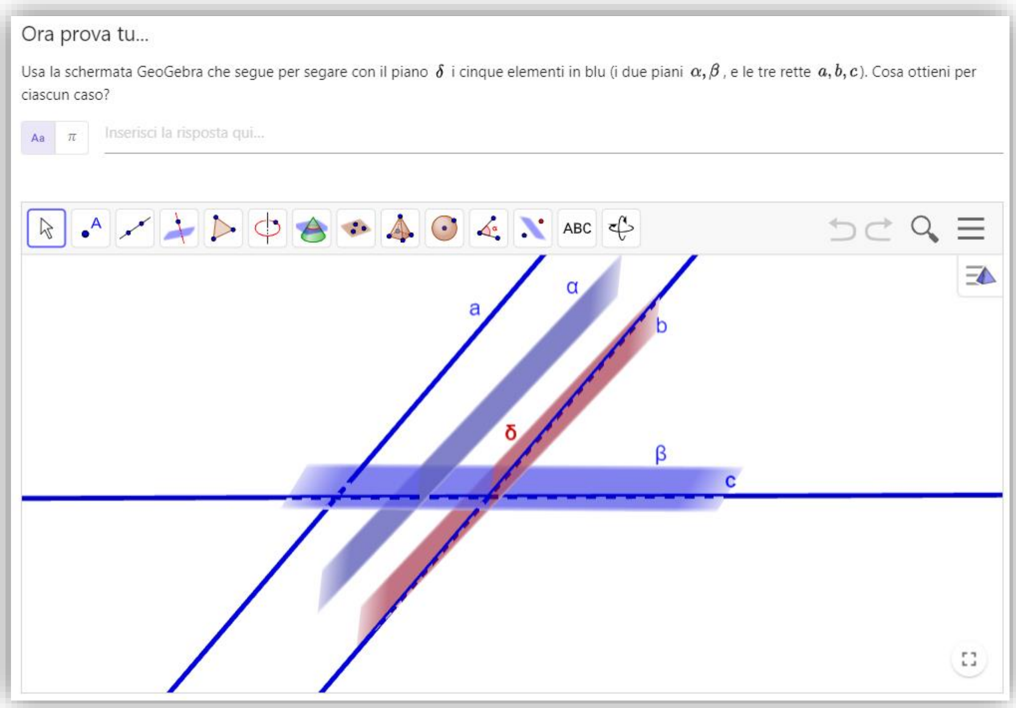


Figura 38: Q5.1+A5.1.

Ad una prima analisi, come per il caso dei problemi precedenti (in particolare il 3 e il 4), allo studente viene richiesto di:

- nella definizione di sezione, separare le informazioni relative alla sezione di piani da quelle relative alla sezione di rette;

- materializzare con un atto grafico le sezioni delle tre rette proprie attivando il comando [Intersezione] e selezionando prima il piano δ e poi una delle tre rette (ripetendo poi lo stesso procedimento per le altre due[88]);
- interpretare gli output restituiti nel punto precedente. Infatti, solo il caso dell'intersezione tra δ e la retta c restituisce un punto proprio visibile nella schermata. Le altre due situazioni (intersezione tra δ e le rette a a b) non hanno un effetto visibile perché c'è una relazione di parallelismo. Lo studente, dunque dovrà articolare quanto accade sulla schermata con la definizione di sezione e con le relazioni tra piano di sezione e retta da sezionare;
- materializzare con un atto grafico le sezioni dei piani α e β attivando il comando [Intersezione di superfici] e selezionando prima il piano di sezione δ e il piano α e poi, di nuovo δ e il piano β[89];
- anche in questo caso, sarà necessario interpretare gli output restituiti nel punto precedente, articolando in maniera significativa ciò che si ottiene nella schermata con la definizione di sezione e con le relazioni tra piano di sezione e piano da sezionare;
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna, il che significa produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto in tutti i punti precedenti.

Il Problema 5 si conclude con il quesito Q5.2 in cui si chiede allo studente di riflettere sul caso della sezione di una retta impropria con un piano proprio (Figura 39).

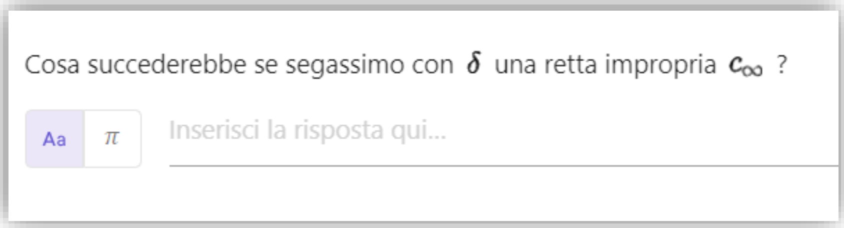


Figura 39: Q5.2.

Per rispondere a tale domanda, ad una prima analisi lo studente dovrà:

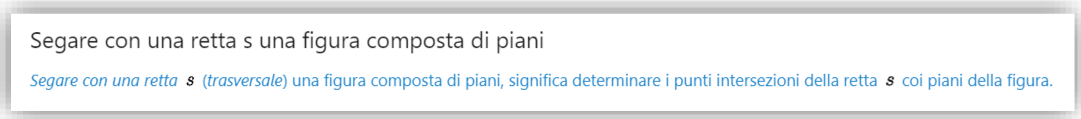
- nella definizione di sezione, individuare le informazioni rilevanti rispetto alla situazione proposta;

[88] Il comando [Intersezione], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato due curve o una superficie e una curva già presenti nella costruzione.
[89] Il comando [Intersezione di superfici], una volta attivato, viene eseguito dopo aver selezionato due superfici già presenti nella costruzione.

- articolare la casistica da considerare rispetto alle possibili relazioni tra δ e la retta impropria c_∞;
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna che descriva le conclusioni tratte dalle riflessioni precedenti.

4.7 Problema 6: Segare con una retta s una figura composta di piani

Il Problema 6 chiude il cerchio di informazioni riguardo all'operazione di sezione e tratta il caso della sezione con una retta di una figura composta da piani (Figura 40).


Segare con una retta s una figura composta di piani

Segare con una retta s (*trasversale*) una figura composta di piani, significa determinare i punti intersezioni della retta s coi piani della figura.

Figura 40: Screenshot del testo originale all'inizio del Problema 6.

A livello operativo, questo problema contiene solo la coppia Q6.1+A6.1 ma, a differenza dei problemi che lo precedono, si chiude con un nuovo estratto di testo originale che è la parte finale del Paragrafo 9 in cui Castelnuovo unifica le operazioni di proiezione e sezione.

La coppia Q6.1+A6.1 chiede allo studente di realizzare nella schermata GeoGebra una costruzione che visualizzi l'operazione di sezione con una retta di una figura composta di piani (Figura 41).

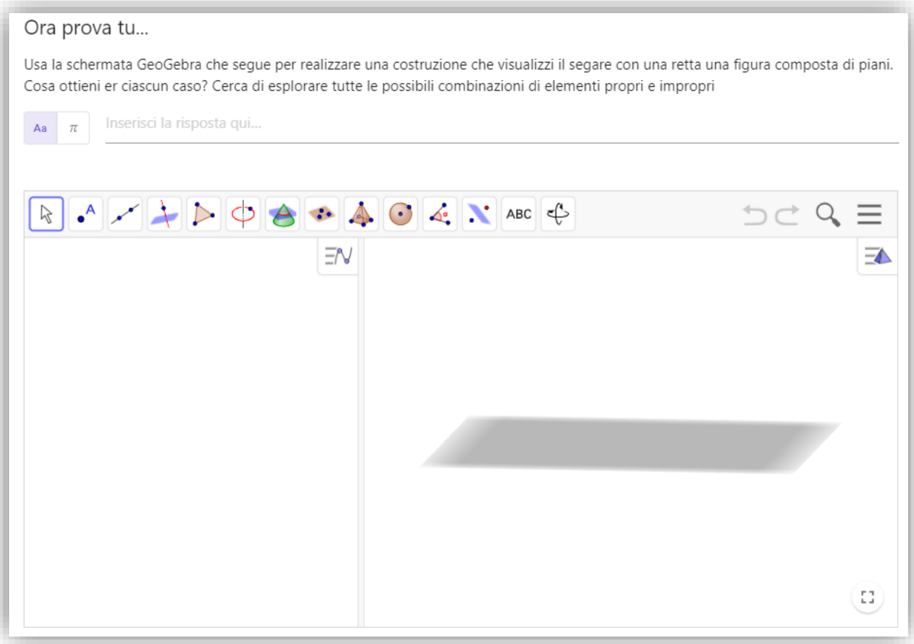


Figura 41: Q6.1+A6.1.

Osservazione 6.1. In questo caso la schermata fornita non contiene una situazione iniziale su cui lavorare ma, a differenza di tutti gli altri problemi, ha la *Vista Algebra* aperta e il [Piano grigio] per l'inserimento di nuovi punti[90] visibile. Questa scelta di progettazione è supportata da due motivazioni: la prima di natura tecnica, riguarda la volontà di evitare che lo studente investa troppo tempo o energia solo per rendere più agevole la realizzazione delle figure iniziali da sezionare; la seconda ha una natura legata alla ricerca stessa, riguardando la volontà di indagare quanto e come le conoscenze pregresse in algebra e analisi avrebbero potuto intervenire, essere di aiuto o, in generale, interagire con l'attività.

Per fare ciò che la coppia Q6.1+A6.1 richiede, ad una prima analisi lo studente dovrà:

- articolare la casistica da considerare rispetto alle possibili relazioni tra la retta di sezione e il/i piano/i da sezionare;
- individuare una situazione di partenza significativa e, nella schermata GeoGebra, realizzare la costruzione corrispondente;
- valutare, caso per caso, la natura dei punti di intersezione;
- fornire una risposta scritta alla domanda nella consegna che descriva le conclusioni tratte dalle riflessioni precedenti.

Come anticipato, il Problema 6 si conclude con un secondo estratto di testo originale in cui Castelnuovo, mettendo insieme proiezione e sezione, definisce l'operazione di proiezione di una figura da un centro su un piano (Figura 42).

> Proiettare da un centro su un piano
>
> È chiaro poi che in geometria piana si potrà proiettare da un punto una figura composta di punti e segare con una retta una figura composta di rette. Spesso le due operazioni di proiezione e sezione con un piano si riuniscono per formare una sola operazione, che prende il nome di *proiezione da un centro* S *sopra un piano* δ. La operazione si eseguisce proiettando la figura data $(A, B, \ldots, a, b \ldots)$ dal centro S e segandone la visuale $S(A, B, \ldots, a, b \ldots)$ col piano δ. La figura $(A', B', \ldots, a', b' \ldots)$ che così si ottiene in δ, dicesi appunto *proiezione* della figura primitiva S sopra δ.

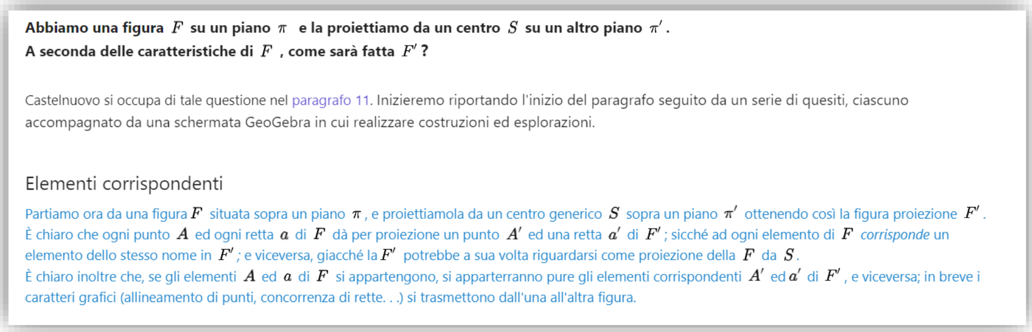
Figura 42: Screenshot del testo originale alla fine del Problema 6.

Osservazione 6.1. In quest'ultima definizione, la parola *proiezione* indica sia il processo del proiettare che il nome della figura che si ottiene al termine. In questa definizione possiamo riconoscere l'operazione di proiezione che oggi ci è più familiare.

[90] Tale piano è la funzionalità di *GeoGebra 3D* che permette di inserire nuovi punti liberi alla costruzione: essi vengono prima costruiti sul piano grigio e poi possono essere spostati, in movimenti separati, o lungo un asse parallelo all'asse z (che nel sistema di assi di default in *GeoGebra 3D* è verticale) o su un piano paralleo al piano xy (che nel sistema di assi di default in *GeoGebra 3D* è orizzontale).

4.8 Problema 7: Elementi corrispondenti

Il Problema 7 si apre con una breve premessa seguita da un estratto di testo originale tratto dall'inizio del Paragrafo 11 dell'opera di Castelnuovo (Figura 43).



Abbiamo una figura F su un piano π e la proiettiamo da un centro S su un altro piano π'.
A seconda delle caratteristiche di F, come sarà fatta F'?

Castelnuovo si occupa di tale questione nel paragrafo 11. Inizieremo riportando l'inizio del paragrafo seguito da un serie di quesiti, ciascuno accompagnato da una schermata GeoGebra in cui realizzare costruzioni ed esplorazioni.

Elementi corrispondenti

Partiamo ora da una figura F situata sopra un piano π, e proiettiamola da un centro generico S sopra un piano π' ottenendo così la figura proiezione F'.
È chiaro che ogni punto A ed ogni retta a di F dà per proiezione un punto A' ed una retta a' di F'; sicché ad ogni elemento di F *corrisponde* un elemento dello stesso nome in F'; e viceversa, giacché la F' potrebbe a sua volta riguardarsi come proiezione della F da S.
È chiaro inoltre che, se gli elementi A ed a di F si appartengono, si apparterranno pure gli elementi corrispondenti A' ed a' di F', e viceversa; in breve i caratteri grafici (allineamento di punti, concorrenza di rette. . .) si trasmettono dall'una all'altra figura.

Figura 43: Screenshot del testo all'inizio del Problema 7.

Il testo riportato descrive la situazione geometrica di riferimento (una figura proiettata da un centro su un piano diverso da quello a cui essa appartiene) e introduce terminologia e notazioni usate.

A questo testo segue una lista di cinque diverse coppie quesito-azione, da Q7.1+A7.1 a Q7.5+A7.5. In ogni coppia, si richiede di esplorare la figura corrispondente della proiezione in esame per cinque diverse figure primitive di partenza. L'azione richiede di esplorare la situazione usando una schermata GeoGebra in cui sono dati il piano di partenza, il piano di arrivo e il centro di proiezione. Ciascuna coppia quesito-azione è accompagnata dalla propria soluzione, che contiene l'estratto di testo originale in cui Castelnuovo tratta la descrizione di quel caso. Di seguito (Figura 44, Figura 45, Figura 46, Figura 47, Figura 48) sono presentati gli screenshot di tutte e cinque le coppie, ciascuna con la soluzione resa visibile (ma che durante lo svolgimento dell'attività da parte dello studente rimane nascosta).

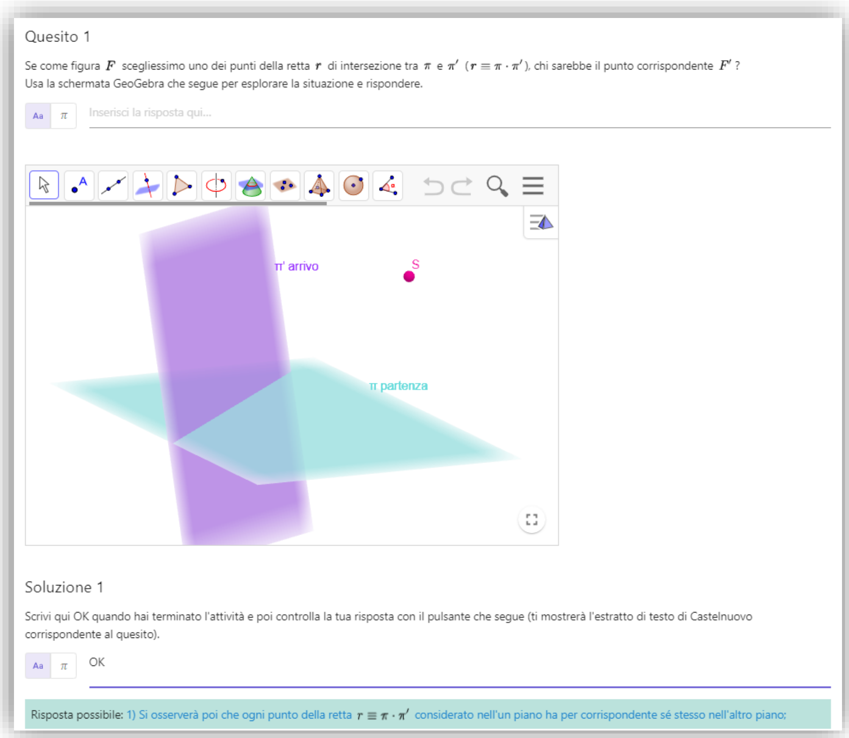


Figura 44: Q7.1+A7.1 e S7.1.

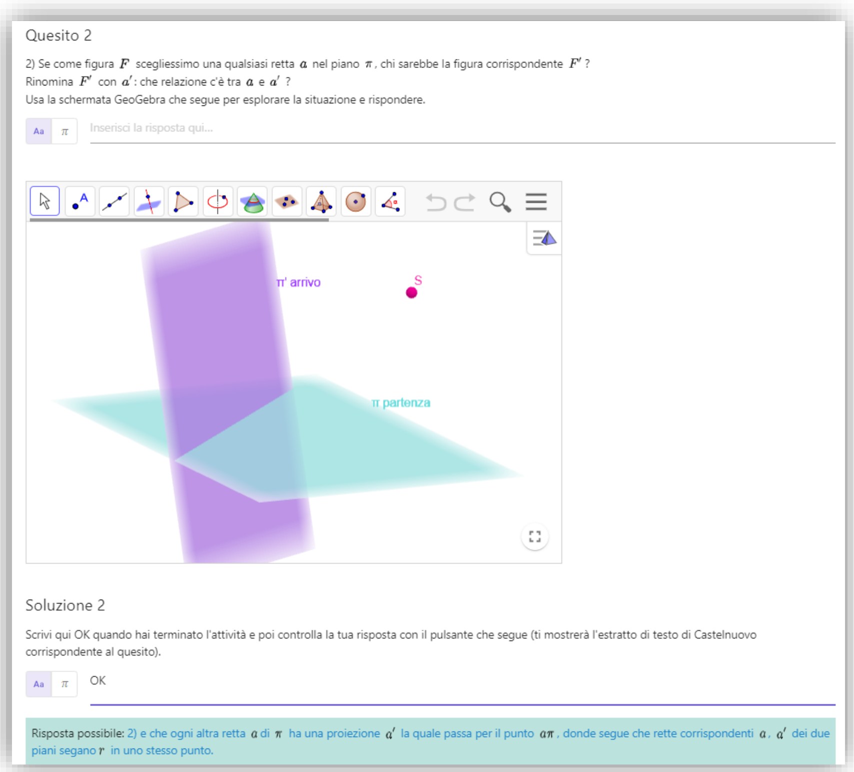


Figura 45: Q7.2+A7.2 e S7.2.

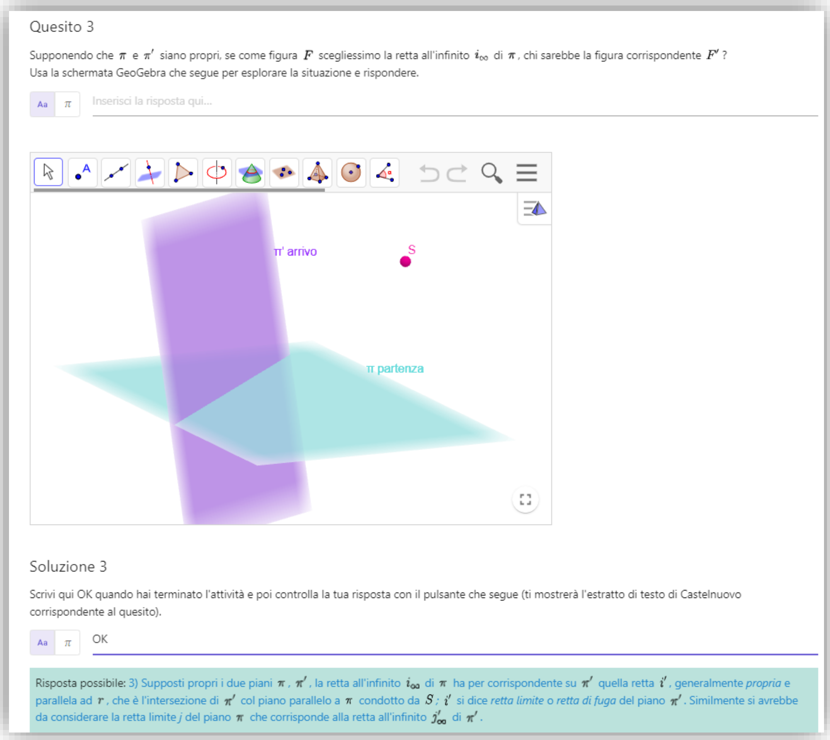


Figura 46: Q7.3+A7.3 e S7.3.

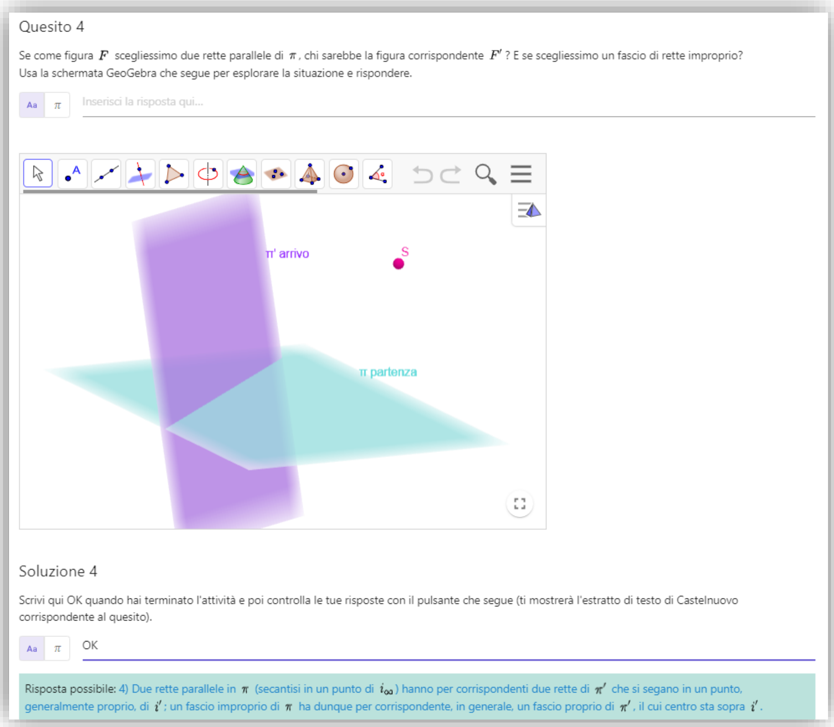


Figura 47: Q7.4+A7.4 e S7.4.

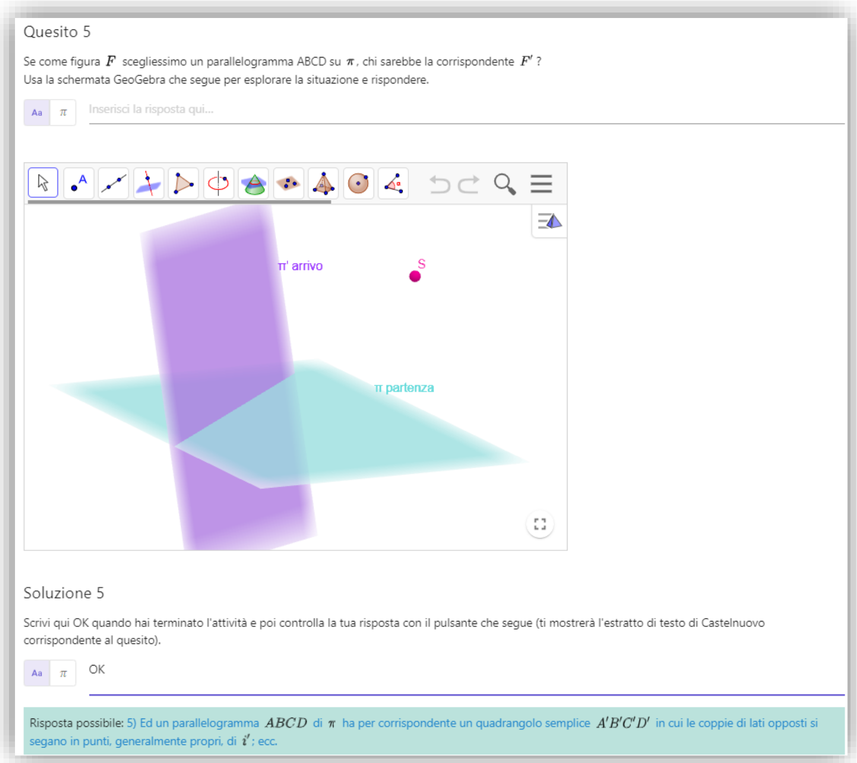


Figura 48: Q7.5+A7.5 e S7.5.

Ad una prima analisi, in ciascuna delle cinque situazioni proposte lo studente dovrà:

- materializzare con degli atti grafici nella schermata GeoGebra la situazione iniziale, data dall'istanziazione di F e F' nelle varie situazioni proposte;
- in base alla situazione in esame, ricollegare, articolare e connettere in maniera significativa il lavoro svolto nei problemi precedenti;
- ipotizzare una risposta geometrica per il quesito posto che operazionalizzi tali connessioni;
- materializzare graficamente le proprie ipotesi nella schermata fornita, usando opportuni comandi in base alla situazione;
- fornire una risposta scritta alla domanda, il che significa produrre un testo matematico che descriva e generalizzi quanto fatto al punto precedente nelle diverse situazioni proposte;
- (una volta visualizzata la soluzione) confrontare il proprio procedimento e il proprio testo con il testo originale scritto da Castelnuovo.

Il Problema 7 presenta delle analogie strutturali con il Problema 2. Tuttavia, nel Problema 7 la complessità concettuale è maggiore a causa di una maggiore complessità grafico-geometrica della situazione trattata.

4.9 Problema 8: Lemma

Il Problema 8 si apre con un estratto di testo originale tratto dall'inizio del Paragrafo 13 dell'opera di Castelnuovo ma, come anche il Problema 6 prima di lui, conterrà nel seguito anche altri estratti di testo originale che però non sono stati segmentati in problemi diversi. Il nucleo tematico è sempre lo stesso: un particolare lemma che sarà al cuore della dimostrazione del Teorema di Desargues (e che dunque, concludendo i prerequisiti ad esso, conclude il percorso sperimentale qui descritto e commentato).

Il primo estratto di testo originale è composto da due parti: nella prima, Castelnuovo propone una sorta di riepilogo di quanto visto in precedenza (nel Paragrafo 11, trattato nel Problema 7). Nella seconda parte dell'estratto, viene presentata e caratterizzata in termini di corrispondenza di elementi una nuova situazione in cui si ha una certa figura primitiva F_0 su un certo piano di partenza π_0 che viene proiettata su un secondo piano π (diverso da π_0) da due centri diversi, facendo ottenere due diverse figure proiezione F e F' (Figura 49).

Nel Problema 8 si raggiunge la massima complessità concettuale del percorso. Infatti, da un punto di vista testuale si tratta dell'estratto più lungo da gestire, mentre da un punto di vista grafico-geometrico richiede il coordinamento di numerose e diverse informazioni.

Fu già osservato (n° 11) che se due figure $F \equiv (A, ..., a, ...)$, $F' \equiv (A', ..., a', ...)$ appartenenti a due piani π, π', sono proiezioni l'una dell'altra da un centro S, allora tutte le rette AA', . . . che congiungono punti corrispondenti distinti delle due figure, passano per uno stesso punto S, mentre tutti i punti aa', . . . in cui si segano rette corrispondenti distinte delle due figure, appartengono ad una stessa retta $r \equiv \pi\pi'$.

Consideriamo ora due figure $F \equiv (A, ..., a, ...)$, $F' \equiv (A', ..., a', ...)$ le quali appartengano ad uno stesso piano π, e siano proiezioni da due centri diversi S, S' di una stessa terza figura $F_0 \equiv (A_0, ..., a_0, ...)$ appartenente ad un altro piano π_0. Riguardiamo come corrispondenti nelle figure F, F' due elementi (come A ed A' oppure a ed a') i quali siano proiezioni di uno stesso elemento (A_0 od a_0) di F_0.
Allora una retta congiungente punti corrispondenti distinti A, A' di F, F' appartiene al piano π ed inoltre al piano $SS'A_0$, quindi passa per il punto fisso 0 traccia di SS' su π.
D'altra parte due rette corrispondenti a, a' delle due figure F, F' devono passare per la traccia della retta a_0 sul piano π_0 (n.° 11), traccia la quale appartiene alla retta $r \equiv \pi\pi_0$; dunque rette corrispondenti distinte di F ed F' si segano in un punto della retta fissa r.

Figura 49: Screenshot del testo originale all'inizio del Problema 8. La prima parte del testo sono le prime tre righe; la seconda, le ultime sette.

A questo estratto, seguono nell'ordine: A8.1; un secondo estratto di testo; S8.1; la coppia Q8.2+A8.2 e un terzo (e ultimo) estratto di testo.

In A8.1 (Figura 50) allo studente è richiesto di usare la schermata GeoGebra fornita per visualizzare il contenuto del secondo blocco di testo (cioè, le ultime sette righe dell'estratto in Figura 49).

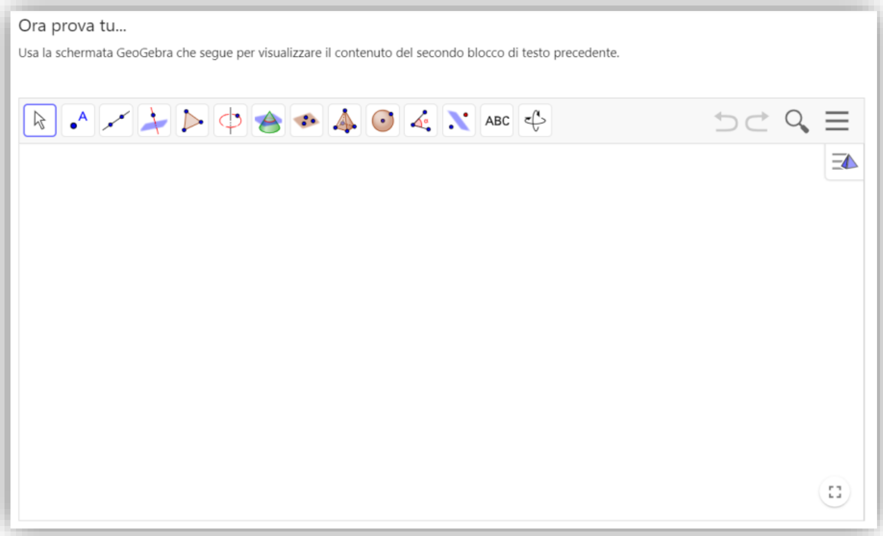


Figura 50: A8.1.

A8.1 è seguito da un altro breve estratto di testo originale (Figura 51) e dalla soluzione S8.1, che contiene la componente iconica del testo originale (Figura 52).

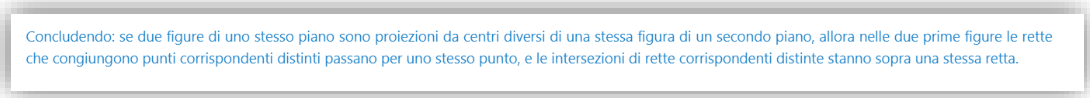

Concludendo: se due figure di uno stesso piano sono proiezioni da centri diversi di una stessa figura di un secondo piano, allora nelle due prime figure le rette che congiungono punti corrispondenti distinti passano per uno stesso punto, e le intersezioni di rette corrispondenti distinte stanno sopra una stessa retta.

Figura 51: Screenshot del secondo estratto di testo originale nel Problema 8.

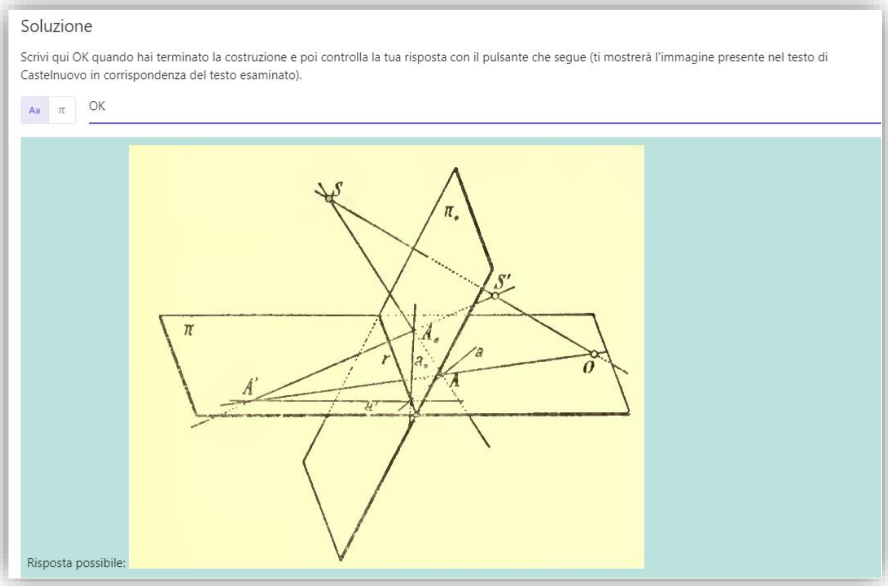


Figura 52: S8.1.

Per fare ciò che viene richiesto, lo studente dunque dovrà:

- orientarsi nel testo originale, individuando le informazioni rilevanti per mettere a fuoco la situazione di partenza;
- materializzare tale situazione di partenza con una serie di atti grafici;
- individuare nel testo originale le informazioni relative agli elementi corrispondenti e alle loro relazioni;
- materializzare con degli atti grafici gli elementi mancanti, visualizzando relazioni e corrispondenze;
- interpretare gli output restituiti nel punto precedente, articolando in maniera significativa ciò che si ottiene nella schermata con quanto descritto nel testo originale in gestione;
- (una volta visualizzata la soluzione) confrontare la propria visualizzazione dinamica con quella, statica, presente nel testo di Castelnuovo.

Il Problema 8 prosegue con la coppia Q8.2+A8.2 in cui, facendo riferimento alla costruzione realizzata in A8.1, si chiede allo studente di esplorare possibili combinazioni di elementi propri e impropri (Figura 53).

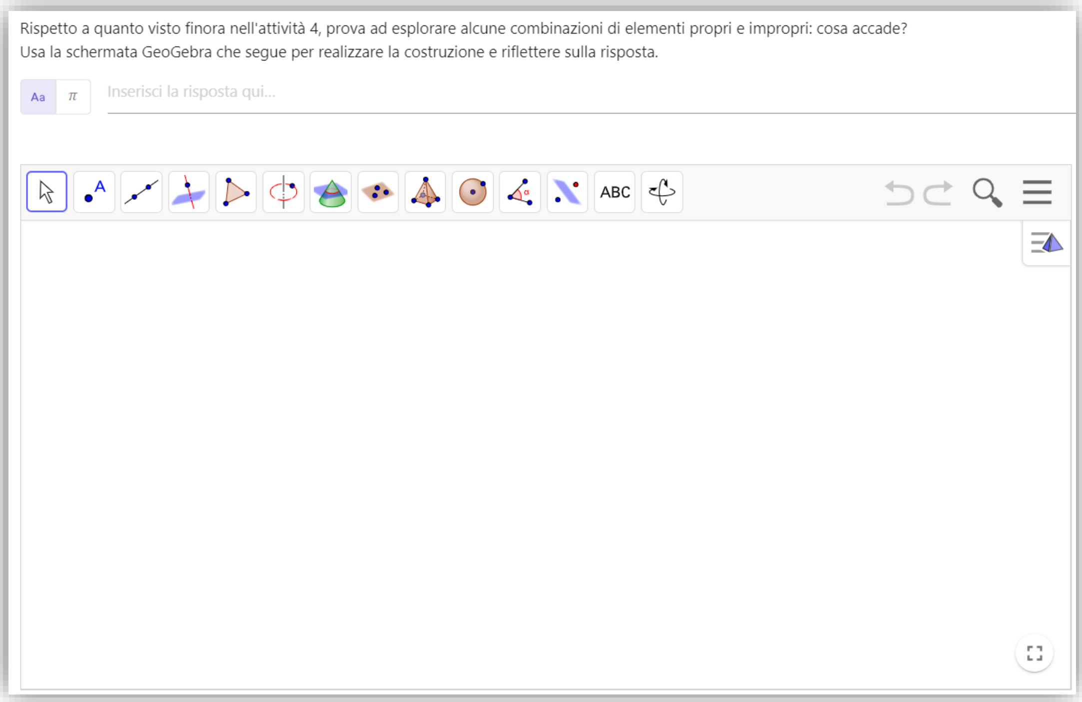


Figura 53: Q8.2+A8.2.

Per fare ciò che Q8.2+A8.2 richiede, lo studente dovrà:

- decidere quali elementi considerare impropri, definendo così la situazione da esaminare. Ad esempio, potrà esplorare il caso del centro di proiezione improprio e/o il caso in cui la figura F_0 possa essere costituita da punti o rette improprie;

- in base alla situazione in esame, ricollegare, articolare e connettere in maniera significativa il lavoro svolto in precedenza;
- materializzare la situazione con una serie di atti grafici;
- esplorare le relazioni tra gli elementi corrispondenti nella nuova situazione in cui una o più componenti della costruzione sono elementi all'infinito;
- fornire una risposta scritta alla domanda, ovvero produrre un testo matematico che descriva e generalizzi le conclusioni delle proprie esplorazioni.

Il Problema 8 si conclude con un ultimo estratto di testo originale diviso in due blocchi (Figura 54). Inizialmente viene introdotta una terminologia specifica per denominare le particolari proprietà degli elementi corrispondenti nella situazione descritta nel primo estratto di testo originale; successivamente viene presentato l'enunciato del lemma, che contestualizza tutte le riflessioni precedenti per il caso dei triangoli.

Terminologia

Nell'uno e nell'altro dei casi ora considerati ci si presentano due figure piane $(A, \dots, a, \dots)$, $(A', \dots, a', \dots)$ così riferite che ad ogni punto o retta dell'una corrisponde un punto od una retta dell'altra, in guisa che le rette congiungenti punti corrispondenti passano tutte per uno stesso punto, ed i punti di incontro di rette corrispondenti stanno tutti sopra una stessa retta. Due figure in tal relazione si dicono *omologiche* (o *prospettive*); il punto per cui passano tutte le congiungenti nominate è il *centro di omologia*, mentre la retta sopra cui si trovano tutte le intersezioni nominate è *l'asse di omologia*.
Riservandoci di studiare in seguito la relazione di omologia in generale, ci interessa ora il caso particolare che le due figure siano triangoli. Le considerazioni precedenti si riassumono allora nel seguente lemma:

Lemma

Due triangoli sono omologici, sia quando, giacendo in piani diversi, sono l'uno proiezione dell'altro, sia quando, giacendo in uno stesso piano, sono entrambi proiezioni (da centri diversi) di uno stesso triangolo situato in un altro piano.

Figura 54: Ultimo estratto di testo originale che chiude il Problema 8.

Il Problema 8 è l'ultimo tra quelli che si riferiscono alle prime due fasi del processo di GGBZ (Figura 22) ed è anche l'ultimo ad introdurre nuove informazioni geometriche (e, dunque, è l'ultimo che contiene nuovi estratti di testo originale).

4.10 Problema 9: Applet con fine comunicativo

Il Problema 9 ha una natura diversa da tutti quelli che lo precedono e, ricordiamo, fa riferimento all'ultima fase del processo di GGBZ (Figura 22). In particolare, qui viene richiesto allo studente di riprendere in mano un estratto di testo originale su cui ha già lavorato nelle prime due fasi della GGBZ e usarlo come base per creare una (o più) nuove risorse, avendo uno scopo comunicativo. La consegna dell'azione A9.1 viene proposta accompagnata da una premessa che esplicita il fine comunicativo del lavoro richiesto e presenta le già discusse in precedenza (Capitolo 1) linee guida metodologiche da seguire per raggiungerlo (Figura 55).

Premessa

Fino a questo momento avete realizzato delle applet che permettessero a voi di comprendere meglio il contenuto dei testi.
Adesso vi chiediamo di realizzare un'applet con testi e relative visualizzazioni che abbia l'**obiettivo di rendere i testi stessi più fruibili per un lettore esterno**.
Infatti, le applet GeoGebra (e in generale, tutte le risorse create all'interno della piattaforma di servizi www.geogebra.org) possono essere rese pubbliche (dunque, sono raggiungibili da chiunque).
Nell'applet che realizzerete:

- I **testi** dovranno riguardare le definizioni dei vari elementi impropri (cfr. paragrafo 3) e possono essere costruiti usando estratti di testo originale accompagnati da eventuali aggiunte che riterrete opportuno fare. Per comodità, il testo originale completo di tali paragrafi è riportato di seguito.
- Le **visualizzazioni** dovranno riguardare tutto ciò che riterrete utile e opportuno visualizzare per favorire la comprensione di chi accederà all'applet.
- Per la costruzione dell'applet, è necessario seguire un importante **accorgimento metodologico**: il testo dovrà essere segmentato e ciascuna porzione di esso andrà accompagnata con la relativa visualizzazione. Per fare questo, useremo le funzionalità **[Protocollo di costruzione]**, **[Barra di navigazione]** e **[Punti di interruzione]**. [Riferimenti per questo accorgimento metodologico: Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Su alcune situazioni marginali didatticamente significative riscontrate in fase di ricerca: esempi e commenti. *La matematica e la sua didattica*, *27*(1), 29-46; Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational psychologist*, *38*(1), 43-52.]

Quindi, in quest'ultima attività, vi viene richiesto di creare delle applet GeoGebra, realizzate avendo in mente un **fine comunicativo**.

Figura 55: A9.1 e la premessa. La parte evidenziata in giallo può cambiare perché A9.1 è contestualizzata rispetto al tema su cui si sceglie di lavorare.

A ciò segue l'intero blocco di testo originale su cui è richiesto di lavorare e viene indicata la procedura da seguire per la creazione di ciascun applet che lo studente riterrà necessario realizzare (Figura 56).

Procedura da seguire

- Aprire GeoGebra classic 3D online (https://www.geogebra.org/classic#3d);
- Nascondere assi, piano ed eventualmente anche la [Vista Algebra];
- Usare lo strumento [Testo] per inserire la parte verbale dell'applet. **IMPORTANTE**: il testo andrà segmentato e a ciascun segmento di testo scelto deve corrispondere una casella di testo dedicata.
- Realizzare tutte le costruzioni necessarie a visualizzare il contenuto del testo. **IMPORTANTE**: ogni segmento di testo dovrà essere accompagnato dalla sua visualizzazione.
- Visualizzare il [Protocollo di costruzione] e i [Punti di interruzione] e realizzare un'applet fruibile sincronizzando opportunamente testi a visualizzazioni.
- Al termine, impostare l'opzione [Mostra solo i punti di interruzione].
- Per vedere l'effetto ottenuto, scorrere la [Barra di navigazione].

Figura 56: Procedura da seguire per la realizzazione di ciascun applet.

Contestualmente, allo studente verranno presentati anche gli ambienti di creazione di *Attività GeoGebra* e, più in generale, di *Libri GeoGebra* in cui sarà possibile articolare e mettere insieme tutti gli applet realizzati in un'unica pagina web, eventualmente arricchendo il proprio lavoro anche con altre tipologie di elementi (testi, immagini statiche, video, file, …), che sarà poi possibile far diventare pubblicamente ricercabile.

Ad una prima analisi, dunque, lo studente per fare ciò che A9.1 richiede, dovrà avviare un'esperienza metacognitiva rispetto al proprio percorso di apprendimento. La metacognizione è un tema molto vasto che, per essere abbracciato in maniera completa e profonda, richiederebbe una trattazione ampia che ci porterebbe lontano dal focus specifico di questa tesi. Tuttavia, accogliamo la proposta di "parlare ancora e sempre di più di legami tra metacognizione e didattica" di D'Amore (2017, p. 15) e rispondiamo al suo invito ai didatti disciplinari di esplorare le potenzialità di questo legame entrando in dettagli delle applicazioni didattiche delle idee relative alla metacognizione. Il Problema 9 rappresenta un esempio concreto in tal senso e nel Capitolo 6 avremo modo di mettere in evidenza alcuni cruciali aspetti di queste potenzialità.

4.11 Nota: gestione dei prerequisiti tecnici per l'uso di GeoGebra

Naturalmente, l'intero percorso fino a qui presentato fa fortemente affidamento su una buona familiarizzazione con le funzionalità del software GeoGebra, non solo riguardo agli ambienti delle varie viste (ad esempio, la *Vista Grafici 3D* o la *Vista Algebra*) ma anche riguardo alla gestione dello strumento [Testo] e l'uso dell'ambiente [Protocollo di costruzione]. Per il lavoro presentato in questa tesi, è stato realizzato un percorso formativo ad hoc dedicato ai prerequisiti tecnici necessari a svolgere fluentemente l'attività di GGBZ qui presentata e analizzata. Tale percorso è disponibile in italiano al seguente link: https://www.geogebra.org/m/vt277r6e.

4.12 Commenti conclusivi e schema strutturale

In questo capitolo è stato presentato e descritto il progetto didattico ϕ associato all'attività di GGBZ di un estratto di testo matematico che analizzeremo nel Capitolo 6. Tale progetto si snoda in nove diversi problemi, ciascuno scandito da una sequenza di azioni e quesiti che, in alcuni casi, sono accompagnati da soluzioni. Il dettaglio di ciascuna componente del progetto è stato l'oggetto del presente capitolo: ogni singola parte è stata descritta, contestualizzata e commentata. Potremmo schematizzarne la struttura nel modo che segue:

- **Problemi**. Per assicurare l'*unità concettuale e contestuale* richiesta nella TO, la sequenza dei problemi si sviluppa attorno a un unico macro-tema che, in questo caso, è rappresentato dal Teorema di Desargues sui triangoli omologici; ogni problema riguarda un preciso nucleo tematico che rappresenta uno dei prerequisiti alla sua dimostrazione. Ogni problema si apre sempre con un estratto di testo originale che introduce il nucleo tematico in esame.
- **Azioni**. Le azioni, considerando sia quelle singole che quelle in coppia con un quesito, sono in tutto diciassette e si dividono in tre tipologie:
    - azioni in cui è richiesto di completare una costruzione - azioni di questo tipo sono presenti nei Problemi 1, 3, 4, 5 e 7 e sono in tutto nove;
    - azioni in cui è richiesto di realizzare una costruzione partendo da una schermata GeoGebra vuota - azioni di questo tipo sono presenti nei Problemi 2, 3, 4, 6 e 8 e sono in totale sette;
    - azioni in cui è richiesto di realizzare un applet con fine comunicativo - l'unica azione di questo tipo è quella nel Problema 9.

In generale, potremmo dire che le azioni delle prime due tipologie richiedono di ricostruire nell'ambiente GeoGebra 3D il significato grafico delle espressioni linguistiche presenti nel testo. Riprendendo il discorso fatto nella Sezione 2.2.2 sugli schemi immagine e le metafore concettuali presenti in Castelnuovo (1904), si possono considerare come azioni che, a partire da un'espressione linguistica nel dominio della geometria, offrono la possibilità di passare dall'astratto al concreto incoraggiano un "ritorno" all'esperienza sensomotoria. Le azioni della terza tipologia invece, incoraggiano metafore concettuali che proiettino di nuovo dal dominio dell'esperienza sensomotoria al dominio della geometria ma in una nuova situazione in cui entrambi risultano "ampliati" a fronte dell'esperienza fatta nei problemi precedenti con GeoGebra 3D.

- **Quesiti**. I quesiti, considerando sia quelli singoli che quelli in coppia con un'azione, sono in tutto quattordici e si dividono in tre tipologie:
    - quesiti in cui è richiesto di scrivere un testo che descriva una costruzione o una situazione - quesiti di questo tipo sono presenti nei Problemi 2, 4 e 5 e sono tre;
    - quesiti in cui è richiesto di esplorare situazioni particolari e di scrivere un testo con le proprie considerazioni - quesiti di questo tipo sono presenti nei Problemi 3, 4, 5, 6, 7 e 8 e sono in tutto undici.
- **Soluzioni**. Le soluzioni sono otto in totale e si dividono in tre tipologie:
    - la soluzione rimanda a una costruzione realizzata completamente con visibile il [Protocollo di costruzione]. Nel progetto qui descritto, l'unica soluzione di questo tipo è nel Problema 1;
    - la soluzione contiene un estratto di testo originale composto da sole componenti discorsive (verbali e simboliche). Soluzioni di questo tipo sono presenti nei Problemi 2 e 7 e sono in tutto sei;
    - la soluzione contiene un estratto di testo originale composta dalla sola componente iconica. Nel progetto qui descritto, l'unica soluzione di questo tipo è nel Problema 8.
- **Complessità concettuale**. Nel progetto qui descritto la complessità concettuale è definita e scandita da diverse componenti che potremmo riassumere nei seguenti punti:
    - gestione locale dell'impatto di proprietà definite in modo estremamente astratto e generalizzato (osservazione 1.1);
    - gestione degli elementi impropri e del relativo paradosso percettivo (osservazione 3.3);
    - gestione della transizione tra l'attenzione ai singoli enti all'attenzione a famiglie di enti;
    - gestione del testo matematico;

- gestione di una complessità grafico-geometrica delle situazioni affrontate sempre più elevata.

Tale schema strutturale, riletto alla luce dell'analisi dei dati, ci permetterà di mettere a fuoco delle linee guida metodologiche generali per la configurazione di un'attività di GGBZ e di rispondere così alla seconda domanda di ricerca.

Tabella 4 raccoglie il riepilogo schematico del percorso.

Pb. 1	A1.1	Completamento di una costruzione
	S1.1	Costruzione realizzata completamente con visibile il [Protocollo di costruzione]
Pb. 2	Q2.1 + A2.1	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo descrittivo
	S2.1	Componente discorsiva del testo originale
Pb. 3	A3.1	Completamento di una costruzione
	Q3.2 + A3.2	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
	Q3.3 + A3.3	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
Pb. 4	A4.1	Completamento di una costruzione
	Q4.2	Scrivere un testo descrittivo
	Q4.3 + A4.3	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
Pb. 5	Q5.1 + A5.1	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo descrittivo
	Q5.2	Scrivere un testo con le proprie considerazioni
Pb. 6	Q6.1 + A6.1	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
Pb. 7	Q7.1 + A7.1	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
	S7.1	Componente discorsiva del testo originale
	Q7.2 + A7.2	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
	S7.2	Componente discorsiva del testo originale
	Q7.3 + A7.3	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
	S7.3	Componente discorsiva del testo originale
	Q7.4 + A7.4	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
	S7.4	Componente discorsiva del testo originale
	Q7.5 + A7.5	Completamento di una costruzione + Scrivere un testo con le proprie considerazioni

	S7.5	Componente discorsiva del testo originale
Pb. 8	A8.1	Costruzione da schermata vuota
	S8.1	Componente iconica del testo originale
	Q8.2 + A8.2	Costruzione da schermata vuota + Scrivere un testo con le proprie considerazioni
Pb. 9	A9.1	Realizzare un applet con fine comunicativo

Tabella 4: Riepilogo di Problemi (Pb), Quesiti (Q) e Azioni (A).

5 – Metodologia

In questo capitolo si descrive in dettaglio la metodologia della ricerca seguita che, in coerenza con il quadro teorico della TO, fa riferimento a un paradigma di ricerca qualitativo e considera come unità di analisi l'attività, intesa come il processo che materializza il sapere in conoscenza ovvero qualcosa di intelligibile. Tale processo è visto nella TO come un complesso processo dinamico, una *forma di vita* situata nello spazio e nel tempo che i partecipanti sviluppano attraverso il loro *joint labour* (cfr. Capitolo 3). Un'attività è strutturata dal progetto didattico ϕ, che in questa tesi è quello descritto nel Capitolo 4, ma il suo decorso e svolgimento non è prevedibile perché non dipende solo dal percorso didattico proposto ma anche da altre variabili non determinabili a priori perché fortemente condizionate dai partecipanti, dalle dinamiche sociali che si instaurano, dal contesto, ecc. Nel seguito, verrà fornita una caratterizzazione dettagliata dei partecipanti all'attività di GGBZ dell'estratto di Castelnuovo (1904), della modalità di svolgimento dell'attività stessa e la relativa raccolta dati, della tipologia di dati raccolti e della loro gestione per l'analisi. Per ogni scelta verranno esplicitate le motivazioni a suo supporto. Prima di proseguire è utile ricordare che l'obiettivo di questa tesi è quello di comprendere il modo in cui l'attività di GGBZ di un testo contribuisca al processo di addomesticamento dell'occhio e, in particolare, si vuole fornire una risposta alle domande di ricerca espresse nella Sezione 3.5.

5.1 Partecipanti

Il progetto didattico ϕ descritto nel Capitolo 4 è la base per la componente sperimentale di questa tesi, ed è stato proposto a quattro coppie di partecipanti (che rispetto al percorso avranno dunque il ruolo di *studenti*). Si è proposto il percorso a quattro coppie di persone con diversi background matematici. Ciascuna coppia è formata da esperti di tematiche ritenute rilevanti per l'esplorazione e la caratterizzazione del modo in cui l'attività di GGBZ di un testo matematico contribuisce al processo di addomesticamento dell'occhio, nel particolare caso studio dei fondamenti di geometria proiettiva in Castelnuovo (1904). Per l'individuazione delle tematiche rilevanti per caratterizzare il processo di GGBZ abbiamo tenuto conto dei seguenti fattori:

- come già esplicitato nel Capitolo 2, la geometria proiettiva viene trattata esplicitamente solo nei Corsi di Laurea in Matematica ma comprende conoscenze che nel contesto scolastico italiano vengono incontrate molto prima.

- Il testo di Castelnuovo (1904) è stato centrale nella formazione di generazioni di matematici, che hanno contribuito alla nascita della geometria algebrica per come la conosciamo oggi (cfr. Capitolo 2). Tuttavia l'approccio moderno, di stampo fortemente algebrico, ha sostituito quello classico anche nei corsi di base proposti ai primi anni di università. I due approcci però, pur essendo molto diversi, trattano gli stessi oggetti matematici e quindi viene naturale chiedersi se e quale valore aggiunto potrebbe portare un approccio classico oggi.
- L'apprendimento della matematica è l'oggetto di studio della didattica della matematica e il punto di vista di chi si occupa di ricerca in questo ambito è prezioso per l'analisi di un'attività configurata da un percorso didattico, individuandone potenzialità e possibili criticità.
- Esaminare un processo che nella sua definizione fa esplicito riferimento ad una tecnologia digitale richiede un'attenzione specifica anche al modo in cui la tecnologia digitale si relaziona con l'attività in cui i partecipanti sono implicati.

Da tali riflessioni sono stati stabiliti i quattro ambiti di appartenenza in cui cercare persone disponibili a partecipare alla ricerca:

- iscritti alla Laurea Triennale in Matematica che avessero già sostenuto il primo esame di geometria;
- ricercatori in ambito geometrico;
- ricercatori in didattica della matematica;
- ricercatori in informatica e didattica dell'informatica.

Per la formazione delle coppie abbiamo individuato il seguente criterio: il contatto sarebbe stato avviato con una delle due persone, a cui poi veniva chiesto di coinvolgere un collega con cui ci fosse già abitudine al lavoro insieme. La scelta di coinvolgere coppie di partecipanti omogenee per ambito di appartenenza e già in confidenza tra loro è sostenuta da due motivazioni. La prima ha una fondazione teorica: nella TO la dimensione sociale è imprescindibile e il lavoro a coppie richiede (e, dunque, permette) un'interazione multimodale esplicita tra i partecipanti. La seconda motivazione ha fondazione "ecologica": coinvolgere solo due persone alla volta e già in confidenza professionale tra loro, ha permesso di contenere la complessità delle dinamiche relazionali, rendendo quindi più "puliti" gli osservabili relativi allo specifico oggetto di studio (che riguarda i processi di pensiero e percezione in geometria che entrano in gioco durante attività di GGBZ di un testo).

Le coppie che hanno partecipato alla sperimentazione sono costituite da:

- due studenti di Laurea Triennale in Matematica al terzo anno (LT1 e LT2). LT1 e LT2, nel corso della loro carriera universitaria, hanno affrontato l'esame di Geometria 1 in cui è presente una parte di geometria proiettiva, trattata con il moderno linguaggio dell'algebra lineare (il testo di riferimento è Sernesi, 2000). Il loro punto di vista è rilevante per due motivazioni. La prima riguarda il loro status di studenti universitari. La seconda riguarda la loro vicinanza temporale sia rispetto allo studio della geometria proiettiva per come è trattata ai primi di anni di università "oggi", sia a temi legati alla geometria proiettiva che si incontrano in livelli scolastici pre-universitari in discipline diverse dalla matematica. In sintesi, potremmo dire che la coppia LT1 e LT2 rappresenta gli esperti dello status di studente universitario in matematica oggi;

- due ricercatori in geometria algebrica (RGA1 e RGA2). Si tratta di ricercatori giovani: hanno entrambi conseguito il dottorato dopo il 2015. Questo significa che sono ricercatori di "ultima generazione" e hanno una formazione nell'ambito della geometria algebrica fortemente condizionata dagli sviluppi del linguaggio algebrico moderno. Il loro punto di vista è stato ritenuto rilevante per due motivazioni. La prima è che sono dei geometri algebrici professionisti e dunque hanno solide oggettivazioni precedenti rispetto ai fondamenti di geometria proiettiva trattati con il percorso proposto. D'altra parte, e questa è la seconda motivazione, le attività che hanno permesso lo sviluppo di tali oggettivazioni fanno riferimento a una fase storico culturale della geometria algebrica recente e molto diversa da quella in cui si colloca il testo di Castelnuovo. In sintesi, potremmo dire che la coppia RGA1 e RGA2 rappresenta gli esperti del contenuto geometrico trattato nel percorso;
- un ricercatore e uno studente di dottorato in didattica della matematica (DDM1 e DDM2). Hanno entrambi formazione universitaria in matematica e si occupano di ricerca in didattica della matematica. Il loro punto di vista è stato ritenuto rilevante per due motivazioni. La prima riguarda il fatto di avere una formazione universitaria in matematica. La seconda riguarda la loro formazione specifica di ricercatori in didattica della matematica. In sintesi, potremmo dire che la coppia DDM1 e DDM2 rappresenta laureati in matematica ed esperti nello studio dell'apprendimento della matematica;
- due ricercatori nel campo dell'informatica e della didattica dell'informatica (DDI1 e DDI2). Entrambi sono professori e ricercatori senior in informatica e si occupano anche di didattica dell'informatica e di ruolo delle tecnologie digitali nella didattica. Il loro punto di vista è stato ritenuto rilevante per due motivazioni. Hanno una formazione universitaria scientifica ma non in matematica pura e, quindi, non hanno alcuna conoscenza pregressa di livello universitario rispetto alla geometria proiettiva. D'altra parte, si tratta di ricercatori professionisti nell'ambito dell'informatica che, per questa ragione, hanno vissuto nel loro percorso formativo un particolare processo

di addomesticamento dell’occhio. Visto il ruolo della tecnologia digitale nel processo di GGBZ, il loro punto di vista è stato ritenuto una fonte importante di informazioni per caratterizzare il processo stesso. In sintesi, potremmo dire che la coppia DDI1 e DDI2 rappresenta il punto di vista di ricercatori in informatica esperti nello studio dell’apprendimento dell’informatica.

5.2 La sperimentazione

La sperimentazione si è svolta tra novembre 2022 e aprile 2023 e ciascuna delle quattro coppie ha seguito il proprio percorso in maniera indipendente dalle altre. Ciascun incontro ha avuto una durata compresa tra 1h e 30 min e 3 h e il numero totale di incontri effettuati dipende dalla coppia: RGA1 e RGA2 hanno svolto il proprio percorso in due incontri; DDI1 e DDI2 hanno svolto il proprio percorso in tre incontri; LT1 e LT2 e DDM1 e DDM2 hanno svolto il proprio percorso in quattro incontri. La tabella che segue presenta una visione sinottica dell’intera sperimentazione effettuata, esplicitando l’incontro in cui ciascuna delle coppie ha affrontato i vari problemi.

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th>Coppia Laurea Triennale (LT1 e LTA2)</th><th>Coppia Matematici Geometri Algebrici (RGA1 e RGA2)</th><th>Coppia Matematici Didatti della Matematica (DDM1 e DDM2)</th><th>Coppia Informatici Didatti dell’Informatica (DDI1 e DDI2)</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Pb. 1</td><td>A1.1</td><td rowspan="13">Primo incontro</td><td rowspan="23">Primo incontro</td><td rowspan="6">Primo incontro</td><td rowspan="9">Primo incontro</td></tr>
<tr><td>S1.1</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pb. 2</td><td>Q2.1 + A2.1</td></tr>
<tr><td>S2.1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pb. 3</td><td>A3.1</td></tr>
<tr><td>Q3.2 + A3.2</td></tr>
<tr><td>Q3.3 + A3.3</td><td rowspan="7">Secondo incontro</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Pb. 4</td><td>A4.1</td></tr>
<tr><td>Q4.2</td></tr>
<tr><td>Q4.3 + A4.3</td><td rowspan="12">Secondo incontro</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pb. 5</td><td>Q5.1 + A5.1</td></tr>
<tr><td>Q5.2</td></tr>
<tr><td>Pb. 6</td><td>Q6.1 + A6.1</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Pb. 7</td><td>Q7.1 + A7.1</td><td rowspan="10">Secondo incontro</td><td rowspan="10">Terzo incontro</td></tr>
<tr><td>S7.1</td></tr>
<tr><td>Q7.2 + A7.2</td></tr>
<tr><td>S7.2</td></tr>
<tr><td>Q7.3 + A7.3</td></tr>
<tr><td>S7.3</td></tr>
<tr><td>Q7.4 + A7.4</td></tr>
<tr><td>S7.4</td></tr>
<tr><td>Q7.5 + A7.5</td><td>x</td></tr>
<tr><td>S7.5</td><td>x</td></tr>
</table>

Pb. 8	A8.1	Terzo incontro			x
	S8.1				x
	Q8.2 + A8.2				x
Pb. 9	A9.1	Quarto incontro	Secondo incontro	Quarto incontro	Terzo incontro

Tabella 5: Visione globale della sperimentazione. Le x rosse si riferiscono al fatto che per la coppia DDI, avendo avuto modo di fare solo tre incontri, al termine del secondo incontro è stata fatta una selezione nei problemi da proporre.

Al percorso didattico sperimentale, organizzato come un *Libro GeoGebra* (cfr. Capitolo 4), è stata associata una classe virtuale *GeoGebra Classroom* per lo svolgimento della sperimentazione e ai partecipanti è stato dato accesso ad essa con il ruolo di studenti. La logistica di ogni incontro è schematizzata in Figura 57 ed era organizzata come segue: la coppia di partecipanti sedeva allo stesso tavolo e aveva a disposizione un unico PC[91] connesso a Internet, con già predisposto l'accesso da studente in *GeoGebra Classroom* per lo svolgimento dell'attività, un mouse, una copia stampata di tutto il percorso[92] e altri fogli bianchi per eventuali appunti o note personali. Negli incontri successivi al primo, venivano messi a disposizione anche i file e i materiali realizzati negli incontri precedenti.

In quasi tutti gli incontri, i partecipanti hanno lavorato insieme nella stessa stanza; fa eccezione solo il secondo incontro della coppia RGA1 e RGA2 perché uno dei due quel giorno era risultato positivo al Covid-19 e quindi si è collegato all'incontro in videochiamata con schermo condiviso tramite Google Meet[93].

---

[91] Il mio pc, sia per semplificare la gestione dei materiali che per rispettare le esigenze di privacy.
[92] Tale copia è stata ottenuta esportando l'intero Libro GeoGebra con l'attività sperimentale in formato pdf e poi stampandolo.
[93] https://support.google.com/meet/?hl=en#topic=14074839

Figura 57: schematizzazione della postazione di lavoro.

Completa il setting sperimentale la presenza di una telecamera esterna, montata su un treppiedi e puntata in modo da poter inquadrare la gestualità dei partecipanti, parte del tavolo e avere visibilità dello schermo. Figura 58 mostra un esempio di inquadratura.

Figura 58: Esempio di inquadratura per la telecamera esterna.

Ogni incontro si è aperto con una breve introduzione all'attività e si è chiuso con una breve intervista non strutturata. L'introduzione prevedeva la spiegazione del tipo di attività da svolgere, eventualmente accompagnata da un ripasso di questioni tecniche legate a specifiche funzionalità di GeoGebra. L'intervista non strutturata finale era contestualizzata rispetto a quanto avvenuto in quell'incontro e si basava sulle mie note di campo, in cui appuntavo le questioni da approfondire a caldo, prima di salutarci.

Durante ciascun incontro, anche io effettuavo l'accesso alla classe virtuale in *GeoGebra Classroom* con il ruolo di insegnante: in questo modo, avevo la possibilità di monitorare in maniera discreta ciò che i partecipanti stavano facendo nel proprio schermo (cfr. Appendice A). In generale, il mio ruolo in ciascuno degli incontri è stato principalmente quello di osservatore ma sono esplicitamente intervenuta durante l'attività nelle situazioni in cui ho ritenuto che il mio intervento avrebbe potuto essere funzionale o avrebbe potuto sbloccare impedimenti altrimenti non produttivi (ad esempio, si creavano intoppi tecnici legati all'uso del software, il mio intervento era esplicitamente richiesto da uno dei due partecipanti o era funzionale a sbloccare un impasse non costruttivo).

5.3 Dati raccolti e metodologia di analisi

Ogni incontro è stato videoregistrato da due fonti: la telecamera esterna e lo schermo del PC[94] usato dai partecipanti. I due video così ottenuti sono stati poi montati uno di fianco all'altro usando il software Microsoft Clipchamp[95]. Questa scelta di montaggio ha permesso, in fase di analisi, di avere maggiore controllo nel monitoraggio e nell'individuazione delle risorse semiotiche multimodali in gioco. Figura 59 mostra un frame del video ottenuto dopo il montaggio.

[94] Per la registrazione dello schermo ho usato diversi software: quello integrato nel sistema operativo Windows Game Bar - https://support.microsoft.com/it-it/windows/registrare-una-clip-di-gioco-nel-pc-con-game-bar-2f477001-54d4-1276-9144-b0416a307f3c; Screenpal nella versione a pagamento che non ha limiti di tempo nella registrazione - https://screenpal.com/; la funzione di registrazione riunione di Google Meet con lo schermo condiviso - https://support.google.com/meet/answer/9308681?hl=it.

[95] https://clipchamp.com/it/windows-video-editor/

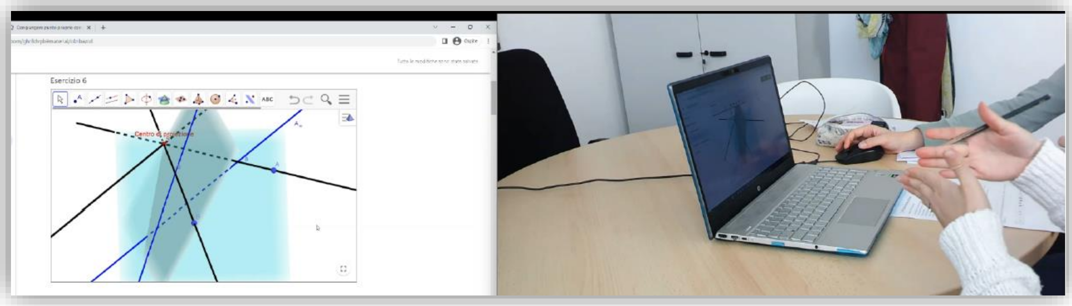


Figura 59: Schermo registrato e video esterno affiancati.

L’unità di analisi considerata è il segmento di attività di GGBZ e il dato principale della ricerca è rappresentato dalla videoregistrazione dell’incontro nella versione affiancata post-montaggio.

Per l’approccio metodologico all’analisi dei dati video, oltre che a Radford e Sabena (2015), è stato fatto riferimento anche al modello proposto da Powell e colleghi (2003) che riguarda l’analisi di dati video che hanno l’obiettivo di studiare lo sviluppo del pensiero in matematica. Il modello proposto dagli autori prevede una sequenza di sette diverse fasi, non lineari e in continua interazione tra loro:

1. Guardare con attenzione i dati video per familiarizzare con il loro contenuto.
2. Descrivere i dati video, prendendo degli appunti (anche brevi) che raccontino senza interpretare il contenuto del video in alcuni suoi segmenti significativi.
3. Identificare gli eventi critici, cioè particolari segmenti di attività registrata che sono contestualmente rilevanti rispetto alle domande di ricerca.
4. Trascrivere gli eventi critici individuati per permettere un’analisi fine del flusso dell’attività;
5. Codificare, su base teorica e con la guida delle domande di ricerca, il contenuto degli eventi critici individuati.
6. Costruire la trama che attribuisce senso ai dati.
7. Comporre la narrazione scritta che materializza l’analisi dei dati.

Oltre alle videoregistrazioni, in ciascun incontro, sono stati raccolti anche:

- tutti i protocolli di *GeoGebra Classroom*, sia i file in formato .ggb prodotti che le varie risposte scritte, che sono state salvate in formato .pdf;
- tutte le eventuali produzioni cartacee prodotte dai partecipanti (ad esempio disegni o appunti);
- le mie note di campo in cui, come anticipato, ho preso appunti delle questioni da approfondire nell’intervista non strutturata fatta al termine dell’incontro stesso.

Nel caso del lavoro qui presentato, considerando che il quadro teorico in cui si colloca la ricerca è la TO, e ricordando che in questa prospettiva lo studio del processo di apprendimento è reso possibile analizzando le interazioni sociali e le dinamiche d'uso dei mezzi semiotici di oggettivazione, i segmenti di attività registrata che costituiscono gli eventi critici sono, in accordo con Radford e Sabena (2015), i *nodi semiotici* (cfr. Capitolo 3). Per enucleare ciascun nodo semiotico, in riferimento alle fasi 5 e 6 del modello di Powell e colleghi (2003) e su ispirazione delle metodologie di analisi microetnografica (ad esempio Streeck & Mehus, 2005; Nemirovsky et al., 2012) – in cui l'analisi dell'attività viene condotta analizzando in modo fine ciò che i partecipanti dicono, alle loro espressioni e ai loro gesti, all'uso che fanno di segni e artefatti, … (Garzetti, 2023) – è stata seguita la seguente procedura:

- Identificazione dell'inizio di un evento critico attraverso il rilevamento di *indicatori della presenza di un conflitto*, di qualcosa che si oppone al ragionamento spontaneo dei partecipanti. Tali indicatori comprendono, ad esempio, la titubanza, il ritorno a porzioni di testo già lette, la presenza di silenzi di durata maggiore di tre secondi di fronte a una richiesta o a una esigenza. In particolare, il momento iniziale dell'evento critico viene fissato in corrispondenza del primo (rispetto al quesito/azione in esame) di tali indicatori individuato.
- Rilevamento di un *aumento nell'uso dei mezzi semiotici di oggettivazione impiegati*. In questa fase, le modalità in cui si dispiega l'attività forniscono informazioni su come il processo di oggettivazione in atto si sviluppa.
- Rilevamento di *indicatori di contrazione semiotica*, stabiliti sulla base dei mezzi semiotici di oggettivazione impiegati nella porzione di attività al punto precedente. Il momento finale dell'evento critico viene associato alle evidenze di contrazione semiotica, che nella TO sono considerate evidenza di apprendimento (cfr. Capitolo 3).

Il prossimo capitolo è dedicato all'analisi dei dati condotta alla luce della metodologia qui descritta e del quadro teorico della TO. Nell'analisi degli eventi critici ed episodi significativi, in molti casi, saranno presenti delle trascrizioni; ogni segmento trascritto presenta diversi elementi in cui sono state usate le seguenti convenzioni:

- Numero della linea di trascrizione (in grassetto all'inizio di un contributo all'interazione), che ha la sola finalità di facilitare l'orientamento nella lettura e il riferimento nelle analisi. Per ciascuna coppia la numerazione riparte da 1 quando si passa all'analisi dell'attività nel Problema 9.
- Etichetta che identifica la persona che sta intervenendo. Per i partecipanti le etichette sono quelle già note: LT1, LT2; RGA1, RGA2; DDM1, DDM2; DDI1, DDI2. I miei interventi sono indicati con la lettera A.

- Testo in colore carattere nero: sono le verbalizzazioni che comprendono parole dette o lette. Le parole troncate vengono indicate con un trattino (-), le parole pronunciate in maniera particolare (ad esempio allungando qualche vocale della parola), vengono scritte con una ripetizione delle vocali nel punto corrispondente.
- Testo in colore carattere blu racchiuso in doppie parentesi tonde ((..)): sono descrizioni discorsive di azioni (compresi i silenzi), gesti compiuti, con il dettaglio su segni e artefatti introdotti/usati.
- Parentesi quadre: se il contenuto è una verbalizzazione, indicano una sovrapposizione nell'interazione. Ad esempio, la seguente trascrizione *A: bla bla [B: ok] bla bla* indica che l'intervento di B si inserisce e si sovrappone ad A mentre sta parlando. Se il contenuto delle parentesi quadre sono tre puntini […] indicano l'omissione di parti non rilevanti o distrattive.
- Screenshot tratti dai video: nei casi più significativi, le descrizioni discorsive sono accompagnate da screenshot tratti dai video analizzati. Tali screenshot in alcuni casi sono accompagnati da frecce rosse che hanno la funzione di mostrare eventuali movimenti o di indirizzare l'attenzione su particolari elementi.
- Evidenziature gialle: le evidenziazioni gialle hanno la sola funzione di mettere in evidenza i passaggi particolarmente rilevanti per l'analisi.

6 - Analisi dati

Il presente capitolo è dedicato all'analisi dei dati raccolti durante la sperimentazione che, è utile ricordare, coinvolge quattro diverse coppie di partecipanti:

- LT1 e LT2, studenti di Laurea Triennale in Matematica al terzo anno;
- RGA1 e RGA2, due ricercatori in geometria algebrica;
- DDM1 e DDM2, che si occupano di ricerca in didattica della matematica;
- DDI1 e DDI2, due ricercatori in informatica e didattica dell'informatica.

A ciascuna coppia è stato chiesto di svolgere l'attività di GGBZ dell'estratto di testo di Castelnuovo (1904) che riguarda i prerequisiti al Teorema di Desargues sui triangoli omologici e che, sostanzialmente tratta i fondamenti di geometria proiettiva (elementi impropri e le operazioni di proiezione e sezione) con approccio sintetico. Seguendo l'approccio della TO rispetto al tema del task design (cfr. Capitolo 3, in particolare Sezione 3.4), l'attività di GGBZ proposta è stata strutturata secondo il progetto didattico sperimentale ϕ descritto nel Capitolo 4 il cui oggetto è quello di visualizzare dinamicamente e visualizzare il contenuto geometrico dell'estratto del testo di Castelnuovo (1904) proposto, con l'obiettivo di trasformarlo in un *Libro GeoGebra* da pubblicare online. Globalmente, il compito proposto nel percorso didattico ϕ si compone di nove problemi (cfr. Figura 21 del Capitolo 4). I primi 8 problemi si riferiscono alle prime due fasi del processo di GGBZ (*Leggi e analizza*, *Visualizza dinamicamente*) che riguardano l'operazionalizzazione del requisito R1 (relativo all'implementazione del processo e che richiede di spacchettare e materializzare la matematica incorporata nel testo matematico di partenza sfruttando le *affordances* della PSG); l'ultimo problema si riferisce alla terza fase del processo di GGBZ (*Dinamizza il testo*) che riguarda l'operazionalizzazione del requisito R2 (relativo alle caratteristiche del prodotto finale e che richiede di aumentare il potenziale comunicativo del testo originale di partenza) Per uno schema riepilogativo, si rimanda a Figura 22 del Capitolo 4. Ciascuno dei nove problemi, si snoda in una serie di azioni (A) e quesiti (Q) ai quali si aggiungono anche otto elementi di tipo soluzioni (S).

L'intero percorso didattico ϕ è organizzato come un *Libro GeoGebra* a cui, per l'effettiva realizzazione dell'attività, è stata associata una classe virtuale con *GeoGebra Classroom* a cui hanno avuto accesso con il ruolo di studenti le varie coppie di partecipanti (per i dettagli rimando al Capitolo 5 in particolare alla Sezione 5.2).

In linea generale, la tesi sostenuta in questo lavoro è che l'attività di GGBZ di un testo matematico è un'attività di insegnamento/apprendimento secondo la prospettiva teorica della TO. In particolare, l'analisi dei dati qui presentata, tenendo conto degli aspetti metodologici descritti nel Capitolo 5, vuole permettere di delineare una risposta alle tre domande di ricerca esplicitate nel Capitolo 3 (Sezione 3.5).

Globalmente, considerando la procedura di analisi descritta nella Sezione 5.3, nell'attività di ognuna delle coppie è possibile enucleare numerosi nodi semiotici. Inoltre, ciascuno ha fornito spunti di analisi e riflessione specifici rispetto al processo di GGBZ in sé. Per poter fornire una panoramica in entrambe le direzioni, il presente capitolo è organizzato così. Per le coppie LT1 – LT2 e RGA1 – RGA2 verrà presentata una panoramica rispetto allo svolgimento dell'attività del primo incontro e verrà descritto e analizzato in dettaglio almeno uno dei nodi semiotici individuato. Per le coppie DDM1 – DDM2 e DDI1 – DDI2, che rappresentano il punto di vista esperto rispetto alla didattica disciplinare, verrà dato maggiore spazio alle riflessioni di natura metacognitiva emerse sia durante l'attività che durante le interviste non strutturate condotte al termine del primo e dell'ultimo incontro. Per ciascuna coppia descriveremo anche altri segmenti di attività significativi, molti dei quali sono già stati anticipati nel Capitolo 4 e verranno ad esso ricollegati. Infine, per ciascuna coppia, verrà descritta e analizzata l'attività svolta nell'ambito di A9.1 del Problema 9[96].

Ricordiamo che come descritto nel Capitolo 5, i partecipanti siedono allo stesso tavolo e usano un unico PC (Figura 57). Oltre a PC e mouse, è a disposizione anche la versione stampata dell'attività che viene svolta in *GeoGebra Classroom*.

6.1 Coppia Laurea Triennale in Matematica (LT1 e LT2)

Il percorso di LT1 e LT2 si snoda nell'arco di quattro incontri; in ciascuna sessione di lavoro, il mouse viene tendenzialmente manovrato da LT1 mentre LT2 usa principalmente la tastiera e scrive degli appunti riepilogativi su un suo quaderno.

6.1.1 Alcuni passaggi del lavoro su Problema 1 e Problema 2

<u>Problema 1 - punti propri e impropri (cfr. Sezione 4.2)</u>

L'attività è qui messa in moto da A1.1 (Figura 24 nel Capitolo 4) e scorre in maniera fluida: LT1 e LT2 completano la costruzione proposta in pochi minuti, in modo diretto e veloce.

[96] Il testo originale proposto nel Problema 9 cambia a seconda della coppia sulla base dell'attività svolta nei problemi precedenti, si veda anche Sezione 4.10 e, in particolare, Figura 55.

Problema 2 - rette proprie e improprie (cfr. Sezione 4.3)

Tale problema, che si concretizza in Q2.1 + A2.1 (Figura 26 nel Capitolo 4), si rivela sin da subito sfidante principalmente per due ragioni:

- la porzione di testo originale che descrive il significato grafico di *congiungere un punto proprio con una retta impropria*[97] non è stata inserita nel testo originale di partenza (cfr. Figura 25 del Capitolo 4) come fatto nel Problema 1 ma è la soluzione S2.1 (Figura 27 del Capitolo 4) di Q2.1+A2.1;
- in A2.1 viene proposta una schermata GeoGebra vuota e quindi la costruzione, a differenza di quanto fatto in A1.1, è da realizzare completamente, senza avere a disposizione elementi iniziali.

L'agire di LT1 e LT2 è caratterizzato da silenzi e molteplici riletture e ritorni al testo che riguardano non solo il testo originale del Problema 2 (cfr. Figura 25) ma anche quello del Problema 1 (cfr. Figura 23). Dopo circa 7 minuti, in cui non è stato ancora costruito nulla nella schermata GeoGebra a disposizione, LT1 propone di ragionare in analogia con il caso precedente, facendo riferimento alla porzione di testo originale del Problema 1 che riguarda il *congiungere un punto proprio con un punto improprio*[98]*.* Tale intervento sblocca un nuovo modo di percepire la situazione proposta che porta LT1 e LT2 alla realizzazione della costruzione mostrata in Figura 60, validata dalla lettura del testo originale proposto nella soluzione S2.1 (Figura 27).

---

[97] *Congiungere un punto* (proprio) B *colla retta all'infinito* a_∞ *di un dato piano* α, vuol dire condurre per B il piano parallelo ad α; il problema ha sempre una soluzione come quello di congiungere, mediante un piano, il punto B con una retta propria a, che non passi per B.

[98] Riportato per intero in Figura 23 del Capitolo 4 ma, per comodità, riportiamo l'estratto in esame anche qui: "*Congiungere un punto proprio* B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione, come quello di congiungere B con un punto proprio".

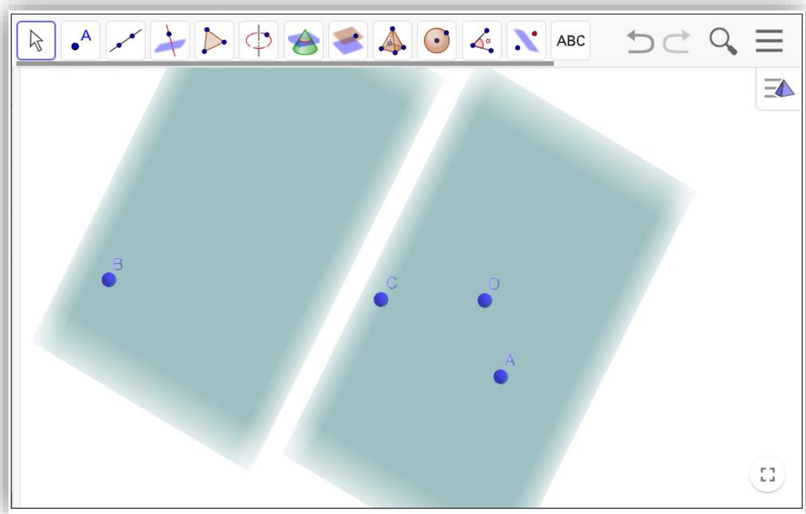


Figura 60: Screenshot della risoluzione di Q2.1+A2.1.

6.1.2 Problema 3: analisi approfondita di un nodo semiotico

Problema 3: proiettare da un punto una figura composta da punti e rette (cfr Sezione 4.4)

Dopo aver letto il testo originale relativo alla definizione dell'operazione di proiezione da un punto, LT1 e LT2 costruiscono nella schermata GeoGebra fornita tutte le varie proiezioni richieste in A3.1 (Figura 29). Poi, leggono la consegna di Q3.2+A3.2 (Figura 30) e, come prima cosa, costruiscono nella schermata GeoGebra fornita la situazione iniziale partendo da quella presente in A3.1. Quindi, dopo una prima riflessione sulla situazione iniziale, costruiscono i 5 elementi da proiettare, cioè 2 punti propri, un punto improprio e due rette proprie, arrivando alla visualizzazione di Figura 61:

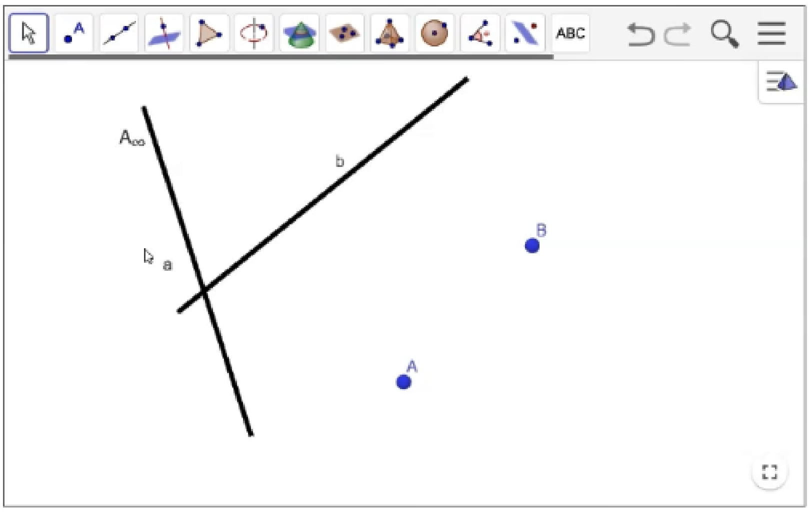


Figura 61: elementi da proiettare in A3.2 + Q3.2.

A questo punto, devono inserire il centro di proiezione che, stavolta, è un punto improprio:

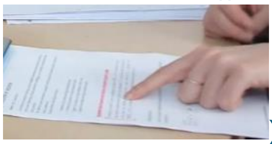
4 LT1: Ah..adesso dobbiamo prendere S che vogliamo un punto all'infinito cioè una retta praticamente ah questi prima ce li avevamo blu...così no? […]

Dalle parole di LT1 emerge un'identificazione tra un punto all'infinito e una retta. Nella schermata GeoGebra, dopo aver allineato i colori degli elementi da proiettare con quelli proposti in A3.1, LT1 ed LT2 inseriscono nella costruzione una nuova retta, la colorano di rosso e la etichettano con la lettera S. Dopo la costruzione della retta S, LT1 e LT2 si fermano e, prima di proseguire, rileggono in maniera silente il testo originale che segna l'inizio del Problema 3 (si veda Figura 28 del Capitolo 4). Questo ritorno a un testo già letto viene considerato un *indicatore di presenza di conflitto*, che segna dunque l'inizio dell'evento critico che esamineremo. Dopo la rilettura silente, è LT2 ad aprire la conversazione:

11 LT2: allora...se quello di prima era l'intersezione tra un punto e eh quello che è quindi S è il nostro punto e quello che è che sia un punto una rettaaa una retta all'infinito un punto all'infinito scusami ((scandisce con le mani le parole alternando l'indice che punta lo schermo e gesti a palmo aperto rivolto verso l'alto)) a questo punto mi vien da dire per quanto riguarda i punti ((gesto a palmo aperto rivolto di lato, come se spostasse qualcosa)) è è ((mani a paletta una di fronte all'altra)) un piano ((apre le mani rivolgendo il palmo verso l'alto)) che contiene ((chiude le dita lasciando solo i due indici)) la retta S ((apre le mani spostandole di nuovo lateralmente)) che in realtà è il punto improprio S e il punto che è o il punto A o il punto B ((sposta le mani aperte da un lato e l'altro scandendo le parole)) . Per quanto riguarda le rette è un po' un problema ((porta una mano sul mento)) ...perché ...seguendo questo ragionamento se le rette fossero sghembe sarebbe tutto $\mathbb{R}^3$.

12 LT1: eh infatti...cioè tu dici dovresti […] fare una dimensione in più e quindi ti verrebbe tutto lo spazio ((prima di parlare aveva una mano sul mento, poi la sposta verso lo schermo muovendola come a scandire le parole. Poi, la riporta al mento))

L'interpretazione di LT1 ed LT2 del testo riletto in maniera silente assume il ruolo di mezzo semiotico di oggettivazione e diventa parte della loro attività riflessiva mediata; assistiamo qui anche ad un primo aumento della gestualità. Da 11 è evidente che anche LT2 identifica gli oggetti punto improprio e retta e, a causa di questa identificazione, vive un conflitto nell'immaginare la gestione del caso in cui si debba proiettare una retta propria che ha una direzione diversa da quella indicata dal punto improprio. Infatti, in questo caso, trattandosi della proiezione di una retta da un punto, si dovrebbe ottenere un piano che contiene quel punto e quella retta. D'altra parte, il centro di proiezione è improprio e, se la retta da proiettare ha direzione diversa da esso, e se il punto improprio venisse identificato con una precisa retta, ci si potrebbe trovare di fronte al caso di avere due rette sghembe (che, per definizione, non possono essere complanari). La discussione prosegue ancora e, dopo un po', LT1 propone di nuovo di tornare a rileggere il testo ma stavolta lo fa a voce alta (14):

14 LT1: proviamo a partire da qua ((appoggia la mano nel foglio stampato con il testo originale con cui inizia il Problema 3)) dove ci dice....((inizia a leggere scandendo con il dito la lettura )) proiettare quello che è significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e le rette della figura. Quindi noi abbiamo S e prendiamo un punto cosa vuol dire congiungere S con un punto ((ha ripreso il mouse in mano e punta il cursore sul punto A nella schermata di GeoGebra))...vuol dire...fare la retta parallela mi viene da dire

15 LT2: mh si

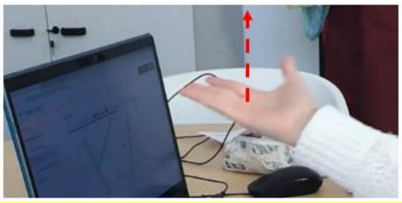
16 LT1: quindi avresti la retta parallela così ((scorre il cursore del mouse parallelamente alla retta S passando per B)) e la retta parallela cosà...però i punti non ci davano particolare fastidio [LT2: si] ora noi vogliamo le rette vuol dire ((ritorno al testo)) congiungere la retta no scusa sto leggendo la riga sbagliata condurre ((usa entrambe le mani per seguire il testo)) il piano che congiunge S alla retta

Nei passaggi 14 e 16, LT1 introduce nuovi segni nel suo agire: la verbalizzazione delle parole lette ritmata dal movimento del dito, la successiva riformulazione verbale accompagnata da gesti indicali sullo schermo e la verbalizzazione delle azioni che materializzano la proiezione di un punto proprio da un punto improprio (14: "[…] vuol dire fare la retta parallela" seguito da 16 in cui la verbalizzazione "la retta parallela così e la retta parallela cosà" viene accompagnata da un movimento coordinato della mano con cui LT1 traccia con il cursore del mouse tali rette parallele ad S). I nuovi segni portano a una nuova percezione della situazione che si attualizza nello scambio successivo:

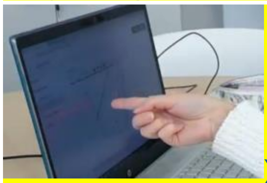
17 LT2: si ((silenzio)) quindi noi vorremmo prendere un piano che ha la stessa giacitura di S...però

18 LT1: eh ma S è una sola direzione ((punta l'indice verso l'alto )) non può fare la giacitura di un piano [LT2: ah già e vero]

19 LT1: vorrebbe dire...condurre il piano che congiunge...ecco ((prende il mouse in mano)) allora se con il punto noi facciamo la retta parallela..con una retta ((con il cursore indica prima il punto B e poi traccia con il cursore la retta parallela ad S passante per B; poi sposta il cursore sulla retta b))...eh no ma non possiamo fare il piano parallelo ((lascia il mouse)) il piano parallelo a chi?

20 LT2: cioè il il dubbio che mi sorge è che ((indica lo schermo con la mano)) se riuscissimo a fare un un piano che diciamo contiene il piano ((prima con la mano a paletta e poi con l’indice percorre S sullo schermo  )) cioè che è parallelo al piano contenente S ((muove la mano a paletta e poi indica nuovamente S)) l'intersezione ((indica la retta b)) diciamo ((mette la mano a paletta tenendo il palmo rivolto verso l’alto)) tra il pianooo spostato ((muove verso l’alto la mano , continuando a tenere il palmo rivolto verso l’alto)) verso l'altra retta è un punto cioè se non sono ((mano a paletta)) parallele le due rette tra di loro ((indica nello schermo prima la retta S e poi la retta b)) avremmo un piano ((mano di nuovo a paletta che si muove come ad “affettare” l’aria )) che interseca ((indica la retta b)) uno dei punti della retta

21 LT1: eh però ((al PC, muove il cursore del mouse lungo S)) tu dici il piano che contiene S ma ci sono infiniti piani che contengono S per cui come fai a sceglierlo... [LT2: mh] aspetta ((avvicina i fogli stampati relativi ai problemi già svolti ma non ne legge subito il contenuto))

22 LT2: cioè dovremmo sceglierlo in base a…no a dire ((indica lo schermo)) lo scegliamo prendendo un punto dalla retta ((avvicina la mano e indica la retta b )) mi sembra sciocco ((allontana la mano dallo schermo e la porta al mento))...perché ovviamente prendendo un qualsiasi punto della retta abbiamo un piano diverso

La nuova percezione attualizzata nel segmento di attività da 17 e 22 introduce una nuova complessità semiotica che permette di evidenziare la prima trasformazione nell’occhio con cui LT1 e LT2 percepiscono la situazione. LT1 in 17 si riferisce ad S in termini di *giacitura* e viene corretta da LT1 che introduce il termine *direzione*, accompagnato dal gesto in cui l’indice punta verso l’alto. Quindi, in questo segmento di attività, il punto improprio non è più identificato con una retta ma con una *direzione*. In 19, LT1 sembra agire in maniera analoga a quanto fatto in 16 ma la frase pronunciata presenta una differenza sostanziale. Infatti, in 16 il caso della proiezione dei punti viene liquidato velocemente (“però i punti non ci davano particolare fastidio ora noi vogliamo le rette”); in 19 le due situazioni vengono messe in relazione con il *se* (“se con il punto noi facciamo la retta parallela…con una retta […]”) e la coscienza di LT1 si sposta notando l’impossibilità di tracciare un piano con la sola condizione di parallelismo per una retta perché esso non è unico (“il piano parallelo a chi?”). Alla riga 20, LT2 con il suo intervento “se riuscissimo a fare un piano che […] è parallelo al piano contenente S l'intersezione […] tra il piano spostato verso l'altra retta è un punto”, coordinato con la gestualità della mano associata alle parole “piano” e “piano spostato”, materializza la possibilità di percepire la situazione in maniera dinamica. Per quanto l’incontro con l’oggetto culturale sia ancora parziale e in corso di sistemazione (ad esempio, si parla ancora di piano parallelo a una retta), il dinamismo introdotto si raffina e si precisa con il successivo intervento di LT2 nella riga 22. Infatti, rispondendo alla domanda di LT2 “ci sono infiniti piani che contengono S per cui come fai a sceglierlo” (21), LT1 propone di sceglierlo “prendendo un punto dalla retta” indicando sullo schermo la retta b. Siamo di fronte ad un punto di svolta che però, nel segmento di attività considerato, rimane ancora su un piano potenziale. È un sapere che si materializzerà in conoscenza nel segmento di attività che analizzeremo di seguito. Infatti, l’insicurezza espressa da LT2 nella seconda parte di 22 sia a livello verbale (“mi sembra sciocco”) che a livello gestuale (mano allontanata dallo schermo e portata al mento) è preludio di un conflitto che permetterà l’attivazione di un nuovo processo di oggettivazione. Nella prossima sequenza, le componenti e le connessioni che caratterizzano l’oggetto di sapere diventano ancora più chiare. All’intervento in 22, segue infatti un silenzio di 13 secondi, interrotto da LT1 che ripete nuovamente le parole che descrivono il tipo di azione da compiere per proiettare una retta da un punto. Stavolta però, non lo fa rileggendo il testo originale ma è una sua riformulazione verbale in cui fa riferimento solo a una parte della definizione, che è quella relativa allo specifico caso che stanno trattando:

23 LT1: noi dobbiamo congiungere noi dobbiamo condurre...il piano che congiunge S a quella retta ((parla scandendo le parole. Segue poi un altro lungo silenzio di circa 30 secondi, durante il quale si sente solo LT2 scrivere sul proprio quaderno)) perché questo non l’abbiam fatto prima ((prende in mano la pagina con il Problema 1 su punti propri e impropri))…prima abbiamo fatto ((con il dito scorre il testo e legge)) congiungere il punto proprio con un punto improprio [LT2: mh-mh] voleva dire far la retta parallela ((traccia sul foglio stampato la retta parallela che risulta dal congiungere il punto proprio al punto improprio dati in A1.1

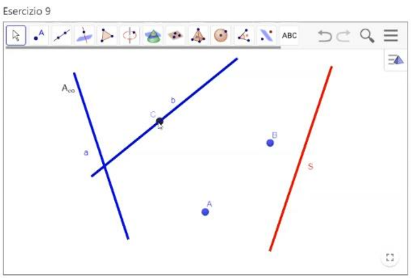
)) [LT2: si] poi abbiamo fatto ((cambia foglio stampato e prende quello relativo al Problema 2))....congiungere un punto proprio con una retta all'infinito ((legge seguendo sempre il testo con il dito))...che voleva dire...eh...cos'è che abbiamo fatto prima? [LT2: col piano] col piano ((“col piano” viene detto quasi simultaneamente)) parallelo..no..che contiene...parallelo al piano alpha e passante per B abbiamo fatto...[LT2: ok] no cos'è che abbiam... non me lo ricordo più sinceramente quello che abbiamo fatto...((con la rotella del mouse scorre la pagina visualizzata sullo schermo)) riusciamo a tornare indietro dici? proviamo a vedere perché non mi ricordo più

In 23, l'agire di LT1 introduce nuovi mezzi semiotici di oggettivazione. Infatti, ora assumono un ruolo cruciale anche le porzioni di testo originale relative ai problemi *precedenti*, l'interpretazione gestuale della soluzione di A1.1 (congiungere un punto proprio con un punto improprio come tracciamento di una particolare retta parallela), e le costruzioni in GeoGebra già realizzate in Q2.1+A2.1, richiamate dal riferimento al piano parallelo. LT1 e LT2 navigano quindi il *Libro GeoGebra* contenente il percorso didattico fino a tornare al loro svolgimento di Q2.1+A2.1 in cui si chiedeva di congiungere un punto proprio B con una retta impropria (dato uno dei piani che la individua). Da qui, LT1 recupera il fatto che in quel caso avevano costruito il piano per B parallelo al piano dato ma si rende conto che questa informazione non la aiuta a superare il conflitto che sta vivendo perché, in quel caso avevano un piano dato. L'attività prosegue nel modo che segue:

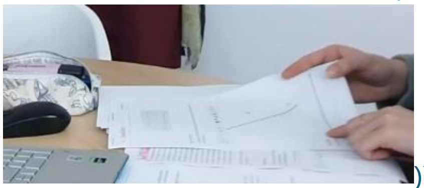
29 LT1: prima stavamo congiungendo un punto proprio con una retta all'infinito...

30 LT2: mentre adesso noi stiamo congiungendo...una

31 LT1: una retta propria e una retta e un punto all'infinito ((sembra correggersi))...ma se noi prendiamo un punto di una retta e lo dobbiamo congiungere al punto all'infinito come abbiam fatto qua […] quindi facciamo un punto […] ((costruisce un punto sulla retta propria b che si vuole proiettare e lo rinomina con la lettera C



)) diciamo di fissare questo punto [LT2: ok] non importa poi come lo abbiamo scelto…quindi abbiamo un punto proprio no qui non abbiamo una retta all'infinito abbiamo un punto all'infinito ((aveva tra le mani la pagina cartacea relativa al Problema 2: cambia pagina e prende quella relativa al Problema 1

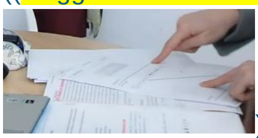
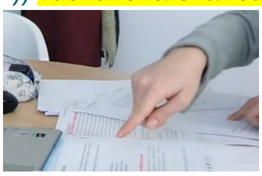


)) vuol dire che dobbiamo fare...abbiamo un punto all'infinito...scusa eh ((a PC, con la rotella del mouse scorre per visualizzare la consegna di A3.2+Q3.2 e poi torna sulla schermata GoGebra)) si abbiamo un punto improprio un punto all'infinito

32 LT2: sì un punto all'infinito

Tra 29 e 32 la tensione risulta evidente. Nelle linee 29, 30 e la prima parte di 31, la frase “prima stavamo congiungendo un punto proprio con una retta all’infinito mentre adesso noi stiamo congiungendo una retta propria e una retta un punto all’infinito” è la materializzazione di un sapere attraverso il *joint labour* di LT1 e LT2, che si completano a vicenda. Di particolare interesse è il fatto che, stavolta, la retta e il punto all’infinito non vengono più identificati ma l’espressione “una retta” viene immediatamente seguita da “un punto all’infinito” espressione che viene mantenuta anche nel seguito, senza più sentire il bisogno di identificarlo con *una retta precisa*. Questa trasformazione testimonia un nuovo stadio di addomesticamento dell’occhio che permette una nuova percezione della situazione, che si materializza attraverso le parole e le azioni nella schermata GeoGebra di LT1 in 31: “ma se noi prendiamo un punto di una retta e lo dobbiamo congiungere al punto all'infinito come abbiam fatto qua (in riferimento al Problema 1) […] quindi facciamo un punto diciamo di fissare questo punto (in riferimento al punto C sulla retta *b* appena costruito)”. Nella seconda parte di 31 e in 32, l’attività viene messa in movimento attraverso una ripetuta verbalizzazione del problema che si trovano a dover risolvere, associata prima alla pagina con il Problema 2 (“no qui non abbiamo una retta all’infinito”), poi alla pagina contenente il Problema 1 (“abbiamo un punto all’infinito”) e infine alla consegna di A3.2+Q3.2 (“si abbiamo un punto improprio un punto all’infinito” – “sì un punto all’infinito”).

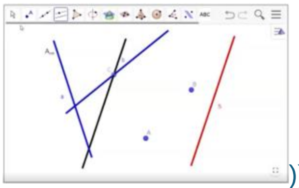
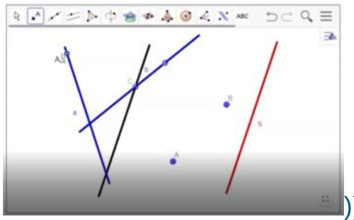
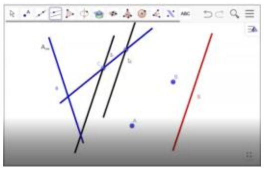
Da questo momento dell’attività, l’incontro con il sapere storico-culturale relativo all’operazione di proiezione da un punto improprio inizia ad avere pienamente luogo:

33 LT1: però qui abbiamo il primo esercizio [LT2: si] ((l torna di nuovo al testo originale con cui inizia il Problema 1)) congiungere un punto proprio con un punto all'infinito ((rilegge nuovamente mentre scandisce la lettura battendo l’indice sul foglio )) vuol dire fare la retta parallela ((sposta la mano indicando in aria alla sua sinistra . Poi, riprende il mouse in mano))

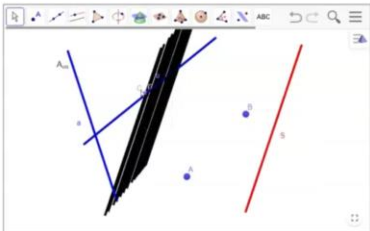
34 LT2: ok

35 LT1: …quindi se io scelgo un altro...e quindi viene fuori..((nella schermata GeoGebra inizia a costruire la retta parallela a S che passa per C, punto della retta b da proiettare))

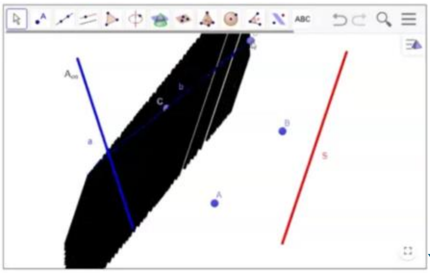
36 LT2: viene fuori una una un'altra retta praticamente

37 LT1: viene fuori...((costruisce la retta nera )) sì un fascio di rette parallele perché se io adesso prendo un altro punto ((costruisce un nuovo punto che chiama D sulla retta b )) e....verrebbe fuori così ((costruisce la retta parallela ad S passante per il nuovo punto )) [LT2: ok]

38 LT2: quindi se prendo il mio C e faccio

39 LT1: aspetta perché faccio la magia ((e attiva il comando mostra traccia sulla retta parallela appena costruita e inizia a trascinare il punto D lungo la retta b))...mostra traccia.. 

40 LT2: ok

41 LT1: e faccio così ((continua a trascinare D su b lasciando la traccia sulla retta attiva )) eh si mi viene fuori...

42 LT2: e otteniamo quindi [LT1: un fascio di rette ((continuando a trascinare il punto lungo la retta))]

43 LT2: si

44 LT1: un fascio improprio di rette ...[…]

Ancora una volta, LT1 ricorre alla rilettura del testo originale del Problema 1 relativo al congiungere un punto proprio con un punto all'infinito (cfr. Figura 23 del Capitolo 4). Ricollegandoci all'inquadramento degli aspetti linguistici e metaforici del testo di Castelnuovo proposto nella Sezione 2.2, è come se questa porzione di testo fosse sia il cardine attorno al quale si sviluppa tutta la complessa rete di risorse semiotiche di diverso tipo (gesti, dispositivi linguistici, segni, artefatti,…) che attualizzano il legame tra il linguaggio usato e l'esperienza sensomotoria e materializzano il sapere in conoscenza, sia ciò che permette a LT1 e LT2 di avere la possibilità di spostare l'attenzione verso una percezione della situazione sempre più teorica. Ciò che accade tra 33 e 44 è cruciale e rappresenta la condensazione di tutto ciò che è avvenuto in tutti i segmenti di attività precedenti. LT1 è cosciente di poter scegliere un punto su b per congiungerlo con il punto improprio centro di proiezione (33); questo oggetto di coscienza permette a LT1 di percepire la retta *b* in un nuovo modo: come *l'insieme dei suoi punti*. Tale modo di percepire b permette a LT1 e LT2 di notare la possibilità di poter applicare lo stesso procedimento anche ad *un altro* punto di b (35: LT1:…quindi se io scelgo un altro...e quindi viene fuori..; 36: LT2: un'altra retta) e a *qualsiasi* altro punto (in 37 LT1 specifica che "viene fuori un fascio di rette parallele"). Attraverso l'interazione di LT1 con le *affordances* di GeoGebra descritta tra 37 e 44, il processo di addomesticamento dell'occhio si completa e il sapere culturale che fino a quel momento era ancora solo possibilità, si sviluppa in una conoscenza sensibile, materializzata dal trascinamento del punto D con la traccia attiva[99].

Nella parte di attività che segue, LT1 ed LT2 modificano la modalità di visualizzazione della costruzione in GeoGebra al fine di renderla più chiara e, a un certo punto, LT2 esprime il bisogno di ricapitolare, anche in vista della necessità di produrre una risposta scritta. Quando passano al riepilogare ciò che accade nel caso di una retta propria proiettata da un punto improprio:

65 LT2: ehm invece per quanto riguarda le rette ((usa diversi gesti per scandire le parole)) abbiamo un fascio di rette ((traccia una retta in aria con il mignolo))

66 LT1: ok

[…]

68 LT1: quindi congiungere una retta propria con un punto all'infinito ci dà un fascio improprio di rette...però vedi non è che prendi...ah si...quindi...però non ti dà tutte le rette dello spazio che sono parallele a queste qua ti da quelle che intersecano questa retta altrimenti avresti molte più rette

69 LT2: fascio improprio di rette che intersecano la retta ((scrive sul suo blocco)).

[99] Al seguente link https://drive.google.com/file/d/1aU_DH7HUtqwMfIyCvbGytxJtC9Jr2W_i/view è disponibile un video che mostra ciò che viene visualizzato sullo schermo tra le righe 37–47 dell'estratto.

Le righe 68 e 69 testimoniano una brusca rifinitura nelle risorse semiotiche in uso per descrivere cosa accade all'operazione di proiezione di una retta propria quando si considera il centro di proiezione improprio. Siamo di fronte a una contrazione semiotica, evidenza di apprendimento, che segna la fine dell'evento critico in analisi.

LT1 e LT2 procedono con Q3.2+A3.2 affrontando il caso della proiezione da un punto improprio S del punto improprio A_∞(che è il punto improprio della retta a): anche qui, è possibile individuare un segmento di attività in cui inizialmente ipotizzano una soluzione simile al caso precedente (fascio improprio di rette e un piano) ma poi, attraverso un lungo processo di oggettivazione, in cui entrano anche in gioco in modo esplicito le loro conoscenze pregresse di geometria proiettiva acquisite all'università, concordano sul fascio di piani improprio. Nel segmento di attività emergono due momenti che hanno un ruolo cruciale nel processo di oggettivazione: il momento in cui, dopo aver ipotizzato che la proiezione di un punto improprio da un punto improprio sarebbe stata un piano, seguito dalla decisione di costruire tale piano nella schermata GeoGebra fornita, e il momento in cui scrivono la loro risposta. In particolare, è proprio la difficoltà che LT1 e LT2 incontrano in quest'ultimo punto a permettere un ritorno alla costruzione realizzata attivando un nuovo processo di addomesticamento dell'occhio, che porterà LT1 e LT2 ad ipotizzare che la proiezione in questo caso risulti in un fascio improprio di piani.

Al termine dello svolgimento di Q3.2+A3.2, la risposta finale scritta da LT1 e LT2 è:

> "Congiungere S con un punto proprio dà retta parallela alla direzione di S e passante per il punto. Congiungere S con una retta propria dà il fascio improprio di rette con direzione di S che intersecano i punti della retta data. Congiungere S con un punto improprio dà il fascio improprio di piani con giacitura S e l'altro punto improprio"

6.1.3 Alcuni passaggi del lavoro dal Problema 4 al Problema 6

Problema 4 - proiettare da una retta una figura composta da punti (cfr. Sezione 4.5)

Il lavoro in tutti i quesiti e le azioni di questo problema scorre in maniera fluida e le risposte inserite da LT1 e LT2 sono mostrate in Figura 62.

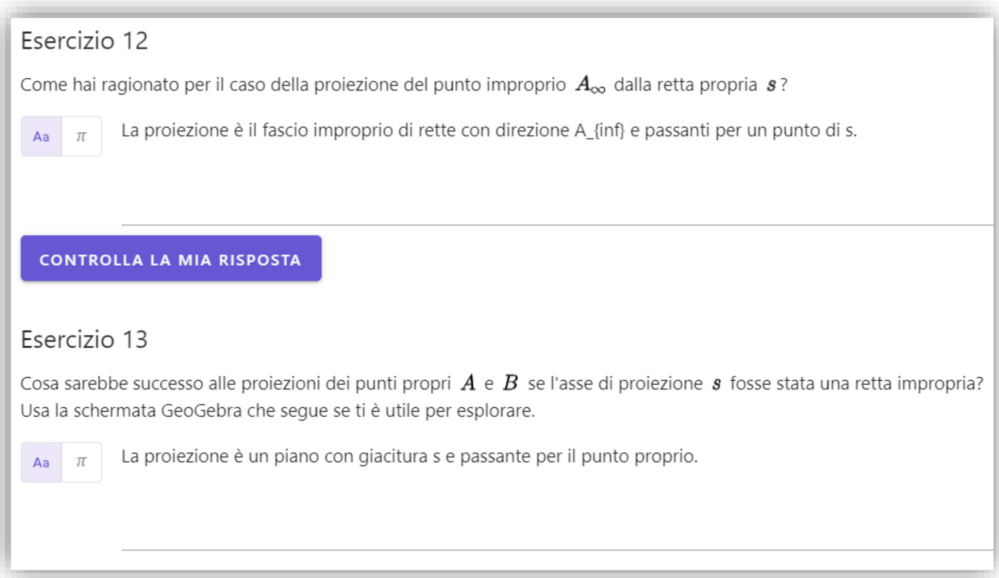
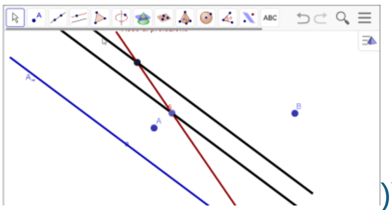
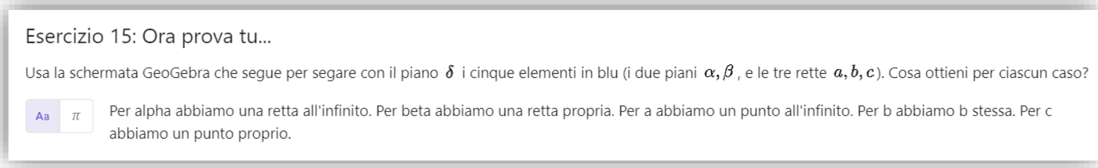


Figura 62: Screenshot delle risposte a Q4.2 e Q4.3.

Nel caso di Q4.2 (si veda Figura 35 del Capitolo 4), la risposta viene fornita in termini di fascio di rette e non di piano perché il modo in cui percepiscono la situazione è ben spiegata dalla seguente espressione di LT1: "secondo me l'idea è che tu puoi camminare sulla retta…cioè se tu ti metti qua allora devi guardare…cioè se tu ti metti qua ((clicca il punto in nero dell'asse s )) in questo punto devi guardare lungo questa retta ((passa il cursore del mouse lungo la retta che hanno costruito come parallela alla retta che rappresenta il punto improprio e passante per il punto selezionato di s)) per avere questa direzione […]"

Problema 5 – segare con un piano una figura composta da piani e rette (cfr. Sezione 4.6)

Questo problema viene percepito sin da subito come più semplice dei precedenti: LT1 afferma di sentire più sicurezza nell'affrontare questa nuova operazione rispetto a quella di proiezione e LT2, dopo aver letto osservato le situazioni proposte in Q5.1+A5.1 (cfr Figura 38 del Capitolo 4) commenta: "in questo caso però sono tutte cose proprie cioè sono tutte cose che esistono nel nel..((apre le mani e le appoggia al tavolo ")) . Tra i casi proposti viene anche richiesto di sezionare un piano parallelo al piano di sezione ma la situazione viene gestita subito in maniera fluida da LT1 e LT2. La risposta inserita in Q5.1+A5.1 è mostrata in Figura 63:


Esercizio 15: Ora prova tu...

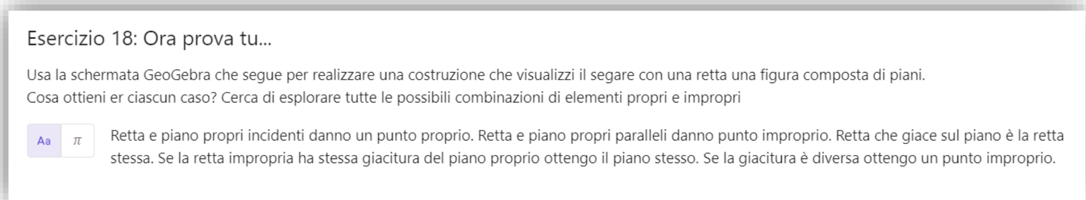
Usa la schermata GeoGebra che segue per segare con il piano δ i cinque elementi in blu (i due piani α, β , e le tre rette a, b, c). Cosa ottieni per ciascun caso?

Aa π Per alpha abbiamo una retta all'infinito. Per beta abbiamo una retta propria. Per a abbiamo un punto all'infinito. Per b abbiamo b stessa. Per c abbiamo un punto proprio.

Figura 63: Screenshot della risposta a Q5.1 + A5.1.

<u>Problema 6 – segare con una retta s una figura composta di piani (cfr. Sezione 4.7)</u>

Anche questo problema, composto da Q6.1+A6.1 (cfr. Figura 41 del Capitolo 4), riguarda l'operazione di sezione e, di nuovo, LT1 e LT2 si mostrano sicure nello svolgimento. Individuano da subito vari casi da considerare e li esplorano, anche realizzando delle costruzioni nella schermata GeoGebra a disposizione. Figura 64 mostra la risposta fornita:


Esercizio 18: Ora prova tu...

Usa la schermata GeoGebra che segue per realizzare una costruzione che visualizzi il segare con una retta una figura composta di piani.
Cosa ottieni er ciascun caso? Cerca di esplorare tutte le possibili combinazioni di elementi propri e impropri

Aa π Retta e piano propri incidenti danno un punto proprio. Retta e piano propri paralleli danno punto improprio. Retta che giace sul piano è la retta stessa. Se la retta impropria ha stessa giacitura del piano proprio ottengo il piano stesso. Se la giacitura è diversa ottengo un punto improprio.

Figura 64: Screenshot della risposta a Q6.1+A6.1.

Con il Problema 6 si conclude il primo incontro e, durante l'intervista condotta al termine, LT1 ha dato la seguente spiegazione alla maggiore tranquillità percepita nell'affrontare i problemi relativi all'operazione di sezione:

> LT1: Io mi sono sentita molto tranquilla perché…si trattava di fare intersezioni e le cose da intersecare c'erano già un po' come se io già le vedessi cioè vedessi o immaginassi e comunque erano lì eh magari a parte il caso all'infinito che però insomma ecco non è che si vedano e invece proiettare una cosa vuol dire che devo capire che cosa poi vedrò devo mettermi nel punto e vedere che cosa si..cioè cercare di capire di immaginare che cosa si vede ehm non è lì la devo più immaginare.

Queste parole mettono nuovamente in evidenza la crucialità dell'attività svolta da LT1 e LT2 nell'ambito del Problema 3 in cui, attraverso il loro *joint labour*, hanno materializzato e reso sensibile il sapere, la loro immaginazione e il loro pensiero.

6.1.4 Parte conclusiva dell'attività: Problema 9

A LT1 ed LT2 viene proposto di lavorare sulla dinamizzazione del testo originale relativo alle operazioni di proiezione e sezione (che in Castelnuovo, 1904, corrispondono al Paragrafo 9 e Paragrafo 11 e che nella prima parte dell'attività sono stati segmentati e distribuiti nei Problemi 3, 4, 5, 6 e 7). L'effettiva realizzazione dell'applet avviene nel quarto incontro ma durante la parte finale del terzo incontro, LT1 e LT2 progettano come avrebbero voluto far comportare l'applet finale. Tale progettazione, che ha portato LT1 ed LT2 a ripercorrere il loro intero percorso, si è conclusa con lo schema in Figura 65:

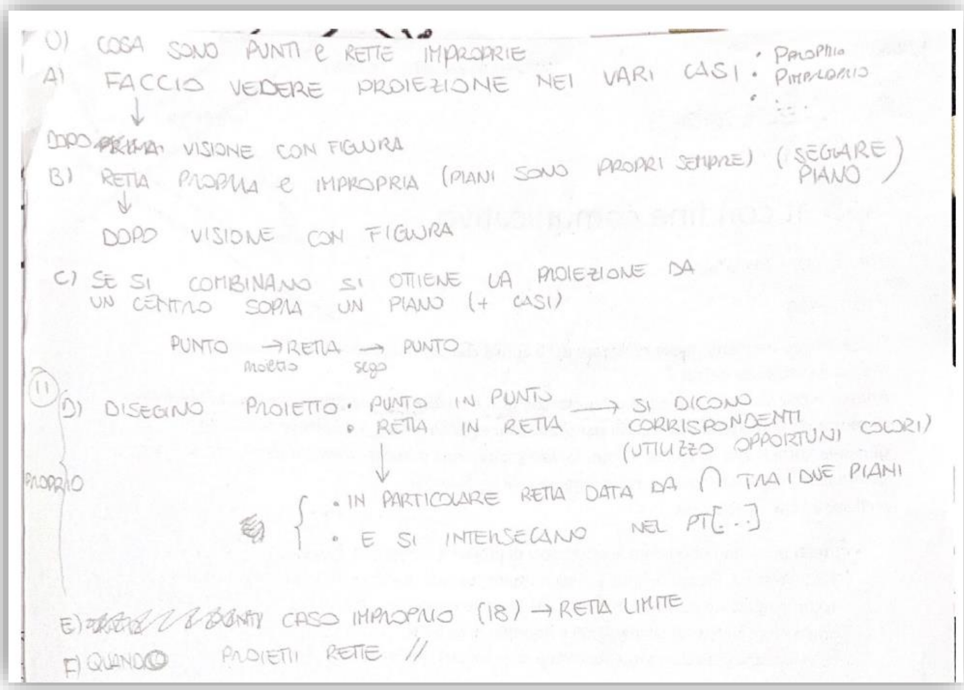
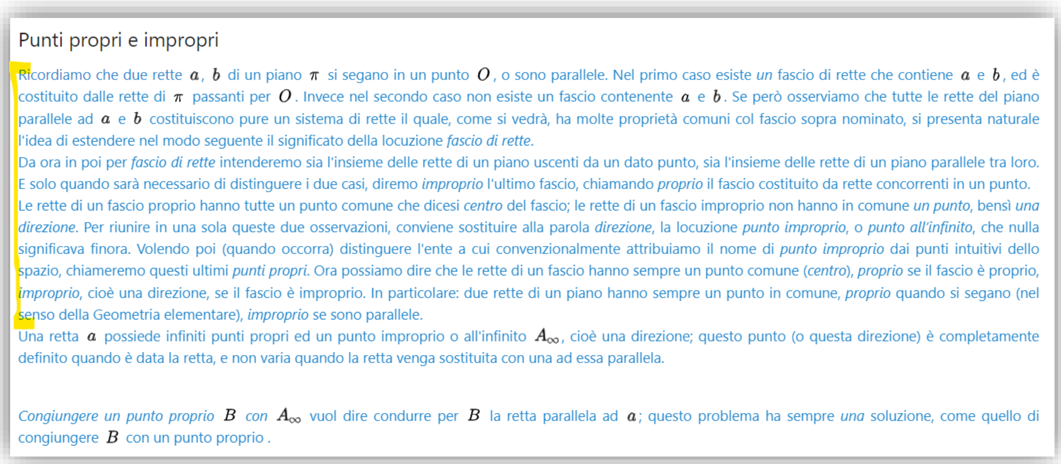


Figura 65: progettazione applet al termine del terzo incontro di sperimentazione.

All'inizio del quarto incontro, LT1 e LT2 ripercorrono la progettazione fatta e si confrontano su come gestire l'inserimento dei prerequisiti tratti da porzioni di testo precedenti, secondo loro, indispensabili. Decidono inizialmente di focalizzarsi sulla prima parte del testo del Problema 1 evidenziata in Figura 66 di cui non avevano realizzato delle visualizzazioni durante la prima parte dell'attività:



Punti propri e impropri

Ricordiamo che due rette a, b di un piano π si segano in un punto O, o sono parallele. Nel primo caso esiste *un* fascio di rette che contiene a e b, ed è costituito dalle rette di π passanti per O. Invece nel secondo caso non esiste un fascio contenente a e b. Se però osserviamo che tutte le rette del piano parallele ad a e b costituiscono pure un sistema di rette il quale, come si vedrà, ha molte proprietà comuni col fascio sopra nominato, si presenta naturale l'idea di estendere nel modo seguente il significato della locuzione *fascio di rette*.
Da ora in poi per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un dato punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro.
E solo quando sarà necessario di distinguere i due casi, diremo *improprio* l'ultimo fascio, chiamando *proprio* il fascio costituito da rette concorrenti in un punto.
Le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto comune che dicesi *centro* del fascio; le rette di un fascio improprio non hanno in comune *un punto*, bensì *una direzione*. Per riunire in una sola queste due osservazioni, conviene sostituire alla parola *direzione*, la locuzione *punto improprio*, o *punto all'infinito*, che nulla significava finora. Volendo poi (quando occorra) distinguere l'ente a cui convenzionalmente attribuiamo il nome di *punto improprio* dai punti intuitivi dello spazio, chiameremo questi ultimi *punti propri*. Ora possiamo dire che le rette di un fascio hanno sempre un punto comune (*centro*), *proprio* se il fascio è proprio, *improprio*, cioè una direzione, se il fascio è improprio. In particolare: due rette di un piano hanno sempre un punto in comune, *proprio* quando si segano (nel senso della Geometria elementare), *improprio* se sono parallele.
Una retta a possiede infiniti punti propri ed un punto improprio o all'infinito A_∞, cioè una direzione; questo punto (o questa direzione) è completamente definito quando è data la retta, e non varia quando la retta venga sostituita con una ad essa parallela.

Congiungere un punto proprio B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione, come quello di congiungere B con un punto proprio .

Figura 66: il testo evidenziato è quello su cui LT1 e LT2 decidono di focalizzarsi.

LT2 prende i fogli stampati in mano e rilegge il testo in maniera silente per 8 secondi per poi dichiarare:

2 LT2: si perché qua definisce il punto come intersezione di ((silenzio)) allora sicuramente questo è necessario ((indica nel foglio stampato la frase "Ora possiamo dire che le rette di un fascio…")) e soprattutto calcare sulla questione ((con la matita, sottolinea nel foglio stampato la parola direzione)) di ehm punto improprio è una direzione perché ci ho messo un pochino a macinare 'sta cosa io

3 LT1: o sennò possiamo fare magari dire che cosa è un fascio senza insisterci sopra così tanto nel senso due rette incidenti si intersecano in un punto ((LT2 scrive)) quindi se prendiamo tutte le rette passanti cioè tutte no ma ne disegniamo parecchie che passano per quel punto lì che stanno su…si sullo stesso piano ehm quelle si dicono un fascio proprio e il punto in cui si intersecano si dice punto proprio [LT2: ok] Se invece due rette sono parallele non si intersecano in un punto proprio possiamo prendere tante altre rette parallele ((con la mano traccia in aria diversi trattini)) eee e dire che queste queste hanno in comune ((indica la pagina stampata)) una direzione ((inizia a leggere il testo)) non hanno in comune un punto ((scandisce le parole con il dito sul foglio, poi smette di leggere)) quindi possiamo dire questa cosa tipo se prendiamo tante rette parallele ((traccia delle rette parallele in aria )) otteniamo un fascio improprio e qui ((torna ad indicare il foglio stampato)) possiamo citare ((legge)) […] le rette di un fascio improprio non hanno in comune un punto bensì una direzione eee per come dire unificare le due osservazioni come ti dice qua ((indica nuovamente la pagina e legge)) riunire in una sola queste due osservazioni quindi ci vuole…ehm usare ((fa dei gesti con le mani a paletta)) usare una certa terminologia che rispecchia la stessa terminologia che c'è da un punto di vista geometrico [LT2: mh-mh] conviene chiamare la direzione punto improprio.

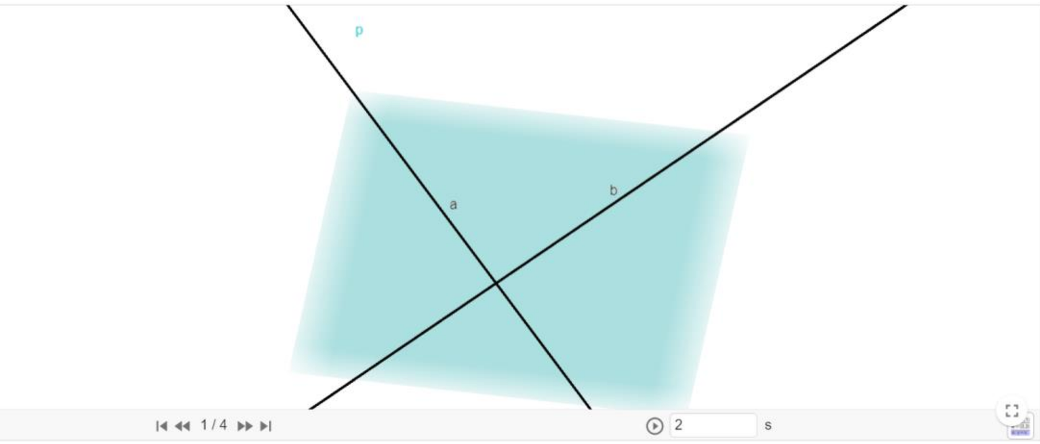
4 LT2: ok ((scrive dei commenti sul bordo della pagina stampata contenente il testo originale in cui segna anche delle tacche per segmentare porzioni di testo)) […]

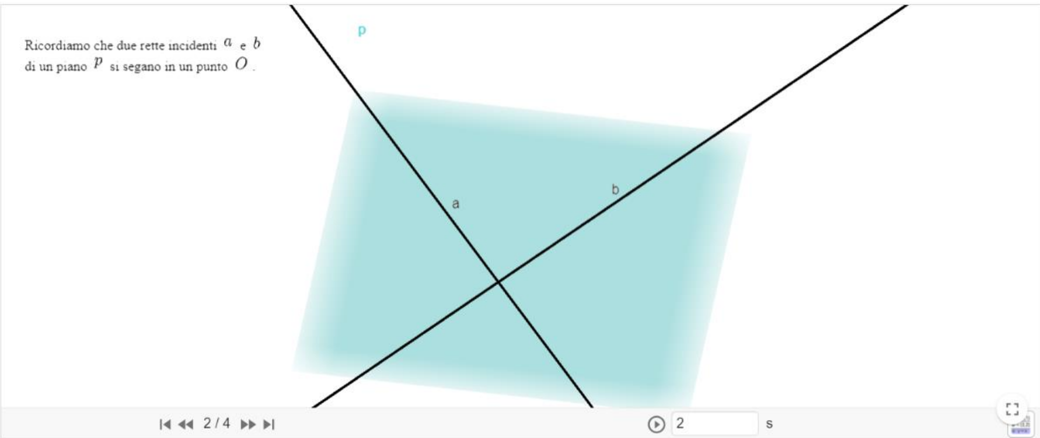
LT1 e LT2 stabiliscono quindi di iniziare il loro prodotto finale inserendo queste informazioni per introdurre i punti impropri, con opportune visualizzazioni, e poi proseguire in modo analogo per il caso delle rette all'infinito. Questa decisione viene presa perché, come esplicitato da LT2 in 2: "è necessario [..] calcare sulla questione che il punto improprio è una direzione perché ci ho messo un pochino a macinare 'sta cosa io"). Il primo elemento cruciale da osservare dunque è che LT1 e LT2 decidono *intenzionalmente* di lavorare sul Paragrafo 3 del testo originale di Castelnuovo, che è un *paragrafo diverso* da quello proposto nel Problema 9 (che richiedeva loro di focalizzare il lavoro sui Paragrafi 9 e 11). Questa loro scelta, compiuta in A9.1 (cfr. Figura 55) che è un segmento di attività in cui viene proposto un approccio metacognitivo sul percorso fatto, fornisce due conferme importanti.

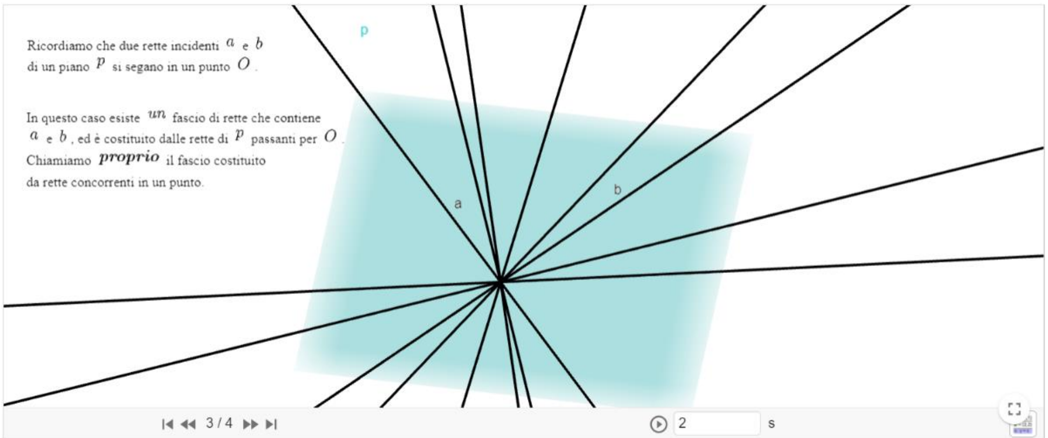
La prima conferma è che l'occhio con cui LT2 percepisce l'espressione "il punto improprio è una direzione" ha subìto un'evoluzione rispetto al primo incontro del percorso, e in particolare rispetto a quanto esaminato nel segmento di attività Q3.2 + A3.2. Infatti, da un punto di vista semantico, non si tratta di un'espressione troppo lontana da quella usata da Castelnuovo alla riga 8 dell'estratto riportato in Figura 66 ("[…] conviene sostituire alla parola *direzione*, la locuzione *punto improprio* […]"). Tuttavia, la lettura del testo fatta all'inizio del percorso, di per sé, non ha permesso a LT2 di *abitare* (Radford 2021, p. 102) il concetto di punto improprio: è stato necessario un lungo processo di oggettivazione, in parte analizzato nella Sezione 6.1.2, che ha permesso a LT2 di dare senso attivamente e creativamente al sapere storico-culturale che, nel testo di Castelnuovo, era inizialmente pura potenzialità. La seconda conferma riguarda il fatto che il segmento di attività analizzato nella Sezione 6.1.2 era *effettivamente* un nodo semiotico. Infatti, LT2 ripensa al suo processo di apprendimento identificandosi nel Lettore del prodotto che stanno realizzando e che sarà reso pubblico online: ("[…] ci ho messo un pochino a macinare 'sta cosa io"). In sintesi, potremmo dire che il significato delle parole scritte nel testo Castelnuovo è stato messo in moto dall'attività che si può configurare come *joint labour* di LT1, LT2, il Lettore e Castelnuovo stesso.

Durante il resto dell'incontro, LT1 e LT2 realizzano un'*Attività GeoGebra* chiamata *Premesse: elementi propri e impropri*, visionabile al link https://www.geogebra.org/m/akrx2dwk. L'*Attività* è composta da 4 applet separati, ciascuno composto da diversi step a cui si può accedere con la barra di navigazione (Tabella 6, Tabella 7, Tabella 8, Tabella 9).

STEP DELL'APPLET PUNTI PROPRI







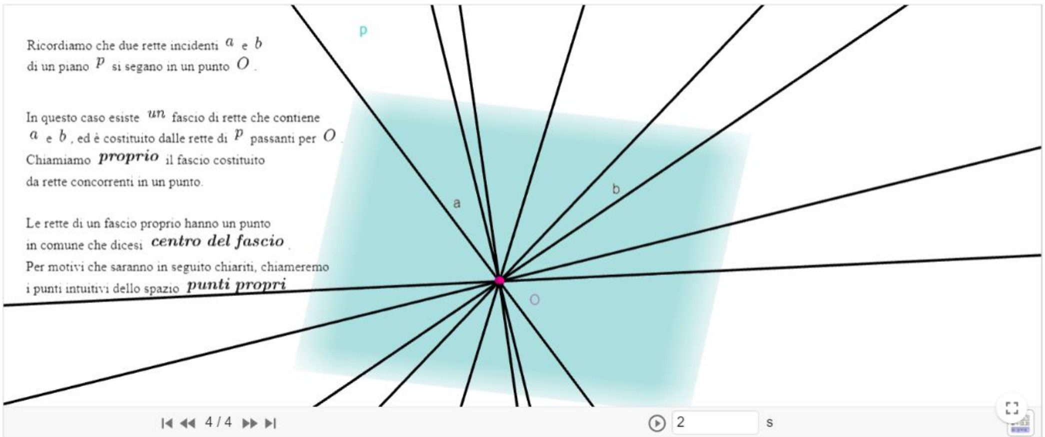
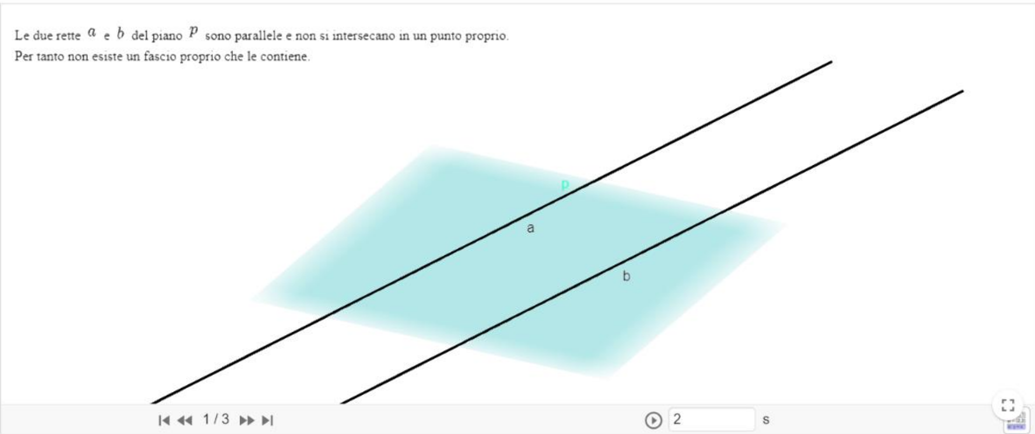
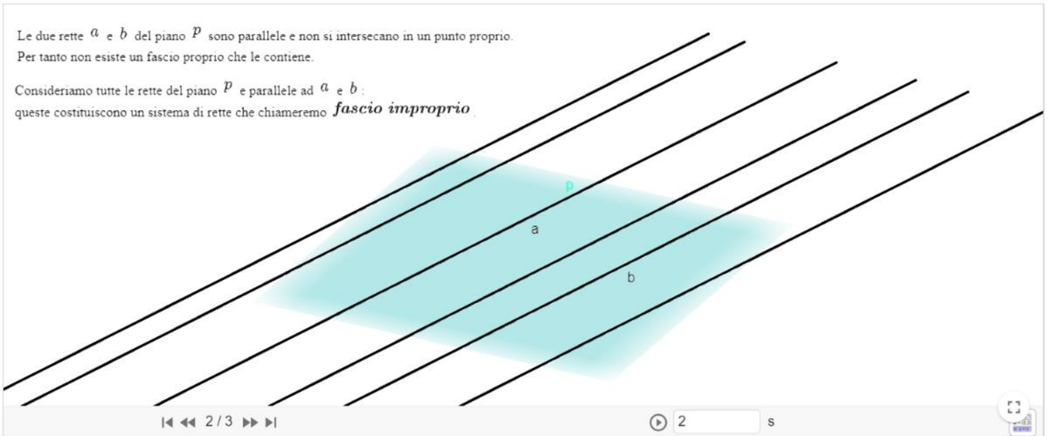


Tabella 6: Applet punti propri

STEP DELL'APPLET PUNTI IMPROPRI



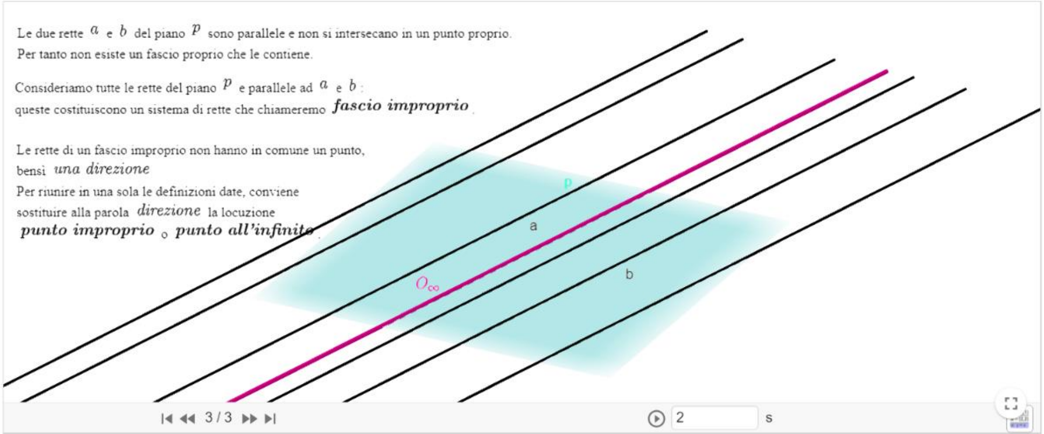
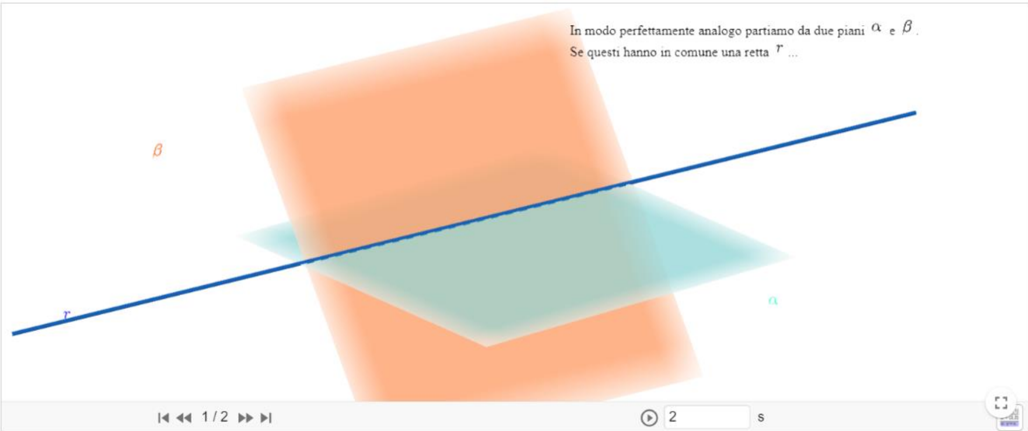


Tabella 7: Applet punti impropri.

STEP DELL'APPLET RETTE PROPRIE



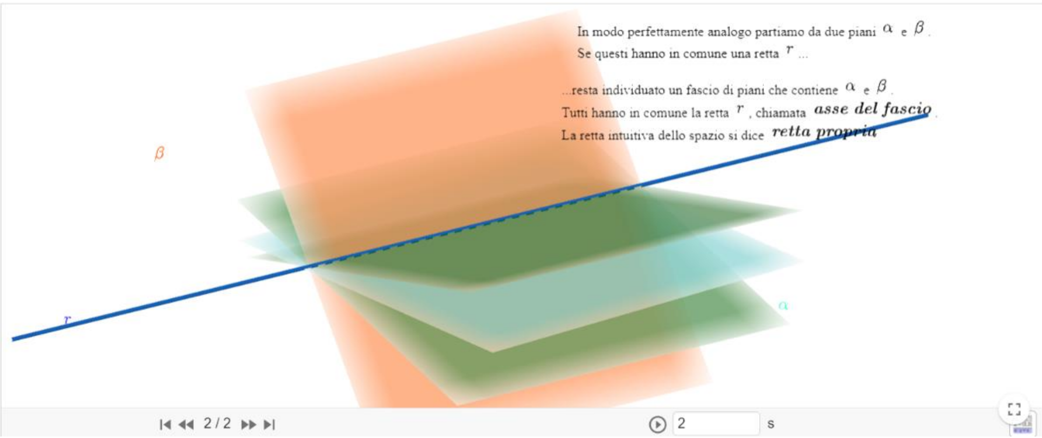


Tabella 8: Applet rette proprie.

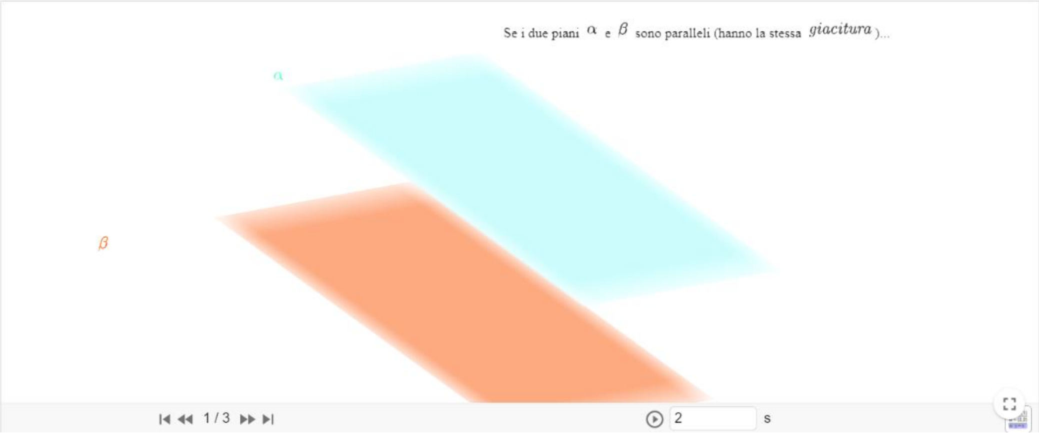
STEP DELL’APPLET RETTE IMPROPRIE


Tabella 9: Applet rette improprie

Il processo di realizzazione dell’applet è stato scandito da una continua alternanza tra:

- momenti di lettura del testo originale;

- momenti di dettatura/scrittura del testo originale;
- momenti di riflessione sul testo stesso e, in alcuni casi, sua riformulazione. La

Tabella 10 che segue mette in evidenza il confronto tra il testo originale e il testo inserito da LT1 e LT2 nei vari applet. Come si vede, sono state selezionate solo alcune porzioni del testo che sono state riorganizzate (i colori mostrano la ridistribuzione degli estratti di testo nei quattro applet e le righe vuote mettono in evidenza la segmentazione) e, in alcuni passaggi, riformulate.

Testo di LT1 e LT2	Testo originale
Applet Punti propri (Tabella 6) Ricordiamo che due rette incidenti a e b di un piano p si segano in un punto O. In questo caso esiste *un* fascio di rette che contiene a e b, ed è costituito dalle rette di p passanti per O. Chiamiamo ***proprio*** il fascio costituito da rette concorrenti in un punto. Le rette di un fascio proprio hanno un punto in comune che dicesi ***centro del fascio***. Per motivi che saranno in seguito chiariti chiameremo i punti intuitivi dello spazio ***punti propri***. Applet Punti impropri (Tabella 7) Le due rette a e b del piano p sono parallele e non si intersecano in un punto proprio. Pertanto non esiste un fascio proprio che le contiene. Consideriamo tutte le rette del piano p e parallele ad a e b: queste costituiscono un sistema che chiameremo ***fascio improprio***.	Prima di enunciare le principali relazioni che passano tra elementi e forme fondamentali, conviene introdurre il concetto degli *elementi impropri*, il quale ci permetterà di evitare distinzioni di casi ed eccezioni che continuamente si presentano nella geometria elementare. Ricordiamo che due rette a, b di un piano si segano in un punto O, o sono parallele. Nel primo caso esiste *un* fascio di rette che contiene a e b, ed è costituito dalle rette di π passanti per O. Invece nel secondo caso non esiste un fascio contenente a e b. Se però osserviamo che tutte le rette del piano parallelo ad a e b costituiscono pure un sistema di rette il quale, come si vedrà, ha molte proprietà comuni col fascio sopra nominato, si presenta naturale l'idea di estendere nel modo seguente il significato della locuzione *fascio di rette*. Da ora in poi per *fascio di rette* intenderemo sia l'insieme delle rette di un piano uscenti da un dato punto, sia l'insieme delle rette di un piano parallele tra loro. E solo quando sarà necessario di distinguere i due casi, diremo *improprio* l'ultimo fascio, chiamando *proprio* il fascio costituito da rette concorrenti in un punto. Le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto comune che dicesi *centro* del fascio; le rette di un fascio improprio non hanno in comune *un punto*, bensì *una direzione*. Per riunire in una sola queste due osservazioni, conviene sostituire alla parola *direzione*, la locuzione *punto improprio*, o *punto all'infinito*, che nulla significava finora. Volendo poi (quando occorra) distinguere l'ente a cui convenzionalmente attribuiamo il nome di *punto improprio* dai punti intuitivi dello spazio, chiameremo questi ultimi *punti propri*. Ora possiamo dire che le rette di un fascio hanno sempre un punto comune (*centro*), *proprio* se il fascio è proprio, *improprio*, cioè una direzione, se il fascio è improprio. In particolare: due rette di un piano hanno

Le rette di un fascio improprio non hanno in comune un punto bensì *una direzione*. Per riunire in una sola le definizioni date, conviene sostituire alla parola *direzione* la locuzione ***punto improprio*** o ***punto all'infinito***.	sempre un punto in comune, *proprio* quando si segano (nel senso della Geometria elementare), *improprio* se sono parallele. Una retta possiede infiniti punti propri ed un punto improprio o all'infinito A_∞, cioè una direzione; questo punto (o questa direzione) è completamente definito quando è data la retta, e non varia quando la retta venga sostituita con una ad essa parallela. *Congiungere un punto proprio* B *con* A_∞ vuol dire condurre per B la retta parallela ad a; questo problema ha sempre *una* soluzione, come quello di congiungere B con un punto proprio. In modo perfettamente analogo introdurremo il concetto di *retta impropria*. Partiamo da due piani α e β. Se questi hanno una retta comune r, resta individuato un fascio di piani che contiene α e β, ed è costituito da tutti i piani dello spazio che passano per la r. Se invece i due piani α e β sono paralleli (hanno la stessa *giacitura*) rimane individuato il sistema dei piani paralleli ad α e β; poiché il detto sistema ha molte proprietà comuni col fascio, conviene di estendere il nome di *fascio di piani* anche al sistema di piani tutti paralleli. Quando occorra distinguere i due casi, chiameremo *fascio proprio* l'ente costituito da tutti i piani che passano per una retta; *improprio* quello costituito dai piani che sono paralleli ad uno stesso piano. E potremo dire ormai che due piani dello spazio determinano sempre un fascio, proprio od improprio, che li contiene. I piani di un fascio proprio hanno in comune *una retta* (asse del fascio), mentre quelli di un fascio improprio hanno in comune *una giacitura*. Sostituendo alla locuzione *giacitura* quella, non ancora adoperata, di *retta impropria* o *all'infinito*, potremo dire che i piani di un fascio proprio o improprio hanno sempre in comune una retta (propria, cioè una retta intuitiva, nel 1°. caso, impropria nel 2°.) che chiameremo *asse del fascio*; in particolare due piani dello spazio hanno sempre una retta comune, *propria* se si segano (nel senso della Geometria elementare), *impropria* se sono paralleli. Una retta all'infinito è individuata quando si dia un piano che la contenga, che abbia la giacitura definita dalla retta. *Congiungere un punto* (proprio) B *colla retta all'infinito* a_∞*di un dato piano* α, vuol dire condurre per B il piano parallelo ad α; il problema ha sempre *una* soluzione come quello di congiungere, mediante un piano, il punto B con una retta propria a, che non passi per B.
Applet rette proprie **(**Tabella 8**)** In modo perfettamente analogo partiamo da due piani α e β. Se questi hanno in comune una retta r… …resta individuato un fascio di piani che contiene α e β. Tutti hanno in comune la retta r, chiamata ***asse del fascio***. La retta intuitiva dello spazio si dice ***retta propria***.	
Applet rette improprie **(**Tabella 9**)** Se due piani α e β sono paralleli (hanno la stessa *giacitura*)… …rimane individuato il sistema dei piani paralleli ad α e β che chiameremo ***fascio improprio di piani***. I piani di un fascio improprio hanno in comune *una giacitura*. Per sottolineare l'analogia con il punto improprio chiameremo la giacitura del fascio ***retta impropria*** o ***retta all'infinito***.	

Tabella 10: confronto tra testo scritto da LT1 e LT2 e testo originale.

- momenti di confronto su come sfruttare le diverse possibilità di personalizzazione dello stile del testo (colore, formattazione, posizione…) e degli oggetti della costruzione (colore, spessore, posizione relativa, visuale prospettica dello schermo…) in funzione della chiarezza comunicativa. Infatti, spesso tali confronti erano caratterizzati da espressioni verbali come, ad esempio:
    - *Dici di mettere […] un colore diverso in modo tale che poi dopo si riesca a sottolineare di che cosa vogliamo parlare?*
    - *[…] è meglio mettere di colore diverso anche solo per renderlo più visibile*
    - *[…] se noi il punto di prima lo lasciamo grigio come fino a questo punto della presentazione poi possiamo magari interrompere questo testo che farà il suo blocchetto…mettere un nuovo testo facendo diventare il punto rosa così magari diventa più visibile ehm dicendo ((inizia a leggere il testo originale)) le rette di un fascio proprio hanno tutte un punto in comune dicesi centro del fascio*
    - Parlando del punto all'infinito durante la lavorazione dell'applet in Tabella 7: *magari lasciamola anche così con spessore per rimarcare*
    - Parlando dei piani da aggiungere durante la lavorazione dell'applet in Tabella 8: *Però facciamo questi qua di due colori identici cioè per far capire che sono tutti dello stesso […] fascio*
- momenti di confronto su come segmentare il testo e gestire le sincronizzazioni usando i [Punti di interruzione];
- momento in cui Castelnuovo viene esplicitamente introdotto nel discorso, ad esempio durante la lavorazione dell'applet in Tabella 9: *lui mette tra parentesi hanno la stessa giacitura […] e poi dice rimane individuato il sistema di piani paralleli ad alfa e beta […]*
- momenti in cui il Lettore viene esplicitamente introdotto nel discorso. Tali confronti erano caratterizzati da espressioni verbali come, ad esempio:
    - *Servirà a lui o a lei la barra di navigazione, perché poi dopo se va avanti e lui vede cosa succede*
    - Durante la lavorazione dell'applet in Tabella 8, valutando il numero di piani da inserire: secondo me […] possiamo limitarci a questa cosa perché se no diventa veramente un casino. Cioè, se lo immagina lui e basta.

Il punto relativo alla personalizzazione degli elementi inseriti nella costruzione è stato approfondito anche durante l'intervista non strutturata condotta al termine dell'intero percorso in cui LT2 ha sostenuto con le parole che seguono le scelte compiute rispetto alle parole da mettere in corsivo[100]:

> LT2: E mettere in corsivo ad esempio la direzione la giacitura secondo me è importante perché appunto…mh…se…io per lo meno ho fatto fatica a assorbire i due concetti finché non ho capito effettivamente e l'ho associato a qualcosa che era familiare come la direzione e la giacitura. Cioè ho fatto fatica la prima volta a digerire la questione della retta impropria punto improprio ma una volta che ho capito questa cosa qua poi è andato più svelto e se invece lo sottolineiamo sin dall'inizio proprio in bello grosso che è la giacitura e la direzione allora magari poi si riesce anche per chi verrà dopo a capire il senso
>
> A: Ok quindi questo sforzo di esplicitare era per…
>
> LT2: A partire da una mia difficoltà.

È importante notare che anche Castelnuovo nel suo testo usa il corsivo per mettere in evidenza alcune espressioni. Tuttavia, questa scelta *non è stata sufficiente* a LT1 e LT2 per acquisire coscienza *immediata* dell'oggetto matematico: la mera presenza del corsivo non è bastata a LT1 e LT2 per vivere alla prima lettura il conflitto necessario all'avviarsi del processo di oggettivazione. È stato necessario materializzare la conoscenza in un unicum sensibile attraverso la loro attività e per il Lettore non potrà che avvenire lo stesso. Le scelte compiute da LT1 e LT2 nell'ambito del Problema 9, e la loro premura stilistica nei confronti del Lettore, hanno fornito informazioni importanti per comprendere quanto avvenuto nell'ambito dei problemi precedenti, ad esempio mettendo in luce gli elementi chiave del loro processo di oggettivazione.

6.1.5 Riflessioni conclusive sulla coppia LT1 e LT2

Nel caso della coppia LT1 e LT2 abbiamo analizzato in dettaglio un nodo semiotico, avvenuto nell'ambito del Problema 3 (cfr. Sezione 4.4). In questo caso, il conflitto che ha permesso l'avviarsi di un processo di oggettivazione è stato generato dalla domanda Q3.2 ("Cosa succederebbe se S fosse un punto improprio?", Figura 30), posta in relazione ad una situazione già familiare per il caso della proiezione da un centro proprio, e combinata con la proposta di realizzare una costruzione. Tale combinazione ha creato le condizioni affinché LT1 e LT2 avessero la possibilità di percepire la dinamicità e la generalità dietro l'espressione "punto improprio", trasformando quello che inizialmente era un oggetto di sapere storico-culturale, in un oggetto di coscienza. Tale trasformazione è avvenuta attraverso un lungo *joint labour* in cui LT1 ed LT2 hanno incontrato la particolare natura del punto improprio, ente che: da un punto di vista linguistico richiama un punto, da un punto di vista visuale è

[100] Qui e, in generale, in tutti gli estratti di intervista di ciascuna coppia, riporterò solo gli scambi verbali senza trascrivere azioni o gesti.

rappresentabile come una retta ma da un punto di vista matematico si riferisce alla direzione comune di una famiglia di rette parallele tra loro.

Dopo una breve descrizione sul proseguimento del primo incontro, abbiamo descritto e commentato quanto avvenuto durante il lavoro nel Problema 9 in cui LT1 e LT2 ripercorrono la propria esperienza in ottica metacognitiva (cfr. Sezione 4.10). Tale approccio metacognitivo ha permesso di tracciare il contorno di due aspetti importanti del processo di oggettivazione rilevato e analizzato nella Sezione 6.1.2. Il primo aspetto riguarda il riconoscimento esplicito da parte di LT1 e LT2 della loro nuova sensibilità nel percepire un punto improprio come una direzione, frutto del lungo processo di addomesticamento dell'occhio in parte descritto e analizzato. Il secondo aspetto, collegato al primo, conferma come il nodo semiotico individuato e analizzato sia riconosciuto anche da LT1 e LT2 come *effettivamente* un segmento di apprendimento.

6.2 Coppia Ricercatori in Geometria Algebrica (RGA1 e RGA2)

Globalmente, il percorso di RGA1 e RGA2 si snoda nell'arco di due incontri; nella prima sessione di lavoro, erano entrambi fisicamente presenti nella stessa stanza e sia mouse che tastiera venivano tendenzialmente manovrati da RGA1. La mattina del secondo incontro uno dei due era risultato positivo al Covid-19 quindi l'incontro è stato realizzato in videochiamata con schermo condiviso e sia mouse che tastiera sono stati tendenzialmente manovrati da RGA2. Il loro approccio con l'attività ha avuto un decorso peculiare. Infatti, RGA1 e RGA2 hanno terminato nel primo incontro l'intero blocco dei primi 8 problemi, hanno spesso – soprattutto nella prima parte dell'attività – letto il testo originale in maniera silente e, in generale, hanno sfruttato il software in maniera differente.

6.2.1 Alcuni passaggi del lavoro nel Problema 1 e Problema 2

Problema 1 - punti propri e impropri (cfr. Sezione 4.2)

Dopo aver letto il testo originale in maniera silente, RGA2 rilegge per controllare le notazioni usate dal testo e la costruzione in GeoGebra viene realizzata in maniera diretta e immediata.

Problema 2 - rette proprie e improprie (cfr. Sezione 4.3)

Dopo una lettura silente del testo originale, leggono la consegna di Q2.1+A2.1[101]. Iniziano costruendo nella schermata GeoGebra un punto (che chiamano A, anche se nel testo originale viene chiamato B) e:

1. RGA1: ok, una retta ((cerca il comando [Retta] nel menu di GeoGebra))

---

[101] Che, ricordiamo, è: "Dato un punto proprio B e una retta all'infinito di un piano α, cosa vuol dire congiungere B con la retta all'infinito α_∞? Usa la schermata GeoGebra che segue per realizzare la costruzione e riflettere sulla risposta." (Figura 26)

2. RGA2: però sarebbe sarebbe quella all'infinito ((indica lo schermo con la penna in corrispondenza della consegna)) di un piano ((sta rileggendo una parte di consegna)) quindi…

RGA1 concorda verbalmente con l'affermazione di RGA2 ma non prosegue con la costruzione e rimangono entrambi in silenzio per 5 secondi. Consideriamo questi segnali di titubanza (rilettura, silenzio, non avanzamento nella costruzione) come l'inizio di un evento critico e, dunque, di un nodo semiotico, che riguarda la visualizzazione dinamica degli elementi impropri. Il processo di oggettivazione di RGA1 e RGA2 si svilupperà nell'arco di quasi tutta l'attività del primo incontro; ne analizzeremo in dettaglio alcuni passaggi, interpretati in termini di nodi semiotici, particolarmente significativi. Del primo nodo semiotico ci occupiamo di seguito. RGA1 e RGA2 hanno di fronte la schermata GeoGebra che al momento contiene solo il punto che hanno chiamato A e devono decidere come proseguire con la costruzione; il momento di silenzio viene interrotto da RGA2:

3. RGA2: per fare la retta all'infinito ((con la penna traccia una linea sul tavolo poi torna con la penna ad indicare lo schermo)) secondo me serve un piano

4. RGA1: eh cioè secondo me devi fare una retta ((con il cursore del mouse traccia una linea sullo schermo)) e poi un piano ((con il cursore traccia una specie di riquadro sullo schermo)) che passa per ((con il cursore cerchia il punto nella schermata)) va beh questo è A però è B ((sposta il cursore sulla consegna in corrispondenza della lettera B che indica il punto)) ehm che ha come direzione la retta sostanzialmente ((muove orizzontalmente la mano aperta con il palmo rivolto verso il basso )) che è l'unico tale per cui ((muove ancora la mano in aria)) che è parallelo alla retta se vuoi. È quello che ti chiede secondo me.

In questo primo scambio, il "piano" di cui parla RGA2 al passaggio 3 non è lo stesso "piano" di cui parla RGA1 al passaggio 4. Infatti, RGA2 in 3 propone di usare un piano per rappresentare la retta all'infinito ("per fare la retta all'infinito […] serve un piano"); RGA1 in 4 si sta riferendo al piano che, a suo avviso, risponde alla richiesta a cui stanno lavorando. RGA1 e RGA2 stanno percependo la situazione in maniera diversa e questa tensione anima un arricchimento nei mezzi semiotici che impiegano per proseguire con l'attività:

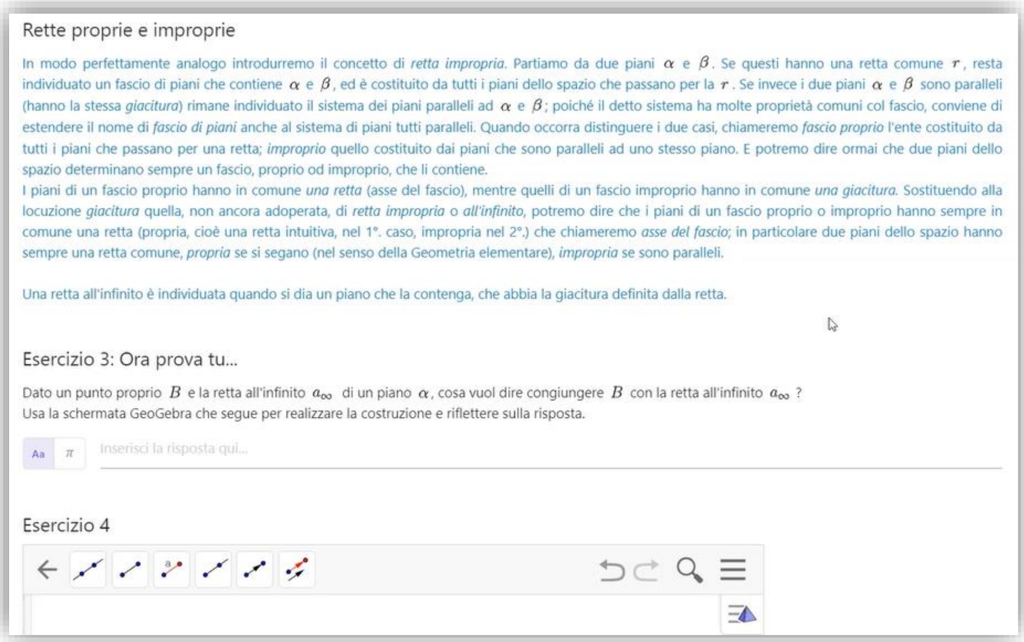
5. RGA2: però la retta questa qui ((indica ancora lo schermo in corrispondenza della consegna dove si parla di "retta all'infinto")) non la vedi, la retta questa qui è quella infinita di un piano α

6. RGA1: certo che però corrisponde ((punta il dito indice davanti a sé e muove la mano tracciando una linea  )) a una direzione del piano ((traccia di nuovo con il dito una linea davanti a sé))

7. RGA2: mh-mh

8. RGA1: quindi secondo me eh non so come fai a disegnare una roba del genere devi semplicemente dare una direzione qualsiasi ((lascia il mouse e punta l'indice verso l'alto)) nello spazio e fare un piano ((riprende il mouse)) che passa per il punto e che ha ((con la mano aperta fa dei gesti davanti a sé come se "spazzasse" l'aria  )) che contiene nella giacitura quella direzione…la facciamo con un vettore non lo so ((con la rotella del mouse scorre fino a tornare a visualizzare il testo originale, schermata in Figura 67)) non mi s- non mi pare…((silenzio di 24 secondi in cui probabilmente stanno entrambi rileggendo il testo originale)) mh-mh i piani sono paralleli ((la lettura prosegue ancora in maniera silente, intervallata da brevi momenti di "lettura borbottata)).

Nella parte finale del passaggio 8, RGA1 ha usato la rotella del mouse per risalire all'inizio del Problema 2 e si ferma in modo da vedere il testo originale (la schermata che hanno davanti dopo il passaggio 8 è quella mostrata in Figura 67).



Rette proprie e improprie

In modo perfettamente analogo introdurremo il concetto di *retta impropria*. Partiamo da due piani α e β. Se questi hanno una retta comune r, resta individuato un fascio di piani che contiene α e β, ed è costituito da tutti i piani dello spazio che passano per la r. Se invece i due piani α e β sono paralleli (hanno la stessa *giacitura*) rimane individuato il sistema dei piani paralleli ad α e β; poiché il detto sistema ha molte proprietà comuni col fascio, conviene di estendere il nome di *fascio di piani* anche al sistema di piani tutti paralleli. Quando occorra distinguere i due casi, chiameremo *fascio proprio* l'ente costituito da tutti i piani che passano per una retta; *improprio* quello costituito dai piani che sono paralleli ad uno stesso piano. E potremo dire ormai che due piani dello spazio determinano sempre un fascio, proprio od improprio, che li contiene.
I piani di un fascio proprio hanno in comune *una retta* (asse del fascio), mentre quelli di un fascio improprio hanno in comune *una giacitura*. Sostituendo alla locuzione *giacitura* quella, non ancora adoperata, di *retta impropria* o *all'infinito*, potremo dire che i piani di un fascio proprio o improprio hanno sempre in comune una retta (propria, cioè una retta intuitiva, nel 1°. caso, impropria nel 2°.) che chiameremo *asse del fascio*; in particolare due piani dello spazio hanno sempre una retta comune, *propria* se si segano (nel senso della Geometria elementare), *impropria* se sono paralleli.

Una retta all'infinito è individuata quando si dia un piano che la contenga, che abbia la giacitura definita dalla retta.

Esercizio 3: Ora prova tu...

Dato un punto proprio B e la retta all'infinito a_∞ di un piano α, cosa vuol dire congiungere B con la retta all'infinito a_∞ ?
Usa la schermata GeoGebra che segue per realizzare la costruzione e riflettere sulla risposta.

Aa π Inserisci la risposta qui...

Esercizio 4

Figura 67: schermata dopo l'uso della rotella del mouse (cfr. riga 8 della trascrizione).

Nel segmento di attività tra il passaggio 5 il passaggio 8 la tensione è in salita: in 5, RGA2 riprende ciò che RGA1 aveva detto in 4 ("secondo me devi fare la retta […]") prima verbalizzando l'impossibilità di disegnare direttamente quella retta come *retta* (prima parte di 5 "la retta questa qui non la vedi" accompagnata da gesti indicali rivolti alla consegna) per poi riformulare la propria perplessità materializzandola in maniera verbalmente esplicita (seconda parte di 5: "la retta questa qui è quella infinita di un piano α”). Nei passaggi 6 e 8, gesti, parole e azioni di RGA1 rivelano sia il suo occhio teorico già addomesticato da geometria algebrico (in cui il piano è percepito come una potenzialità data dalla presenza di due vettori[102]) sia l’alterità dal cui confronto si muove l’attività e si trasforma la percezione (in 8: “non so come fai a disegnare una roba del genere”). Il ritorno al testo originale, e in particolare la porzione verbalizzata “i piani sono paralleli” (parte finale del passaggio 8), fornisce un nuovo impulso e l’attività prosegue arricchendosi di nuovi elementi semiotici e multimodali:

9. RGA2: cioè questo qua è ((nella schermata di Figura 67, con la penna indica lo schermo prima in corrispondenza del testo originale  e poi in corrispondenza della consegna ,)) si cioè io farei cioè questo qua ((muove ancora la penna prima sul testo originale poi sulla consegna)) è un fascio di piani paralleli ((con la penna puntata sulla consegna in corrispondenza dell’espressione la retta all’infinito α_∞ , scorre la consegna scandendo le parole))

10. RGA1: Esatto esattamente

11. RGA2: quindi se tu hai un piano α ((la penna si sposta ancora in corrispondenza della scritta piano α nella consegna)) puoi fare il piano parallelo ad α per B ((sposta la penna indicando ritmicamente diverse parti della consegna per scandire le parole))

12. RGA1: esatto

Lo scambio alle righe 9-12 testimonia un momento di svolta dell’attività in cui segmenti di testo originale, segmenti di consegna e la loro relazione assumono un ruolo all’interno della complessa rete semiotica già presente. Il movimento ritmico dei gesti indicali fatti con la penna da RGA2 alle righe 9 e 11 – che passa dal testo originale alla consegna ed è scandito da espressioni come “questo qua è un fascio di piani paralleli” – materializza un collegamento geometrico che permette una nuova percezione della situazione e rende possibile l’incontro con l’oggetto culturale. Infatti, i segni verbali usati da RGA2 in 11 (“quindi se tu hai un piano α puoi fare il piano parallelo ad α per B”) sono più raffinati ed espliciti di quelli alla riga 9 (“cioè questo qua è si cioè io farei cioè questo qua è un fascio di piani paralleli”).

[102] Linearmente indipendenti.

A questo punto, RGA1 e RGA2 terminano la costruzione richiesta in maniera diretta e fluida, aggiungendo un piano ed eseguendo in GeoGebra la costruzione verbalizzata nel passaggio 11, cioè, usando il comando [Piano parallelo] (si veda Sezione 4.3) applicato al piano appena costruito e al punto che nella loro costruzione avevano chiamato A. Assistiamo a una conquista di concisione nelle azioni e di fluidità nella realizzazione della costruzione che, contrapposta alla fatica tracciata all'inizio e alla ricchezza di mezzi semiotici di oggettivazione introdotti tra i passaggi 5-12, interpretiamo come una contrazione semiotica e dunque come chiusura dell'evento critico in esame in questa sottosezione.

RGA1 e RGA2, attraverso il loro *joint labour*, hanno incontrato aspetti nuovi di un oggetto storico-culturale a loro, per altre vie, già noto: hanno materializzato visualmente l'operazione geometrica di congiungimento nel caso in cui gli enti da congiungere sono un punto proprio e una retta impropria.

6.2.2 Problema 3: analisi approfondita di un nodo semiotico

Problema 3 - proiettare da un punto una figura composta da punti e rette (cfr. Sezione 4.4)

RGA1 legge velocemente il testo originale (Figura 28) e iniziano subito a costruire le proiezioni richieste in A3.1[103]. Inizialmente, proiettano solo gli elementi propri proposti (che sono due punti e due rette) ma RGA2 si accorge che manca la proiezione del punto A_∞; lo fa notare e l'attività prosegue così:

13. RGA1: eh ma un punto improprio comee cosa proietti? Proietti…
14. RGA2: ((indica lo schermo con la penna)) secondo me devi fare la retta vuoi fare la retta per S ((allontana la penna dallo schermo))
15. RGA1: parallela ad A_∞ ((prende il mouse in mano e completa la costruzione))
16. RGA2: quindi che passa per A_∞ e quindi è parallela alla retta a.

Da qui, RGA1 e RGA2 portano a termine la costruzione richiesta in A3.1 usando il comando [Retta parallela] di GeoGebra applicato alla retta a (di cui A_∞ è il punto all'infinito) e al centro di proiezione S. La costruzione finale è mostrata in Figura 68.

[103] Che, ricordiamo, è: "Usa la schermata GeoGebra che segue per proiettare i punti A, B, A_∞ e le rette a, b dal centro di proiezione S" (consegna accompagnata da una schermata GeoGebra con già predisposto il centro di proiezione e gli elementi da proiettare, si veda Figura 29).

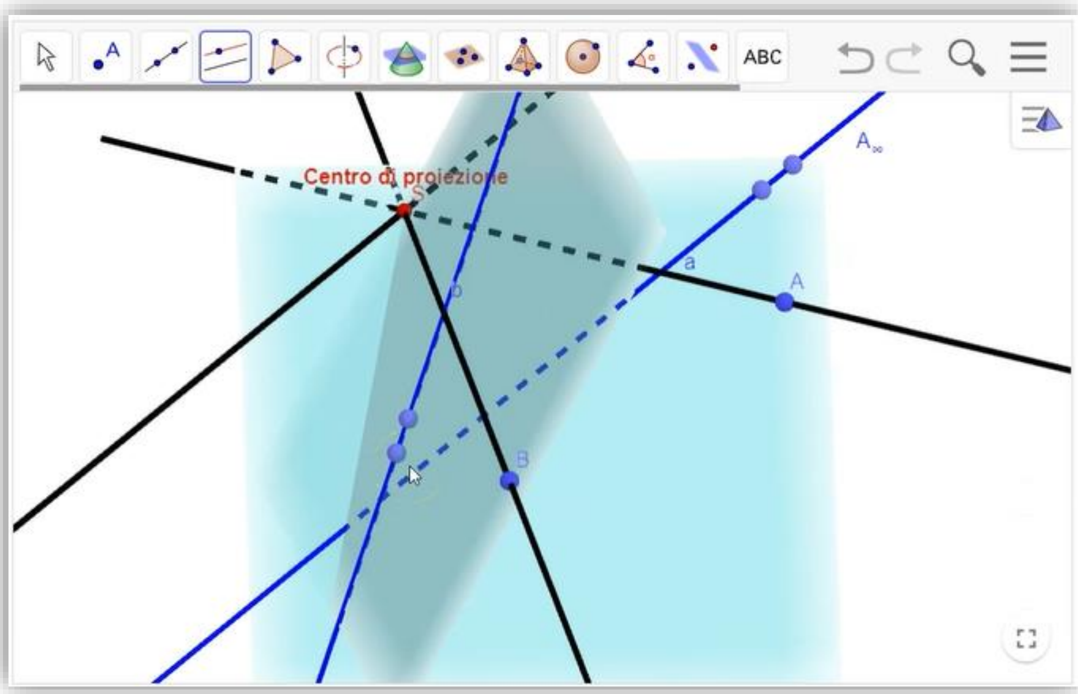


Figura 68: schermata con la risoluzione di A3.1.

Nonostante la fluidità con cui la costruzione richiesta in A3.1 viene realizzata, il passaggio 13 testimonia la riattivazione della tensione legata alla materializzazione con atti grafici, stavolta istanziata al caso della visualizzazione dinamica in GeoGebra dell'operazione di proiezione quando sono coinvolti elementi impropri. Interpretiamo la domanda di RGA1 in 13 ("eh ma un punto improprio comee cosa proietti"?) come un indicatore di titubanza che preannuncia l'inizio di un nuovo nodo semiotico e che, dunque, viene scelto come punto di iniziale dell'evento critico che analizzeremo di seguito. Nei passaggi dal 14 al 16, assistiamo a una verbalizzazione delle azioni grafiche da implementare per completare la costruzione, verbalizzazione che si compone e si precisa nel *joint labour* di RGA1 e RGA2 in cui i contributi si muovono insieme in un flusso, completandosi (il "vuoi fare la retta per S" di RGA2 nella parte finale di 14 viene completato in 15 da RGA1 con un "parallela ad A_∞" che RGA2 precisa poi in 16 associando il verbo "passare" al punto A_∞ e il termine "parallelo" alla retta) .

Dopo aver realizzato la costruzione richiesta in A3.1 e ricontrollato di aver completato tutto, RGA1 e RGA2 passano a Q3.2+A3.2 in cui, facendo riferimento alla situazione proposta in A3.1, si chiede di esplorare il caso del centro di proiezione improprio, fornendo una schermata GeoGebra vuota per realizzare la costruzione (si veda Figura 30).

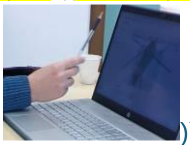
17. RGA2: ((legge la consegna)) Cosa succederebbe se S fosse un punto improprio?

18. RGA1: se S fosse un punto improprio? ((con la rotella del mouse scorre fino a visualizzare la costruzione di Figura 68)) ehm ((3 secondi di silenzio))

Dopo aver letto la consegna (17), RGA1 e RGA2 non sfruttano la schermata GeoGebra vuota fornita: usando la rotella del mouse (riga 18) tornano a visualizzare nello schermo la costruzione precedente (Figura 68) e la commentano. Nel proseguire dell'attività, si sviluppa una nuova, ricca e complessa rete organizzata di mezzi semiotici di oggettivazione:

19. RGA2: beh io direi che i due piani ((indica con la punta della penna sullo schermo)) sarebberoooo ((smette di indicare lo schermo))

20. RGA1: i due piani rimangono piani ((toglie la mano dal mouse)) diventano paralleli alla direzione del punto improprio che è rappresentato da una retta ((5 secondi di silenzio)) il punto improprio ora lo vede come direzione di una retta ((11 secondi di silenzio, poi rimette la mano sul mouse))

21. RGA2: ehm ((indica nuovamente lo schermo con la penna )) aspetta scusami se S fosse un punto improprio ((mentre parla allontana la penna dallo schermo e la mette quasi in verticale )) i due piani ((torna ad indicare lo schermo con la penna )) cioè ciascun piano contiene ((si allontana dallo schermo, alza l'indice di una mano  poi appoggia la penna e posiziona l'altra mano aperta sotto a quella con il dito alzato ))

22. RGA1: ah conterrebbe ((alza una mano davanti a sé a palmo aperto )) la retta che vuoi e sarebbe ((inizia a ruotare la mano verso destra mettendola a paletta )) parallelo ((la rotazione finisce e agita la mano in su e giù continuando a tenerla a paletta )) al…cioè conterrebbe la

giacitura la direzione ((sposta la mano e punta l'indice in alto )) del punto improprio ((silenzio)) è quello che…

23. RGA2: avrebbero sì una ((porta la penna verso lo schermo, stavolta però parallelamente ad esso, poi la ruota e la porta verso l'alto )) direzione [RGA1: esatto una direzione] ((muove la penna su e giù))

I piani di cui RGA1 e RGA2 parlano tra 21 e 23 sono i due piani azzurri di Figura 68 che rappresentavano le proiezioni delle rette proprie a e b dal punto proprio S. Già le loro prime parole in 20 e 21 mostrano subito il particolare approccio con cui RGA1 e RGA2 affrontano il quesito proposto: espressioni come quella della riga 20 "i due piani rimangono piani diventano paralleli alla direzione del punto improprio", associate al fatto che l'intera discussione avviene commentando la costruzione precedente (in cui la proiezione è fatta da centro proprio), rivelano una visione dinamica della situazione geometrica presentata. RGA1 e RGA2 non stanno immaginando una nuova costruzione ma *stanno immaginando di deformare in maniera continua la costruzione precedente*. Questo particolare modo di percepire la situazione si spiega ancora una volta pensando che il loro occhio geometrico è già addomesticato da precedenti oggettivazioni nell'ambito della geometria proiettiva e algebrica (si veda anche Sezione 2.1). In particolare, l'occhio del geometra proiettivo immagina di muoversi nello spazio proiettivo in maniera continua, e citando la conversazione di chiarimento avuta con RGA2 in un momento successivo alla sperimentazione[104]:

> "ci sono delle cose invarianti in questi movimenti continui […] quando io muovo la figura ci sono delle cose che restano invariate e allora se io mi devo immaginare come cambia […] immagino come cambia e alcune cose devono rimanere […] il geometra algebrico studia gli invarianti […]".

Questa particolare modalità di percepire gli oggetti geometrici caratterizza la sensibilità che RGA1 e RGA2 hanno sviluppato nel corso del loro (precedente) lungo processo di addomesticamento dell'occhio. Sono geometri esperti, professionisti e la loro percezione è culturalmente educata ad *organizzare la percezione in un certo modo*. Qui abbiamo l'opportunità sia di analizzare alcune delle caratteristiche di questo *certo modo*, sia di assistere a una nuova

[104] La citazione di questo estratto di conversazione viene riportato a supporto dell'analisi ma non viene trattato al pari delle altre trascrizioni (quindi ad esempio non ha un numero di riga).

trasformazione dell'occhio di RGA1 e RGA2 data dalla possibilità di immaginare l'operazione di proiezione in un nuovo modo. La deformazione continua che si immaginano riguarda S e la descrizione di ciò che accade viene avviata da RGA1 in 20 "i due piani rimangono piani - diventano paralleli alla direzione del punto improprio che è rappresentato da una retta - il punto improprio ora è la direzione di una retta" (parole scandite da ben due lunghi silenzi). In 21, RGA2 indica lo schermo e poi mentre pronuncia le parole "se S fosse improprio" allontana la penna dallo schermo come a evocare un movimento e continua con "i due piani". Poi, torna nuovamente a indicare lo schermo con la penna e rifinisce il focus di attenzione su un piano alla volta ("cioè ciascun piano contiene") per poi posizionare le mani nel modo mostrato dell'ultima immagine della riga 21. Così facendo, introduce una nuova rete di segni e artefatti che RGA1, in 22, riprende, riarticola e riorganizza coordinando parole e gesti in un nuovo modo. Inizia con "ah conterrebbe la retta che vuoi", detto mentre apre la mano davanti a sé: l'espressione la "retta che vuoi" si riferisce a una tra le rette a e b che erano state proiettate in A3.1. Poi, prosegue con "e sarebbe parallelo al" detto mentre compie una rotazione della mano per poi, nella parte finale, riformulare il tutto in "cioè conterrebbe la giacitura la direzione del punto improprio" detto puntando il dito indice in alto. Anche in 23, troviamo dei gesti che incarnano i vari elementi geometrici: il richiamo è ai vettori che generano il piano, cioè il vettore direzione della retta che rappresenta il centro di proiezione improprio e il vettore direzione della retta data che si sta proiettando.

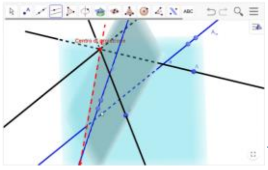
Dopo lo scambio riportato da 20 a 23, e dopo aver chiesto un chiarimento sulla richiesta di fornire una risposta scritta, RGA1 torna a visualizzare nello schermo la consegna di Q3.2+A3.2. I due si confrontano brevemente a voce sulle situazioni non ancora esplorate e nel campo di testo viene scritta la seguente risposta:

> "La retta tra S e A_{∞} scomparirebbe, mentre le rette tra S e A e S e B diventerebbero parallele. I due piani per S e le rette a e b diventerebbero i piani generati da"

La scrittura della risposta però è interrotta da RGA2 che, indicando lo schermo, dice:

24. RGA2: però scusami dove si incontrano questi due piani? In S e?

25. RGA1: ((smette di scrivere)) ah si incontrano in S e direi…nelle in una delle rette in cui…((con la mano punta verso lo schermo )) dipende da come sono messe le rette...a e b ((porta la mano al mento))

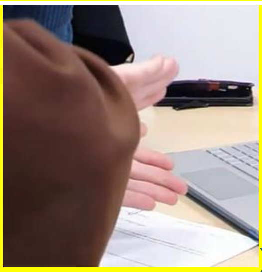
26. RGA2: perché secondo me ((indica lo schermo con la penna)) l'intersezione dovrebbe essere questa qua la vedi quest'ombra ((con la penna percorre la retta di intersezione dei due piani nella schermata in Figura 68 che stanno commentando, cfr linea tratteggiata in rosso immagine che segue )) [RGA1: esattamente esattamente] che però…((silenzio))

27. RGA1: è sostanzialmente l'unico tale per cui S meno il punto di intersezione ((con la mano indica una parte della costruzione )) ehm diciamo sta nella direzione sia del primo che del secondo ((porta la mano al mento)). Però secondo me non lo riesci a ((indica lo schermo per un secondo e poi riporta la mano al mento)) cioè a caratterizzare ((indica lo schermo)) solo in funzione di a e b. Dipende da dove sta S. Comunque i piani diventerebbero i piani generati da ((indica nello schermo la risposta che stavano scrivendo e poi riprende a scrivere)).

RGA1 completa la scrittura della risposta aggiungendo la parte finale, che evidenziamo di seguito in giallo:

> "La retta tra S e A_{∞} scomparirebbe, mentre le rette tra S e A e S e B diventerebbero parallele. I due piani per S e le rette a e b diventerebbero i piani generati da rispettivamente a e direzione di S e b e direzione di S."

Anche dopo aver scritto la risposta, il confronto sull'incontro dei due piani prosegue e, in un primo scambio, RGA1 e RGA2 concordano verbalmente sul fatto che tale incontro avviene lungo una retta. Il loro approccio geometrico – proiettivo è già culturalmente e teoreticamente addomesticato a organizzarsi in un particolare modo ed è, come abbiamo visto, caratterizzato dalla ricerca degli invarianti. Dal punto di vista della geometria proiettiva, due rette si incontrano sempre in un punto (sia esso proprio o improprio), due piani si incontrano sempre in una retta (sia essa propria o impropria). Quindi, nell'analisi della situazione proposta dal quesito, l'attività di RGA1 e RGA2 è mossa dalla ricerca degli invarianti della trasformazione continua che stanno immaginando di compiere. In questo estratto, il modo in cui tale tipo di percezione teorica catalizzi la loro attenzione è evidente: essa si sposta sulla retta intersezione dei due piani (riga 24). L'alterità con cui RGA1 e RGA2 si confrontano e che si oppone a loro è data dal confronto con un'entità visuale, materiale, sensibile, costruita su una schermata: "dove si incontrano *questi* due piani?" (riga 24). Questa domanda attiva un nuovo sforzo di creazione di significato, richiama a un'esplorazione dinamica più profonda della situazione e richiede di materializzare la trasformazione continua immaginata in modo sempre più articolato e preciso. Tale sforzo si esplica mettendo in gioco tanto elementi teorici e ideali quanto elementi materiali e sensibili: “dipende da come sono messe le rette a e b” puntando la mano verso o schermo nella seconda parte di 25; in 26, “l’intersezione dovrebbe essere questa qui la vedi quest’ombra” indicando l’intersezione dei piani; in 27, “sta nella direzione sia del primo che del secondo […] non lo riesci a […] caratterizzare solo in funzione di a e b. Dipende da dove sta S“ continuando ritmicamente a compiere gesti indicali sullo schermo. L’interazione prosegue e nello scambio che segue, vediamo RGA1 e RGA2 focalizzarsi su una delle possibili situazioni:

28. RGA1: però la cioè ((ha le mani chiuse a pugno vicine che muove come per “aprire” qualcosa )) come è che si dice ((apre le mani a paletta una di fronte all’altra )) li unfoldi ((ruota una delle due mani verso l’alto  )) in direzione di S ((rimette la mano sul mouse)). Cioè se prima sono tipo in questo modo ((lascia il mouse e avvicina le mani appoggiando la parte laterale esterna della destra sul palmo della sinistra in modo da formare una croce )) li raddrizzi ((ruota la mano destra sul palmo della sinistra )) in modo che abbiano ((batte il lato della mano destra sul palmo della sinistra poi torna con la mano sul mouse)) una direzione in comune che è quella data da S (2 secondi silenzio)) e allora diventa tipo una retta ((lascia il mouse e muove la mano davanti a sé tracciando una linea verso l’alto con l’indice puntato)).

29. RGA2: si si ma se S ((punta la penna sullo schermo)) la porti all'infinito lungo la retta di intersezione ((con la penna traccia la retta di intersezione dei due piani proiettanti))

30. RGA1: si si continuano ad avere la retta

31. RGA2: restano uguali cioè restano proprio gli stessi piani

Nei passaggi 28-31, la trasformazione continua immaginata si incarna in una interpretazione cinestetica materializzata da una complessa e organizzata rete di gesti e parole. In 28, le mani di RG1 materializzano il movimento dei piani in un'evoluzione che parte dal dire "li unfoldi in direzione di S" in sincronia con il movimento rotatorio di una mano, e poi si precisa in una nuova articolazione espressiva in cui parole e gesti si alternano dispiegandosi ("se prima sono in questo modo" con palmi aperti appoggiati a croce - "li raddrizzi" con rotazione di una mano sull'altra - "in modo che abbiano" battendo il lato di una mano sul palmo dell'altra" - "una direzione comune che è quella data da S" seguito da un silenzio – "e allora diventa tipo una retta" tracciando una linea in aria). La complessità del materializzare visivamente i diversi scenari approcciando alla situazione in modo dinamico emerge con forza nella rete di mezzi semiotici di oggettivazione in gioco. In 29, RGA2 introduce la possibilità di esplorare uno scenario preciso: quello in cui S "la porti all'infinito lungo la retta di intersezione". Tenendo le rette a e b date, i piani, che riprendendo la risposta scritta dopo la riga 27, sono "generati da rispettivamente a e direzione di S e b e direzione di S", in questo scenario "continuano ad avere la retta" (linea 30) e quindi "restano uguali cioè restano proprio gli stessi piani" (linea 31). Con queste considerazioni assistiamo a una riorganizzazione e rifinitura delle risorse semiotiche che interpretiamo come una contrazione semiotica che testimonia l'emergere di nuovi oggetti di coscienza e chiude il nodo semiotico qui esaminato.

6.2.3 Alcuni passaggi del lavoro dal Problema 4 al Problema 7

Problema 4 - proiettare da una retta una figura composta da punti (cfr. Sezione 4.5)

RGA1 legge velocemente il testo originale (Figura 33) e iniziano subito a costruire le proiezioni richieste in A4.1 (Figura 34). La costruzione dei piani di proiezione per il caso dei punti propri è immediata mentre la richiesta di proiettare il punto improprio A_∞ si rivela più sfidante ed è individuabile un nodo semiotico, che descriviamo riportando la trascrizione seguita da un breve commento. La Figura 69 mostra la schermata che RGA1 e RGA2 hanno di fronte.

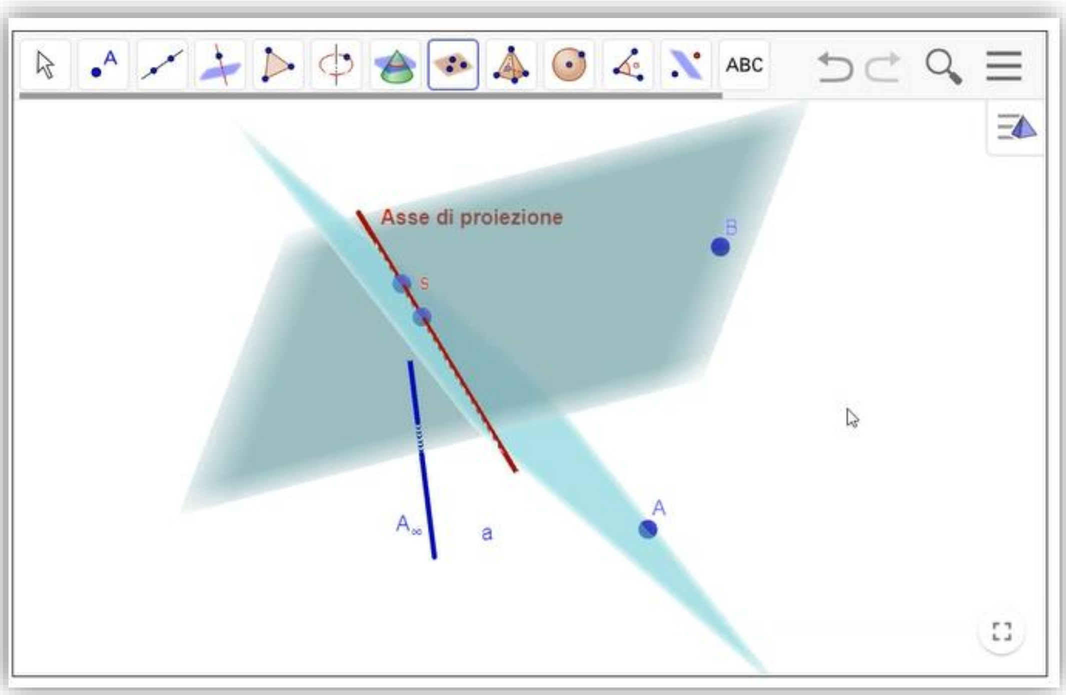


Figura 69: schermata dopo la costruzione delle proiezioni di A e B dall'asse di proiezione.

32. RGA2: Devi fare quello per il punto A_∞

33. RGA1: Devi fare il piaaano ((7 secondi di silenzio)) fare il piano ((9 secondi di silenzio)) eh devi fare il piano che contiene questa ((scorre il cursore sull'asse di proiezione in rosso in Figura 69)) e parallelo a questa ((scorre il cursore sulla retta blu in basso a sinistra che rappresenta A_∞)) [RGA2: mh-mh] come facciamo?

Muovono la visuale ed esplorano i comandi disponibili in GeoGebra.

34. RGA1: come cavolo fai il piano che contiene che contiene questa ((scorre ancora il cursore sull'asse di proiezione in rosso in Figura 69)) per due punti qua ((il cursore è sempre sull'asse di proiezione)) o vuoi dare…((21 secondi quasi di silenzio, si sente solo un borbottio incomprensibile))

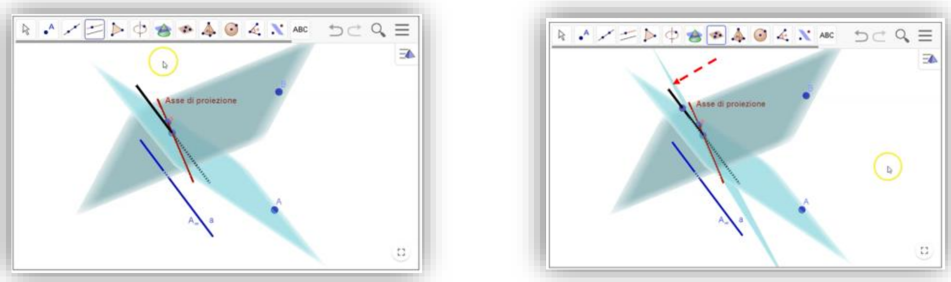
35. RGA2: ((indicando lo schermo con un dito)) mmm forse se fai la retta parallela a lei ((il dito indica la retta blu che rappresenta A_∞)) passante per un punto dell'asse? ((il dito indica l'asse in rosso e poi porta la mano al mento))

36. RGA1: hai ragione si ((inizia a navigare i tasti in GeoGebra))

37. RGA2: e poi prendi…

38. RGA1: si si ((continua a navigare cercando il comando [Retta parallela]))

RGA1 costruisce una retta parallela alla retta blu che rappresenta A_∞ passante per uno dei punti dell'asse (Figura 70a) e poi costruisce il piano scegliendo due punti sull'asse e il terzo punto sulla retta appena costruite (Figura 70b).



a) b)

Figura 70: Soluzione grafica di A4.1 realizzata prima prendendo la retta parallela alla retta rappresentate il punto improprio (parte a) e poi costruendo il piano che contiene l'asse e la nuova retta appena costruite (parte b, il piano costruito è indicato da una freccia).

39. RGA1: Direi che ci siamo

40. RGA2: mh-mh

La titubanza e perplessità di RGA1 in 33 e 34 è ancora una volta scatenata dalla richiesta di materializzare nella schermata fornita la proiezione richiesta. Ciò che geometricamente andrebbe fatto è chiaro e verbalizzato sin da subito ma da 32 a 40 assistiamo a una trasformazione nell'uso di mezzi semiotici di oggettivazione che testimonia un processo di addomesticamento dell'occhio. Fino al passaggio 34 nell'interazione sono impiegati mezzi semiotici che coinvolgono segni verbali e gesti riferiti allo schermo ma i segni verbali usati non sono direttamente collegabili alla "geometria software" di GeoGebra. Il passaggio 34 è quindi in questo senso cruciale: l'espressione di RGA2 "se fai la retta parallela a lei passante per un punto dell'asse" permette a RGA1 di notare nuove connessioni tra i diversi elementi del sapere: vengono introdotti nuovi mezzi semiotici di oggettivazione (i comandi del software) scegliendo tra essi solo quelli ritenuti rilevanti rispetto alla situazione proposta. Una volta terminata la costruzione, RGA1 e RGA2 passano a rispondere alla domanda Q4.2[105]: la scrittura della risposta non procede in maniera completamente fluida, nel senso che vengono apportate delle modifiche (principalmente legate all'esplicitazione di etichette simboliche associate agli oggetti nominati e presenti nella costruzione) e delle correzioni. La versione finale, a cui giungono comunque nel giro di poco più di un minuto attraverso un processo di rifinitura e precisazione che interpretiamo in termini di contrazione semiotica, è la seguente:

[105] Come hai ragionato per il caso della proiezione del punto improprio A_∞ dalla retta propria s? (si veda Figura 35)

> “Si è costruita la retta r parallela ad a passante per un punto P di S e successivamente il piano passante per S e contenente le rette s e r.”

L’ultima richiesta del Problema 4 è Q4.3+A4.3 in cui si chiede di esplorare le proiezioni dei punti propri A e B se l'asse di proiezione s fosse stata una retta impropria (Figura 36) e, in analogia con Q3.2+A3.2 e Q3.3+A3.3, viene fornita una schermata vuota per realizzare eventuali costruzioni. Come avvenuto nel Problema 3, anche qui RGA1 e RGA2 non sfruttano la schermata GeoGebra fornita ma commentano la costruzione realizzata in precedenza (Figura 70) coordinando una ricca rete di segni verbali e gesti di vario tipo.

<u>Problema 5 – segare con un piano una figura composta da piani e rette (cfr. Sezione 4.6)</u>

Dopo aver letto il testo originale (Figura 37) procedono con Q5.1+A5.1 (Figura 38) in cui viene richiesto di completare una costruzione data segando con un piano proprio una serie di elementi (due piani, di cui uno parallelo al piano di sezione, e tre rette, di cui una parallela al piano di sezione e un’altra appartenente ad esso). RGA1 e RGA2 non completano la costruzione implementandola con i comandi del software ma la descrivono commentando la schermata di Figura 38 con segni verbali e gestuali. Ad esempio, la sezione del piano β con δ viene indicata scorrendo con il cursore del mouse lungo l’intersezione tra i due piani, azione accompagnata da un “Tac” detto a voce. La risposta finale, scritta in maniera diretta e fluida, è:

> “Ottengo due rette proprie in delta (corrispondenti a b e beta), una retta impropria corrispondente ad alfa, un punto proprio corrispondente a c e un punto improprio corrispondente ad a.”

Passano quindi a Q5.2 in cui si chiede di esplorare la sezione con il piano δ di una retta impropria (Figura 39). Dopo la lettura della consegna, una titubanza iniziale espressa attraverso circa 16 secondi di silenzio identifica l’inizio di un nuovo evento critico e dunque l’inizio di un nuovo nodo semiotico. Nei minuti successivi, RGA1 e RGA2 commentano la schermata di Figura 38 facendo ricorso a una complessa rete di segni verbali e gestuali. L’evoluzione dell’attività si sviluppa in una discussione tra le diverse relazioni possibili tra il piano di sezione e la retta impropria, attraversa momenti di confronto sulla possibile natura geometrica dell’intersezione e si risolve con una contrazione semiotica materializzata nella risposta scritta fornita:

> “Se c_{inf} è contenuta in delta è la sua retta all'infinito (coincidente con c_{inf}), altrimenti è un punto improprio.”

Problema 6 – segare con una retta s una figura composta di piani (cfr. Sezione 4.7)

Dopo aver letto il testo originale (Figura 40) procedono con Q6.1+A6.1 (Figura 41) in cui si chiede di realizzare nella schermata GeoGebra una costruzione che visualizzi l'operazione di sezione con una retta di una figura composta di piani. RGA1 e RGA2 costruiscono una retta e stabiliscono che si tratta di trovare tutti i modi in cui un piano "si comporta" rispetto a questa retta. Realizzano quindi la costruzione mostrata in Figura 71:

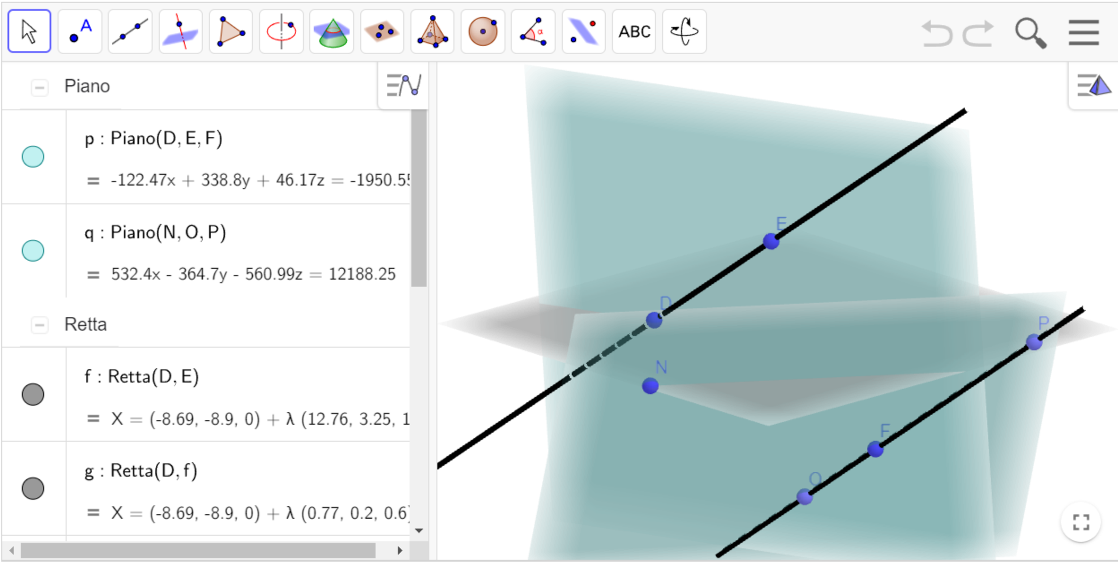


Figura 71: Costruzione realizzata in Q6.1+A6.1.

E, dopo aver commentato la costruzione, inseriscono nel campo di testo la seguente risposta:

> "Ci sono 3 possibilità: la retta è contenuta nel piano, la retta incontra il piano in un punto proprio oppure in un punto improprio."

Problema 7 – elementi corrispondenti (cfr. Sezione 4.8)

Il testo originale (Figura 43) viene letto velocemente a voce alta da RGA1. Come detto nel Capitolo 4, il Problema 7 è composto da 5 coppie Q7.1+A7.1, …, Q7.5+A7.5 (da Figura 44 a Figura 48), ciascuna provvista della sua soluzione, data dall'estratto di testo originale che descrive la specifica situazione presentata. In generale, lo svolgimento dei segmenti di attività scanditi dai vari step proposti nel Problema 7 è fluido, diretto e caratterizzato da un'invariante: anche qui, RGA1 e RGA2 non usano le schermate GeoGebra fornite per realizzare le costruzioni corrispondenti ai vari quesiti proposti ma le usano solo come "scenografia" per il loro confronto.

6.2.4 Problema 8: analisi approfondita di un nodo semiotico

Problema 8 – lemma (cfr. Sezione 4.9)

Il Problema 8 è l'ultimo riferito alle prime due fasi del processo di GGBZ (Figura 22) e dunque l'ultimo in cui vengono introdotte nuove informazioni dal punto di vista del contenuto matematico. Il testo originale con cui si apre il Problema 8, riportato in Figura 49, è più corposo e lungo rispetto ai testi dei problemi precedenti. La prima azione (A8.1, Figura 50) richiede di visualizzare la porzione di testo originale mostrata in Figura 72:

Consideriamo ora due figure $F \equiv (A, ..., a, ...)$, $F' \equiv (A', ..., a', ...)$ le quali appartengano ad uno stesso piano π, e siano proiezioni da due centri diversi S, S' di una stessa terza figura $F_0 \equiv (A_0, ..., a_0, ...)$ appartenente ad un altro piano π_0. Riguardiamo come corrispondenti nelle figure F, F' due elementi (come A ed A' oppure a ed a') i quali siano proiezioni di uno stesso elemento (A_0 od a_0) di F_0.
Allora una retta congiungente punti corrispondenti distinti A, A' di F, F' appartiene al piano π ed inoltre al piano $SS'A_0$, quindi passa per il punto fisso 0 traccia di SS' su π.
D'altra parte due rette corrispondenti a, a' delle due figure F, F' devono passare per la traccia della retta a_0 sul piano π_0 (*n.° 11*), traccia la quale appartiene alla retta $r \equiv \pi\pi_0$; dunque rette corrispondenti distinte di F ed F' si segano in un punto della retta fissa r.

Figura 72: testo da visualizzare in A8.1.

L'azione A8.1 è accompagnata dalla soluzione che, quando attivata, mostra la figura proposta nel libro originale (S8.1, Figura 52). A seguire, la coppia Q8.2 + A8.2 (Figura 53) fa riferimento alla situazione proposta in A8.1 e chiede di esplorare alcune combinazioni di elementi propri e impropri, fornendo una schermata GeoGebra vuota per realizzare la costruzione. L'evento critico (nodo semiotico) che consideriamo in questa sottosezione ha inizio mentre RGA1 e RGA2 sono coinvolti in A8.1 e si evolve durante il loro lavoro in Q8.2 + A8.2. Tale nodo ha particolare rilevanza perché da un lato fornirà un riscontro empirico dell'adeguatezza strutturale data dalle *affordances* di GeoGebra per affrontare tematiche di geometria proiettiva (si veda Sezione 2.3.1). Dall'altro lato, permetterà di mettere a fuoco il ruolo della consapevolezza rispetto al modo in cui una certa tecnologia digitale incarna il sapere culturale e struttura il territorio del pensiero artefattuale (si veda Sezione 3.3.1).

La prima lettura del testo originale del Problema 8 è fatta quasi completamente a voce alta e si alterna a momenti di riformulazione e puntualizzazione verbale di quanto letto. Al termine, RGA1 e RGA2 passano a leggere la consegna di A8.1 e avviano la costruzione partendo dal piano a cui appartengono le due figure proiezione, e scegliendo di considerare come *figura* una configurazione composta da un punto e una retta. Costruiscono quindi le due figure F e F' decidendo di usare colori diversi, verde e rosa, per distinguerle (Figura 73).

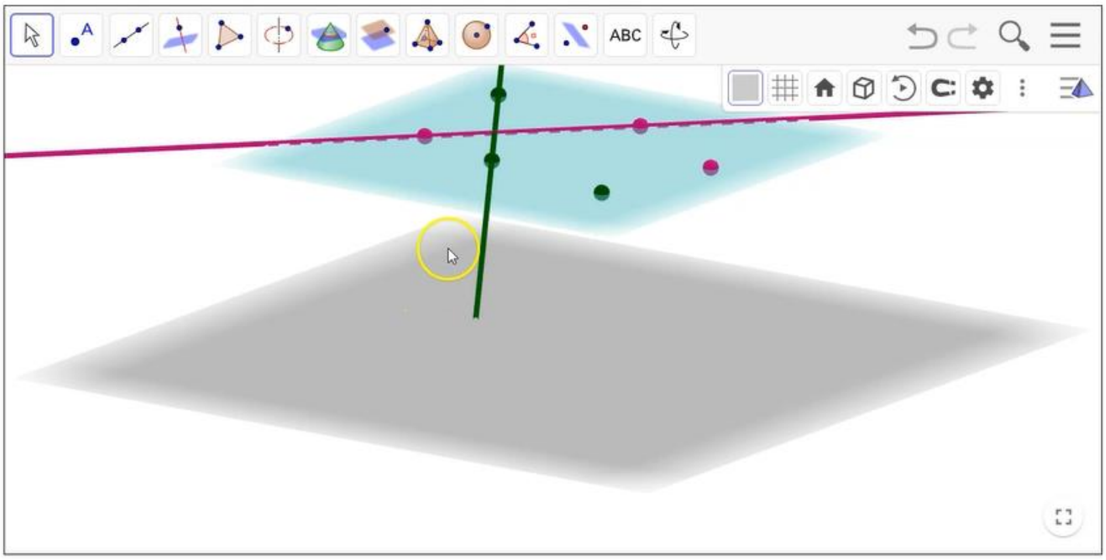


Figura 73: Avvio della risoluzione di A8.1. Il piano azzurro materializza π , gli elementi in rosa e in verde materializzano le figure F e F'.

Dopo aver realizzato tale costruzione, RGA1 e RGA2 tornano nuovamente a leggere il testo originale: consideriamo questo ritorno al testo come l'indicatore di titubanza che segna l'inizio del nodo semiotico in esame.

41. RGA2: perché cos'è che dice? Torna su ((RGA1 con la rotella del mouse scorre fino a visualizzare nuovamente il testo originale e RGA2 indica lo schermo con la penna e inizia a rileggere)) appartenente…di una stessa terza figura F_0 appartenente a un altro piano π_0 ((silenzio, continua a scorrere la penna sullo schermo)) quindi avrei un terzo piano F_0 dove c'hai di nuovo una retta e un punto ((allontana la mano dallo schermo))

42. RGA1: esatto ((con la rotella del mouse scorre nuovamente sulla schermata GeoGebra mostrata in Figura 77)) beh io sceglierei i due punti di proiezione, no?

43. RGA2: si possiamo scegliere o sti ((10 secondi di silenzio in cui entrambi guardano la schermata poi con la penna indica lo schermo)) o fissi il piano la retta ((smette di indicare lo schermo e gesticola con la penna mentre si rivolge completamente verso RGA1)) il punto e poi i corrispondenti punti di intersezione di proiezione saranno dove saranno o scegli i punti di proiezione e…

44. RGA1: quindi tu cosa consigli?

45. RGA2: dovrebbe essere equivalente ehm

46. RGA1: pensare a dare i punti di proiezione, dici?

47. RGA2: mh-mh

I passaggi dal 41 al 47 mettono a fuoco una questione cruciale. La prima frase del testo da visualizzare (Figura 72) introduce prima le due figure proiezione F e F', poi i due centri S e S' e, infine, la figura originaria F_0. Inizialmente, RGA1 e RGA2 per realizzare la costruzione seguono la stessa sequenza, partono dunque dalle due figure F e F'(in rosa e verde in Figura 73), inseriscono i due centri e poi, dopo aver costruito il piano π_0, l'idea è quella di trovare F_0 per proiezione. Così facendo però, ad un certo punto si ritrovano in una situazione che riconoscono come non corretta e devono rifare l'intera costruzione quasi ripartendo dall'inizio. Infatti, è vero che se F (F') è proiezione di F_0 da un certo centro, allora anche F_0 è proiezione di F (F') dallo stesso centro. Tuttavia, per fare in modo che F e F'siano entrambe proiezioni della stessa F_0 da due centri di proiezione diversi, non è possibile scegliere arbitrariamente entrambe le proiezioni e poi andare a ritroso. Se si sceglie di realizzare la costruzione non partendo dalla figura F_0, ciò che andrà fatto è: costruire i due centri S e S'; costruire una delle due figure proiezione (ad esempio F); costruire F_0 proiettando F da uno dei due centri (ad esempio S); infine, "calcolare graficamente" F' per proiezione di *quella* F_0 rispetto al centro S' (l'espressione usata da RGA2 è stata "la costruiamo ad hoc"). Figura 74 mostra la costruzione finale che visualizza la prima frase dell'estratto mostrato in Figura 72.

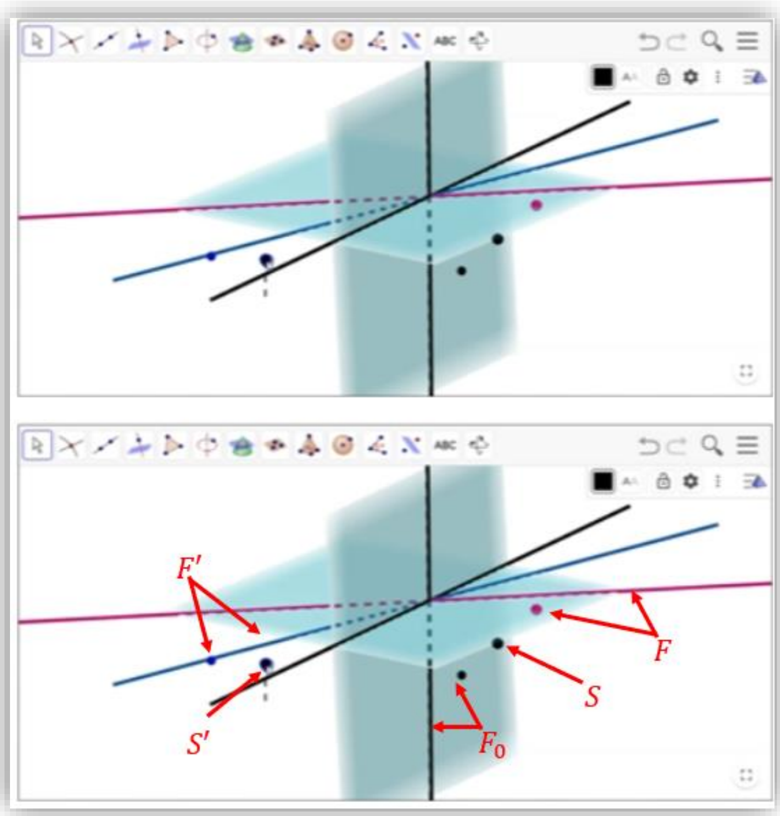


Figura 74: Visualizzazione dinamica della prima frase di testo originale fatta da RGA1 e RGA2; per rendere l'immagine più leggibile viene accompagnata dalla sua decodifica con le notazioni del testo in Figura 72.

Il particolare modo scelto per realizzare la costruzione, che da un punto di vista geometrico è un modo esperto perché sfrutta il fatto che "essere proiezione di" è una relazione simmetrica, ha delle conseguenze che dipendono dal modo in cui il software è progettato e delle quali è necessario tenere conto. Ad esempio, il fatto di essere partiti da F e di aver poi, per proiezione, costruito F_0, rende F_0 (come elemento del disegno GeoGebra) un oggetto dipendente da F, (e quindi, ad esempio, il punto della figura F_0 non è libero e non si può trascinare).

Quanto appena descritto ci permette due riflessioni. Da un lato, mette in evidenza come per materializzare il sapere realizzando la costruzione richiesta sia necessario anche decostruire (e poi ricostruire) l'intero processo del disegnare, che si trova "inscatolato" nelle componenti discorsive del testo a disposizione, ricorrendo ai mezzi semiotici di oggettivazione strutturati dalle *affordances* disponibili nel software GeoGebra. Dall'altro lato, offre la possibilità di riflettere sulla relazione tra due aspetti introdotti nel Capitolo 3: il fatto che le tecnologie digitali strutturano la topologia del territorio artefattuale e il fatto che la conoscenza è, allo stesso tempo, sia privazione che eccesso rispetto al sapere che incarna. Infatti, il modo in cui la costruzione realizzata in GeoGebra incarna il sapere è strettamente legato alle *affordances* del software che, viceversa, possono a loro volta essere interpretate come materializzazioni di aspetti del sapere (con tutti i rischi che questo potrebbe comportare).

RGA1 e RGA2 impiegano circa venti minuti per completare A8.1 e, dopo aver messo in relazione la propria costruzione finale con il disegno originale in S8.1, passano ad affrontare Q8.2 + A8.2 (Figura 53). Leggono la consegna[106], in cui si chiede di esplorare alcune combinazioni di elementi propri e impropri in riferimento a quanto fatto in A8.1 fornendo una schermata GeoGebra vuota, ed esprimono esplicitamente l'esigenza di riempire la schermata fornita con la costruzione da loro realizzata. Questa richiesta testimonia un cambiamento rispetto all'attività nei problemi precedenti. Infatti, anche in questo caso l'approccio è quello di trasformare in maniera continua la costruzione già realizzata mandando all'infinito alcuni elementi ma, mentre prima la discussione avveniva commentando a voce e gesti la costruzione realizzata, stavolta essa viene anche manipolata nel software. Quindi, il sistema di segni che incarna le trasformazioni continue stavolta è più ricco. La schermata che hanno di fronte è riportata in Figura 75 ed è utile ricordare che nella costruzione:

- I punti che hanno il massimo grado di libertà nel trascinamento sono i due centri di proiezione e il punto rosa. Infatti, gli elementi in rosa (che rappresentano F) sono stati i primi ad essere inseriti e tutto il resto della costruzione dipende da essi.

[106] Rispetto a quanto visto finora nell'attività 4, prova ad esplorare alcune combinazioni di elementi propri e impropri: cosa accade? Usa la schermata GeoGebra che segue per realizzare la costruzione e riflettere sulla risposta.

- Gli elementi che rappresentano F_0 e F' sono stati costruiti per proiezione e quindi non sono trascinabili direttamente ma dipendono dagli elementi rosa che rappresentano F.

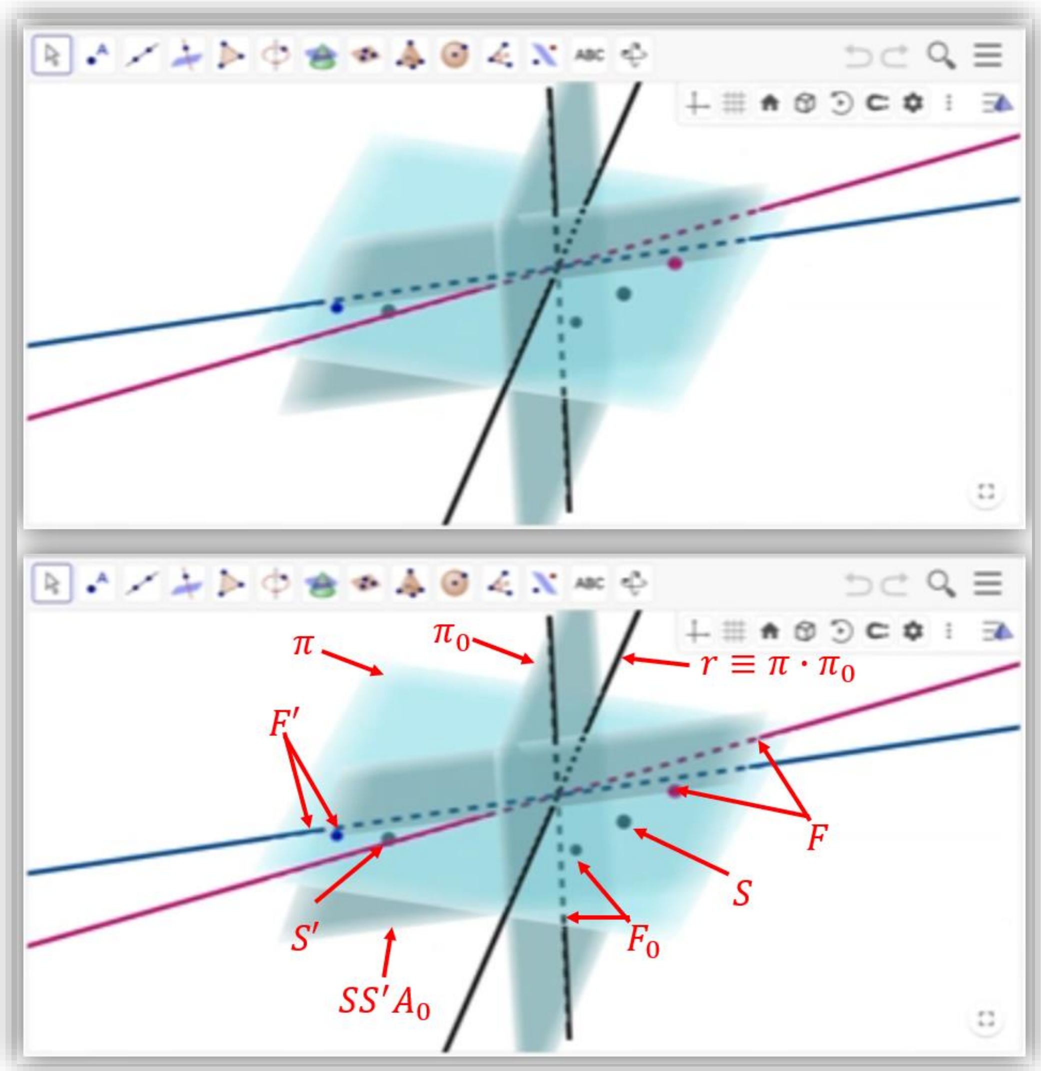


Figura 75: Schermata di partenza nella risoluzione di Q8.2+A8.2: per rendere l'immagine più leggibile viene accompagnata dalla sua decodifica con le notazioni del testo in Figura 72.

48. RGA1: allora, elementi impropri. che facciamo? ((10 secondi di silenzio durante i quali RGA1 muove la visuale della schermata GeoGebra)). Beh direi di togliere questo piano per iniziare sennò non si capisce niente ((nasconde uno dei piani della costruzione)) che era quello della traccia dei due punti

49. RGA2: no ma puoi anche lasciarlo

50. RGA1: lo lasciamo? [RGA2: si] ((annulla l'ultima operazione e il piano torna visibile))

51. RGA2: eee sposterei…cosa vogliamo spostare ((si gratta la testa))? Spostiamo…prova a prendere ((indica lo schermo con un dito in corrispondenza di uno dei centri di proiezione )) questo punto qui S' e portarloo…((fa un gesto con mano come per allontanare qualcosa   ))

L'uso di verbi come "spostare" e "portare" testimonia lo stesso approccio dinamico già esaminato e commentato nei problemi precedenti. Stavolta però, parole e gesti saranno accompagnate anche da azioni sul software. RGA1 inizia a trascinare uno dei centri di proiezione e si confrontano per capire su quale piano si sta muovendo[107]. Ipotizzano di trascinare l'altro centro di proiezione e RGA1 inizia ad alternare momenti in cui trascina dei punti a momenti in cui ruota la visuale senza trascinare niente:

52. RGA2: noi che cosa vogliamo rendere improprio? Le cose che proietti? Le coseee…

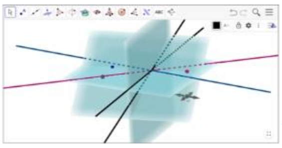
53. RGA1: ((esplora la costruzione continuando a muovere la visuale)) eh bella domanda…((seleziona uno dei centri di proiezione e inizia a trascinarlo)) questo possiamo muovere ((clicca su uno dei centri di proiezione)) ecco esatto …((trascina ancora il centro di proiezione in varie parti della schermata)) se faccio cioè non è si vede tanto esplorando il caso improprio cioè avrai delle situazioni limite

RGA1 smette di muovere la visuale e seguono 40 secondi di silenzio, senza neanche azioni sul software. Poi:

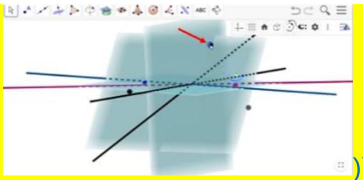
54. RGA1: ((riprende a trascinare con piccoli movimenti uno dei centri di proiezione)) vuoi un punto improprio ((rivolge lo sguardo verso l'alto)) come puoi ((6 secondi di silenzio)) che poi più che il pun- cioè vuoi specializzare impropriamente il punto da cui proietti [RGA2: eh] o le cose che …secondo me le cose che proietti è meglio ((solleva per un attimo la mano dal mouse poi la riappoggia))

55. RGA2: si ma dipende come lo fai perché ((ha la mano appoggiata al mento ma stende le dita in direzione dello schermo)) per esempio se i puntiii quello rosa ooo no ((porta la mano alla spalla)) se vuoi non quello rosa ma quello da cui proietti ((indica lo schermo)) qual è quello [((RGA1, in silenzio, seleziona il centro

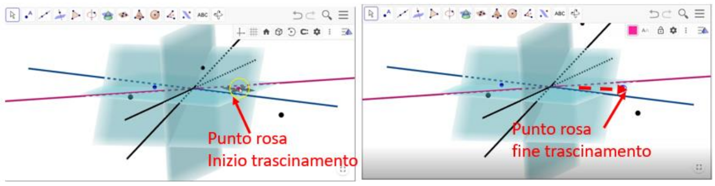
[107] Il fatto che per muovere un punto nello spazio tridimensionale in GeoGebra 3D sia necessario spezzare il trascinamento in due movimenti separati (o su un piano parallelo al piano xy o lungo un asse parallelo all'asse z) si è rivelato un comportamento non semplice con cui familiarizzare. A volte, infatti, il movimento limitato a uno dei due vincoli veniva attribuito a questioni geometriche (come, ad esempio, l'appartenenza del punto trascinato a un certo piano).

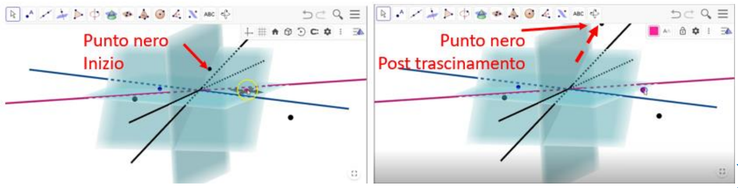
di proiezione che fa ottenere gli elementi rosa ))] quello lì si…se lo portiii se lo muovi ((RGA1 continua a trascinare il punto in varie parti della schermata e la costruzione si modifica di conseguenza))

RGA1 e RGA2 stanno ancora valutando quale caso approfondire e inizialmente si concentrano sul trascinamento di uno dei centri di proiezione, facendo qualche prova (passaggi da 52 a 55). Tuttavia, il comportamento della costruzione al trascinamento risulta a RGA1 e RGA2 ancora poco chiaro e confuso:

56. RGA2: ma lui chi è?
57. RGA1: eh lui è il punto da cui proietto
58. RGA2: ah no allora il punto…che proietto ((indica verso lo schermo))
59. RGA1: ah che proietto che era ((ruota la visuale della schermata GeoGebra))
60. RGA2: quello lassù
61. RGA1: quello lassù si ((seleziona il punto indicato dalla freccia rossa e prova, senza successo, a trascinarlo )) no questo è un punto di intersezione di qualcosa
62. RGA2: dovresti riuscire a muoverlo
63. RGA1: ((continua a muovere la schermata e a tentare di trascinare il punto senza riuscirci)) ah non so perché non me lo fa muovere
64. RGA2: non riesci a prenderlo?
65. RGA1: non me lo fa muovere ((torna a trascinare il centro di proiezione))
66. RGA2: non riesci proprio neanche a selezionarlo
67. RGA1: ((seleziona il punto e muove la schermata)) si ma non me lo fa
68. RGA2: non lo riesci a muovere perché
69. RGA1: si vede che è intersezione

I passaggi da 56 a 69 sono un altro segmento di attività esemplificativo di come sia sfumato e scivoloso il confine tra i comportamenti della costruzione che materializzano aspetti del sapere e comportamenti della costruzione che dipendono dal modo in cui il software struttura i mezzi semiotici di oggettivazione. Il comportamento del punto scelto in 61 rispetto al trascinamento risulta anomalo (il “dovresti riuscire a muoverlo” in 62 si contrappone al “non so perché non me lo fa muovere” in 63) ma è un comportamento che dipende dal modo in cui la costruzione è stata realizzata. Quel punto infatti fa parte di F_0 ma è stato costruito per proiezione da F (e quindi non è un oggetto trascinabile direttamente). Dopo questo scambio, stanno quasi per rinunciare quando RGA2 propone di trascinare il “punto rosa” che è quello da cui è iniziata l’intera costruzione (e, quindi, è quello che ha il massimo dei gradi di libertà). L’effetto del trascinamento del punto rosa sul resto della costruzione offre la possibilità di percepire la situazione in un nuovo modo:

70. RGA2: vedi no? Se tu lo mandi all’infinito ((indica di nuovo con il mignolo lo schermo in corrispondenza del punto rosa ; intanto RGA1 effettua il trascinamento 

e il trascinamento ha effetto anche sul punto nero 

)) vedi anche quello lassù ((RGA1 continua a trascinare il punto rosa e RGA2 sposta il mignolo indicando il punto nero che però al momento è fuori dallo schermo)) ti va all’infinito ((muove la mano verso l’alto allontanandosi oltre lo schermo ))

71. RGA1: eh certo perché son proiezioni no? Certo…si esatto ((continua a trascinare il punto rosa avanti e indietro))

72. RGA1: […] questo va all’infinito ((trascina il punto rosa avvicinandosi al bordo destro della schermata GeoGebra e, a un certo punto, compare il punto nero da sotto)) e tu te lo becchi da dietro ((sposta il cursore sul punto nero appena comparso))

73. RGA2: ((indica lo schermo)) pazzesco

74. RGA1: ((continuando a trascinare il punto rosa avanti e indietro lungo una retta)) ah ci sarà un caso limite in cui bum! lui diventa punto all’infinito ((smette di trascinare il punto rosa e sposta il cursore nella posizione del punto nero muovendosi verticalmente))

75. RGA2: che è quello ((indica lo schermo con il mignolo)) parallelo

Al trascinamento del punto rosa continua a corrispondere il movimento del punto nero, che quindi entra ed esce dallo schermo a seconda della posizione del punto rosa. I passaggi da 70 a 75 segnano un momento di svolta nell'attività: ha inizio un'assonanza tra il comportamento effettivo, sensibile e concreto, della costruzione e il comportamento geometricamente atteso da RGA1 e RGA2. Tale assonanza si rileva già dalla riga 70 - testimoniata dalla sincronia tra la verbalizzazione di RGA2 ("Se tu lo mandi all'infinito vedi anche quello lassù ti va all'infinito"), le azioni di RGA1 nel software e ciò che accade sullo schermo, articolato dai gesti indicali di RGA2 - e si conferma in 71 in cui RGA1, continuando a trascinare, dichiara "e certo perché son proiezioni". In 72 si verifica un comportamento del software che abbiamo descritto in Sezione 2.3.1 commentandone l'affinità rispetto all'ambito della geometria proiettiva. RGA1 sta trascinando il punto rosa avvicinandosi sempre più al bordo destro della schermata GeoGebra (fila di immagini sopra in Figura 76) e il punto nero, che da un certo punto del trascinamento era uscito fuori dallo schermo, ricompare dal basso (fila di immagini sotto in Figura 76):

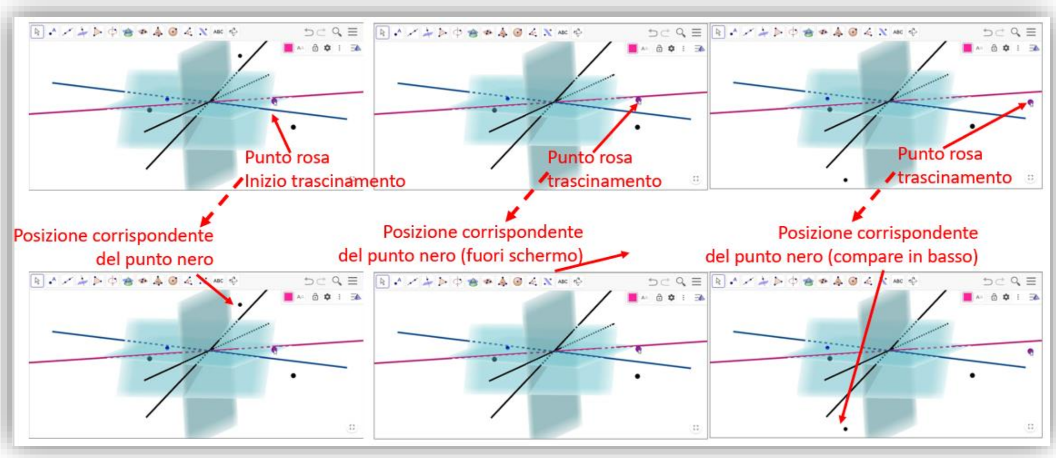
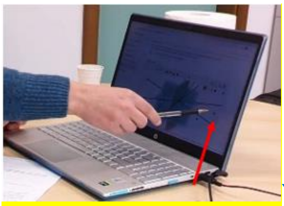


Figura 76: Trascinamento del punto rosa (fila di immagini sopra) e conseguente comportamento del punto nero (fila di immagini sotto).

Tale comportamento del software, che suscita un moto di entusiasmo (riga 73), porta a una nuova percezione della situazione che inizia ad attualizzarsi già a partire dalle righe 74 e 75 ma sarà necessario un lungo *joint labour* perché il processo di addomesticamento dell'occhio si completi. Ne riportiamo di seguito i passaggi più significativi. Dopo un breve confronto su cosa accadrebbe facendo qualcosa di analogo con la retta (infatti, ricordiamo che le figure geometriche scelte sono composte da un punto e una retta), tornano a concentrarsi su cosa accade se è il punto rosa ad andare all'infinito, decidendo di iniziare anche a scrivere la risposta scritta richiesta.

76. RGA1: allora ((inizia a scrivere sulla tastiera verbalizzando)) nel caso in cui un punto su π_0 giusto? Ehm sia un punto improprio… nel caso in cui un punto su π_0 sia un punto improprio ((rilegge quanto appena scritto, poi seguono 5 secondi di silenzio)) cosa accade? ((5 secondi di silenzio poi prende il mouse in mano)) tipo questo ((indica uno dei punti della costruzione)) questo qui è un punto improprio

77. RGA2: eh quello che accade è che quelli ((RGA2 indica lo schermo con la penna )) quelli vengono ((RGA1 inizia a trascinare il punto rosa 

mentre RGA2 continua a indicare lo schermo con la penna)) eh qui adesso non lo vedi ma ci sarà qua ((continua ad indicare lo schermo con la penna spostandosi verso destra )) che a un certo punto vengono ottenuti da ((allontana le mani dallo schermo))…cioè come dire prendi la retta che congiunge lui ((indica con la penna il punto rosa)) lui ((continua a indicare il punto rosa )) era proiettato da lui ((indica uno dei centri di proiezione ))? [RGA1: si] fai questa retta qua ((con la penna traccia la retta tra i due punti appena indicati))

RGA1 costruisce la retta che congiunge il punto rosa e il centro di proiezione (cioè, viene costruita la retta proiettante il punto rosa da quel centro di proiezione) e la nuova schermata è quella in Figura 77.

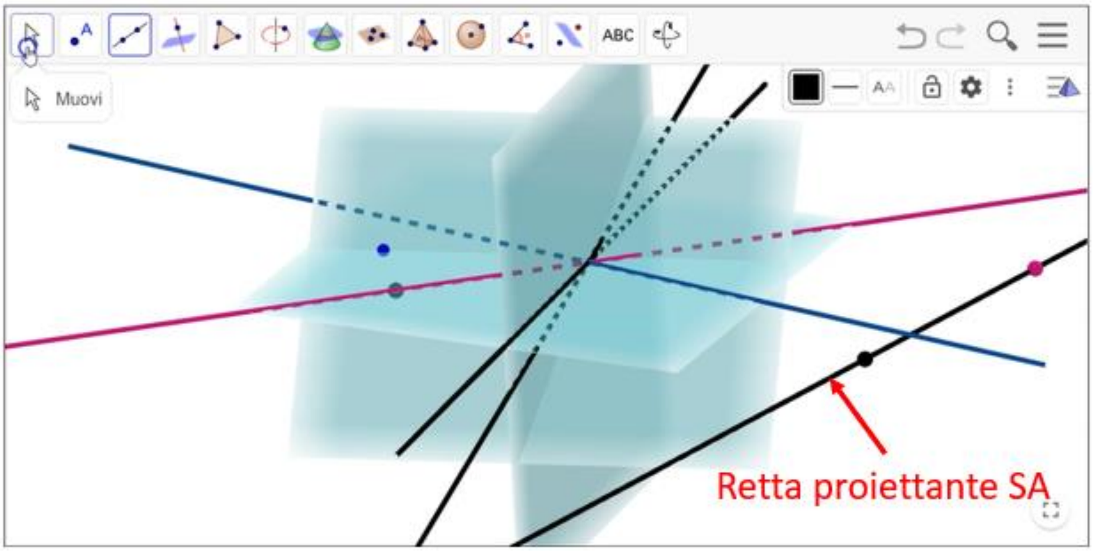
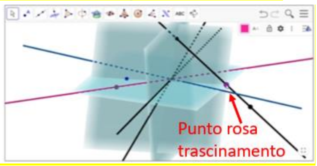


Figura 77: Retta proiettante SA.

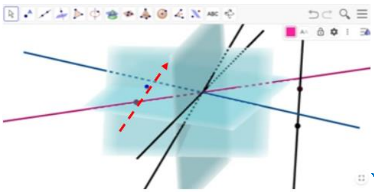
78. RGA2: quella lì no? Andando giù a un certo punto se tu sposti lui ((RGA2 punta la penna verso lo schermo e RGA1 trascina il punto rosa 

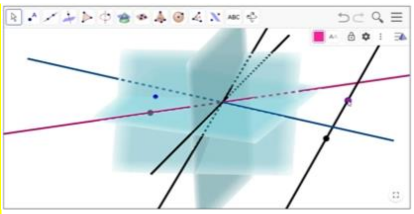


)) ci sarà a un certo punto che sostanzialmente esatto che praticamente quando è il punto all'infinito questa retta qua ((indica con la penna l'ultima retta costruita )) proiettante è parallela ((indica con la penna ancora lo schermo, muovendola su e giù )) a..il ((apre la mano stendendo il braccio )) allo schermo

Nei passaggi da 76 a 79 vediamo la rete di mezzi semiotici di oggettivazione arricchirsi e la percezione di RGA1 e RGA2 precisarsi sempre più. In 76, l'esigenza di formulare la risposta scritta li porta a ripercorrere il loro ragionamento prima in termini generali ("cosa accade") e poi istanziato in un caso specifico ("tipo questo questo qui è un punto improprio"). La riga 77 segna un momento cruciale: nella prima parte, mentre RGA1 riprende a trascinare il punto rosa, RGA2 manifesta una sorta di "delusione": "adesso qui non lo vedi ma […]". Mosso dalla delusione di "non vedere" ciò che serve, RGA2 richiede l'aggiunta di un nuovo elemento: la retta proiettante il punto rosa da uno dei due centri di proiezione. Questo nuovo segno assume un importante ruolo di mezzo semiotico di oggettivazione che entra in rete e assonanza con tutti gli altri. Infatti, l'aggiunta alla costruzione di questa retta (che da un punto di vista geometrico ha un ruolo importante) fornisce un nuovo impulso all'attività:

79. RGA1: esatto esatto ((continuando a trascinare il punto rosa, poi torna con il cursore alla risposta che stava scrivendo)) nel caso in cui un punto su π_0 sia un punto improprio ((rilegge quanto scritto e prosegue a scrivere)) la retta ehm

80. RGA2: o le rette perché anche lui ((indica lo schermo con la penna  in corrispondenza degli elementi in blu che rappresentano la seconda figura proiezione poi si allontana e alza gli occhi verso il soffitto)) anche lui no? ((torna ad indicare lo schermo con la penna)) anche questa qua ((percorre con la penna una linea che congiunge il punto blu e il secondo centro di proiezione, cfr freccia rossa tratteggiata )) le due rette perché anche lei sarà parallela al piano

81. RGA1: esatto esatto esatto ((riprende a trascinare il punto rosa in modo da visualizzare il parallelismo )) esattamente ((continua a trascinare)) si

Tra 79 e 81 il ragionamento viene ampliato anche al punto della seconda figura proiezione che rappresenta F' (in blu) e tutti le componenti materiali e ideali vengono messe in relazione significativa tra loro:

82. RGA2: ((indicando lo schermo)) perché praticamente questa retta ((scorre il dito lungo una linea che connette il punto blu e il secondo centro di proiezione )) si incontra in un punto

83. RGA1: ((rilegge il testo scritto)) improprio…

84. RGA2: ((inizia a dettare)) allora le due rette

85. RGA1: ((sostituisce nella risposta scritta "la retta" con "le due rette")) ehm ((muove la mano a paletta davanti a sé))

86. RGA2: allora questo qui ((indicando la parte iniziale della risposta che stanno scrivendo )) il punto l'abbiamo chiamato A_0 mi sembra?

87. RGA1: si ((scrive a_0 minuscolo))

88. RGA2: A grande ((RGA1 corregge)) allora le due rette ((rilegge e poi riprende a dettare)) SA e $S'A'$

89. RGA1: no SA_0 direi cioè la retta SA_0

90. RGA2: ((indica lo schermo con la penna )) SA e SA_0 [RGA1: esatto] scusami SA e $S'A'$ ((sposta la penna per indicare ogni volta nello schermo l'oggetto nominato)) che sono le due rette proiettanti saranno parallele ((con la penna percorre il piano rappresentato nello schermo)) al piano π_0

91. RGA1: ((prosegue a scrivere)) SA e $S'A'$ sono parallele al piano π_0 giusto? [RGA2: mh-mh] Ok. ((5 secondi di silenzio)) Esatto

La risposta finale, il cui processo di scrittura è iniziato alla riga 76, si conclude in 91:

> "Nel caso in cui un punto A0 su pi0 sia un punto improprio allora le due rette SA e S'A' sono parallele al piano pi0."

Il confronto tra RGA1 e RGA2 però prosegue:

92. RGA2: cioè per cui se tu fai anche questa retta qua ((indica nello schermo l'altra coppia di punti che sarebbero e $S'A'$ ))

93. RGA1: esatto sarà parallela allo stesso piano

94. RGA2: prova a farla ((continuando ad indicare lo schermo))

I passaggi tra 82 e 94 testimoniano che l'incontro con modi storico-culturali di pensare matematicamente all'operazione di proiezione - relativo a ciò che accade quando nella visualizzazione dinamica del blocco di testo in Figura 72 si considera improprio uno dei punti della figura di partenza da proiettare – avviene pienamente. La dinamica dei mezzi semiotici di oggettivazione impiegati rivela come tutti gli elementi coinvolti si stiano consustanziando in una relazione significativa: l'incontro con il punto improprio (riga 82) si materializza nel parallelismo delle rette proiettanti (riga 90) al piano schermo (riga 93).

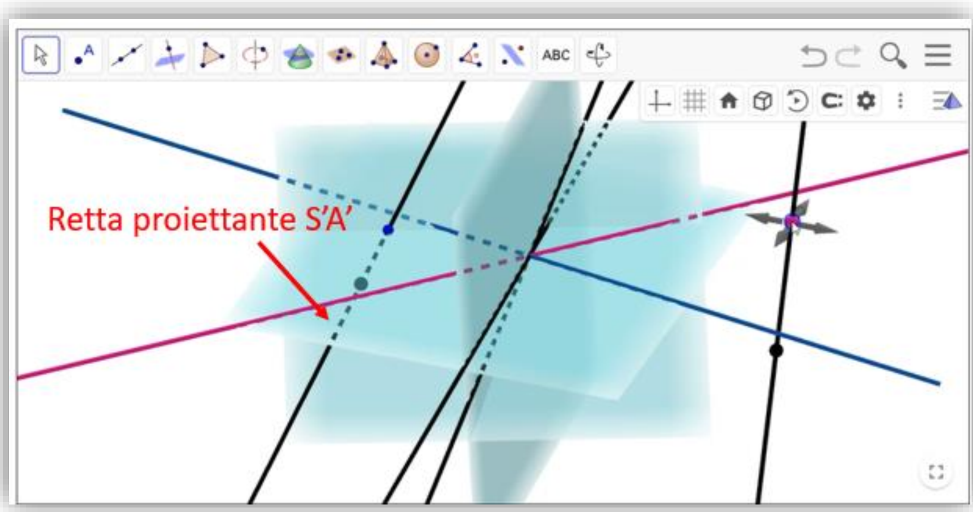


Figura 78: retta proiettante $S'A'$ costruita.

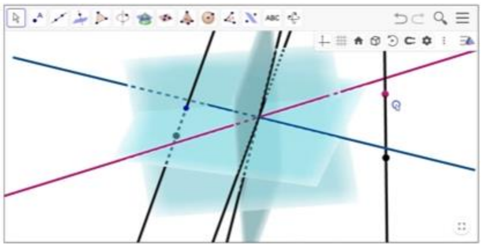
A questo punto, RGA1 costruisce anche la retta $S'A'$ richiesta (Figura 78): la costruzione contiene ora tutti gli elementi necessari ad attualizzare e rendere sensibile in un ultimo segmento di *joint labour* ciò che all'inizio del segmento di attività qui esaminato era potenzialità, era qualcosa che si opponeva a RGA1 e RGA2.

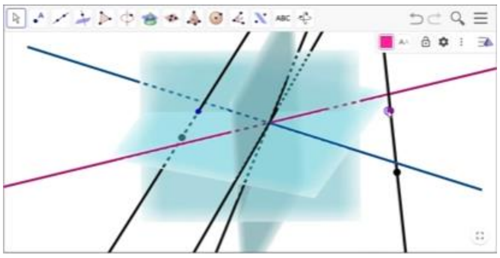
95. RGA2: ora basta muovere quello rosa ((indica lo schermo con la penna in corrispondenza del punto rosa))

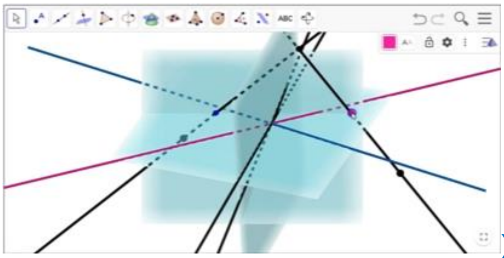
96. RGA1: ((iniziando a trascinare)) c'è una situazione limite in cui i punti

97. RGA2: perché se li avvicini si incontrano ((indica lo schermo con la penna ))

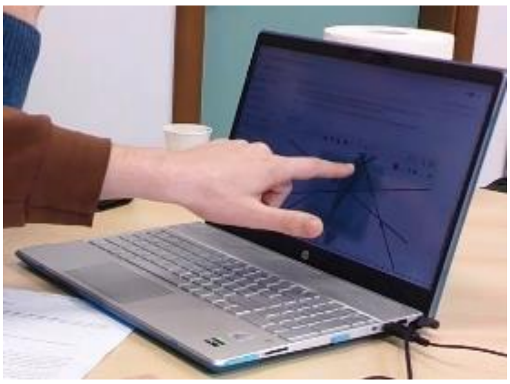
98. RGA1: esatto ((e intanto effettua il trascinamento del punto rosa

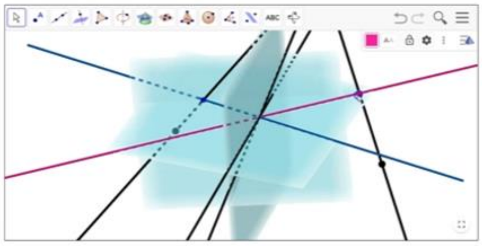
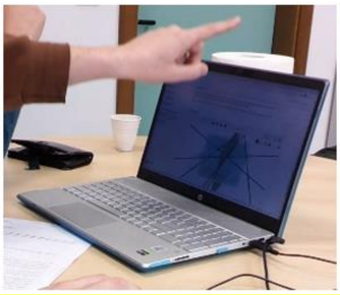






)) e si incontrano sul punto che è quello da cui proietto ((indica lo schermo in corrispondenza del punto di incontro tra le due rette S'A' e SA che sarebbe A_0



)) se questo va all'infinito ((continua a indicare con il dito il punto si incontro tra le due rette S'A' e SA e ne segue il movimento mentre, al trascinare il punto rosa verso il bordo destro della schermata GeoGebra, esce fuori dallo schermo  ))

99. RGA2: loro sono parallele

100. RGA1: esatto.

101. RGA2: E se vai avanti ((indica lo schermo con la penna)) si incontrano sotto.

102. RGA1: e se vado avanti si incontrano sotto ((continuando a trascinare il punto rosa fino a che l'intersezione tra S'A' e SA, cioè A_0 non ricompare da sotto)).

RGA1 continua il trascinamento del punto rosa portandolo fuori dallo schermo e l'intersezione compare in basso. La Figura 79 esemplifica il comportamento della costruzione commentato tra 95 e 102.

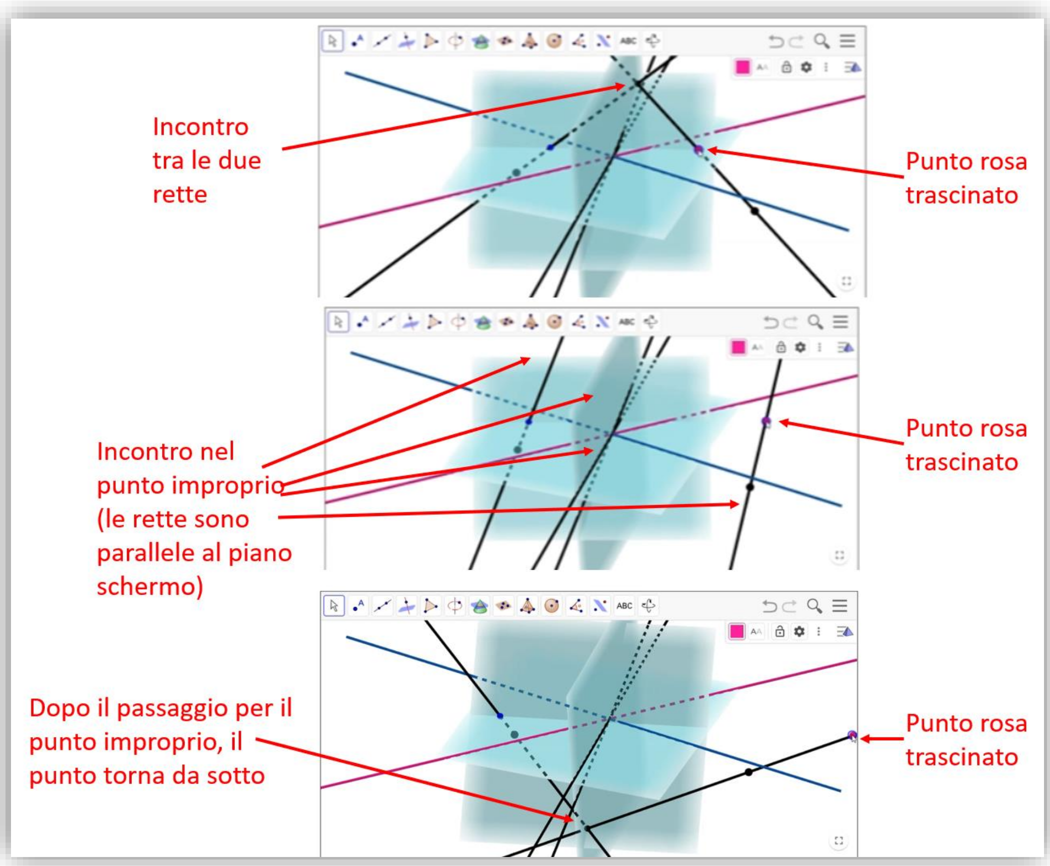


Figura 79: Comportamento della costruzione commentato tra 95 e 102.

Tra 95 e 102 avviene una riorganizzazione dei mezzi semiotici di oggettivazione impiegati che materializzano una sorta di sintesi del lungo processo di oggettivazione il cui inizio è stato individuato in 41. Rispetto a quanto avvenuto nei passaggi precedenti al 95, in quest'ultimo segmento di attività, c'è maggiore precisione e sincronia tra i vari segni. Ad esempio, il ritmo di trascinamento cambia e viene scandito da gesti e parole che si coordinano descrivendo gli effetti di ogni momento della trasformazione continua in atto che, per ricollegarci in uno dei momenti iniziali del processo, materializza lo "specializzare impropriamente" (riga 54) di ciò che viene proiettato, che, in linea con l'approccio dinamico che ha caratterizzato l'attività di RGA1 e RGA2, viene portato all'infinito. Interpretiamo questa rifinitura come una contrazione semiotica che chiude l'evento critico e, dunque, il nodo semiotico analizzato.

6..5 Parte conclusiva dell'attività: Problema 9

A RGA1 ed RGA2 viene proposto di lavorare sulla dinamizzazione del testo originale relativo al Lemma che nella prima parte dell'attività è il testo affrontato nel Problema 8 (e che in Castelnuovo, 1904, corrisponde al Paragrafo 13). In questo incontro, RGA1 e RGA2 lavorano in sincrono su Google Meet condividendo lo schermo del PC in cui sta lavorando RGA2 (che quindi manovra sia mouse che tastiera). Iniziano con la rilettura del testo originale di partenza e, dopo una prima rilettura silente, RGA2 chiede esplicitamente indicazioni su quanto il testo del loro applet debba essere fedele rispetto al testo originale. Motiva la sua richiesta spiegando di aver osservato che le prime quattro righe del testo originale sono molto separate rispetto a quelle dopo. In particolare, facendo riferimento a Figura 80, l'osservazione di RGA2 è: mentre nelle quattro righe iniziali le figure F e F' sono due figure in due piani diversi (cfr. evidenziature gialle), nella seconda parte del testo F e F' indicano due figure nello stesso piano (cfr. evidenziature verdi). Quindi la proposta per l'applet che stanno realizzando è quella di *modificare le notazioni* in modo da rendere la costruzione uniforme. In particolare, la proposta è quella di indicare le figure delle prime quattro righe con le notazioni F_0 e F per poi, nella seconda parte del testo, costruire F' dallo stesso F_0 già presente nella costruzione.

Paragrafo 9 (testo originale)

Fu già osservato (n° 11) che se due figure $F \equiv (A, \ldots, a, \ldots)$, $F' = (A', \ldots, a', \ldots)$ appartenenti a due piani π, π', sono proiezioni l'una dell'altra da un centro S, allora tutte le rette AA', . . . che congiungono punti corrispondenti distinti delle due figure, passano per uno stesso punto S, mentre tutti i punti aa', . . . in cui si segano rette corrispondenti distinte delle due figure, appartengono ad una stessa retta $r \equiv \pi\pi'$.

Consideriamo ora due figure $F \equiv (A, \ldots, a, \ldots)$, $F' \equiv (A', \ldots, a', \ldots)$ le quali appartengano ad uno stesso piano π, e siano proiezioni da due centri diversi S, S' di una stessa terza figura $F_0 \equiv (A_0, \ldots, a_0, \ldots)$ appartenente ad un altro piano π_0. Riguardiamo come corrispondenti nelle figure F, F' due elementi (come A ed A' oppure a ed a') i quali siano proiezioni di uno stesso elemento (A_0 od a_0) di F_0. Allora una retta congiungente punti corrispondenti distinti A, A' di F, F' appartiene al piano π ed inoltre al piano $SS'A_0$, quindi passa per il punto fisso 0 traccia di SS' su π.

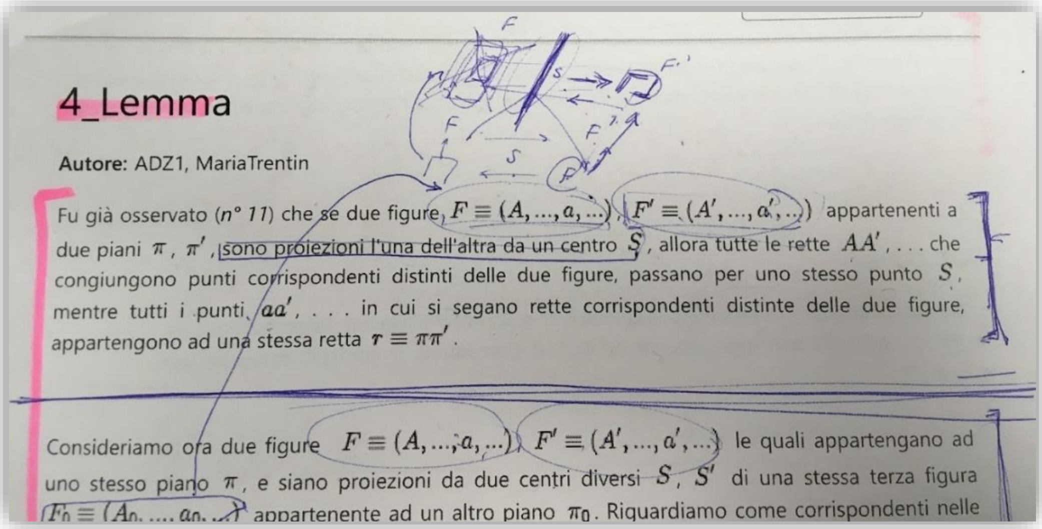
Figura 80: Osservazione sulle notazioni.

Questa osservazione sul testo, seguita da una proposta di iniziativa per la sua modifica, ci permette una prima riflessione. Tale disaccordo nelle notazioni nel testo originale è *sempre stato presente* ma *non era stato notato* durante la loro prima lettura di questo estratto di testo originale fatta nell'ambito del segmento di attività strutturato dal Problema 8 (prime due fasi del processo di GGBZ). Interpretiamo questo punto come una conferma del fatto che nell'attività precedente sia *effettivamente* avvenuto un apprendimento che è qui testimoniato dal nuovo modo di percepire un testo a loro già noto.

Una volta concordate le notazioni da usare, pianificano a voce il comportamento dell'applet e l'idea è di:

- partire disegnando F_0 e fissando il centro S;
- per proiezione, costruire F ed evidenziare tutte le osservazioni del primo blocco di testo;
- introdurre un secondo centro di proiezione S' da cui proiettare F_0 per trovare F';
- evidenziare tutte le osservazioni del secondo blocco di testo.

In questo confronto, un passaggio su cui si sono soffermati particolarmente è l'inciso a cavallo tra la prima e la seconda riga del testo in Figura 80 in cui si specifica che le due figure iniziali "sono proiezioni l'una dell'altra dal centro S". Il confronto su come gestire quel particolare estratto di testo si protrae per circa sette minuti e ruota attorno alla scelta di come gestire il comportamento dell'applet in modo da rispettare il fatto che Castelnuovo tiene proprio ad esplicitare questo aspetto. RGA2 a un certo punto dice esplicitamente: "perché lui lo sottolinea proprio che sono uno la proiezione dell'altro. Di per sé nel testo a lui non servirebbe così tanto quindi decide proprio di sottolinearla come cosa perché, cioè, se tu togli quella riga di per sé tutto il resto del testo funziona ancora […] era per dargli credito su quella cosa lì e sottolinearla". Durante questo momento di confronto, RGA produce sui fogli stampati che riportano il testo originale esaminato anche uno schema diagrammatico commutativo in cui visualizza le varie relazioni di proiezione tra le diverse figure (Figura 81). Durante tutti i momenti di confronto con RGA1 rispetto al comportamento dell'applet per spacchettare la matematica incorporata nel testo dell'inciso, tale schema viene usato come base per scandire i vari passaggi e ritmare quanto detto a voce (con la penna, RGA2 si muove nel diagramma in base alla figura di cui sta parlando).


4_Lemma

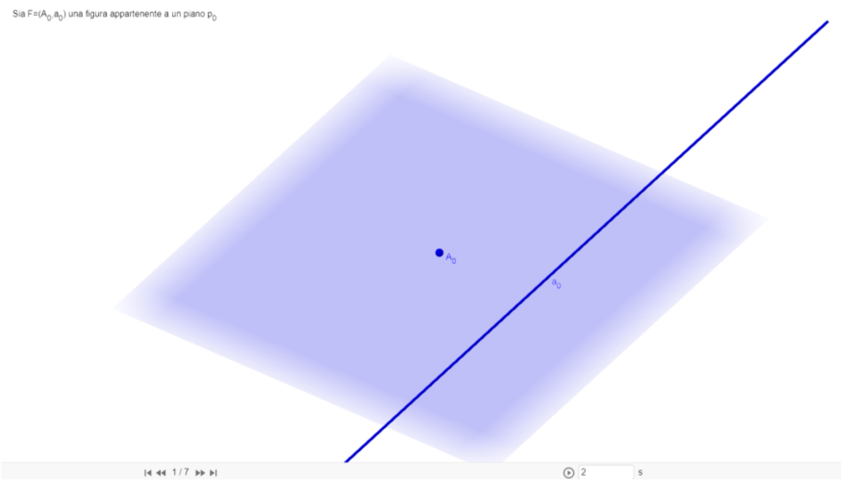
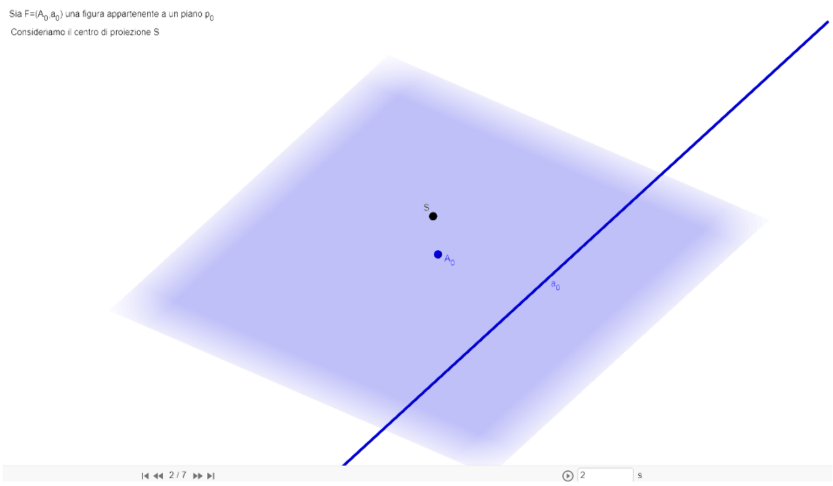
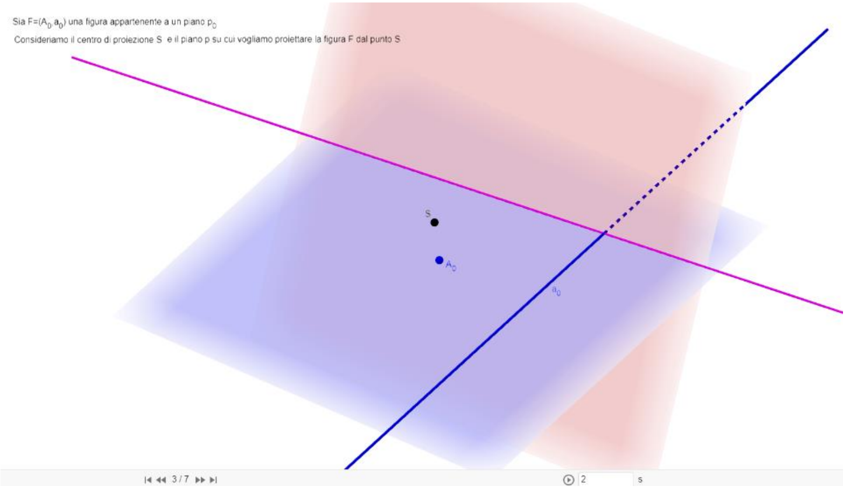
Autore: ADZ1, MariaTrentin

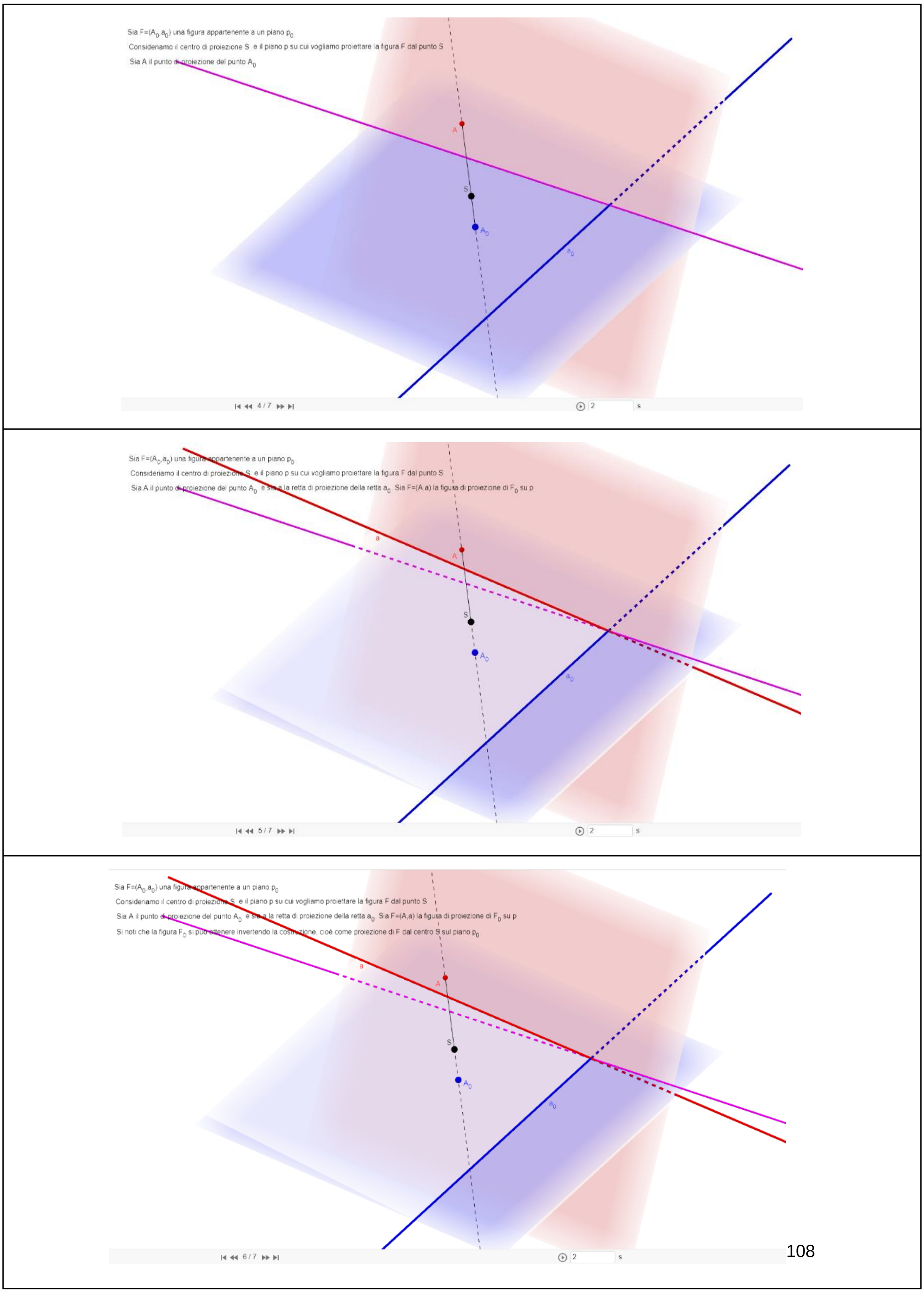
Fu già osservato (*n° 11*) che se due figure, $F \equiv (A, \ldots, a, \ldots)$, $F' \equiv (A', \ldots, a', \ldots)$ appartenenti a due piani π, π', sono proiezioni l'una dell'altra da un centro S, allora tutte le rette AA', . . . che congiungono punti corrispondenti distinti delle due figure, passano per uno stesso punto S, mentre tutti i punti aa', . . . in cui si segano rette corrispondenti distinte delle due figure, appartengono ad una stessa retta $r \equiv \pi\pi'$.

Consideriamo ora due figure $F \equiv (A, \ldots, a, \ldots)$, $F' \equiv (A', \ldots, a', \ldots)$ le quali appartengano ad uno stesso piano π, e siano proiezioni da due centri diversi S, S' di una stessa terza figura $F_0 \equiv (A_0, \ldots, a_0, \ldots)$ appartenente ad un altro piano π_0. Riguardiamo come corrispondenti nelle

Figura 81: Diagramma disegnato da RGA2

Durante il resto dell'incontro, vengono realizzate due applet articolati in due diverse *Attività GeoGebra*. Il primo si riferisce al primo paragrafo: è visionabile al seguente link https://www.geogebra.org/m/wdv7jgzy e i diversi step che lo compongono sono riportati in Tabella 11. Il secondo, riferito al secondo paragrafo, non è stato completato (e quindi non verrà commentato).

STEP DELL'APPLET FINALE RELATIVO AL PRIMO PARAGRAFO DI TESTO






[108]

[108] Il testo aggiunto in questo passaggio fa riferimento all'inciso su cui hanno discusso a lungo all'inizio dell'incontro. Infatti, usando solo la funzione [Mostra/Nascondi] non è stato possibile ottenere il comportamento che avrebbero desiderato per l'applet, in cui avrebbero voluto mostrare le due direzioni di proiezione in due sequenze separate per permettere di riconoscerne la coincidenza percettivamente e materialmente.

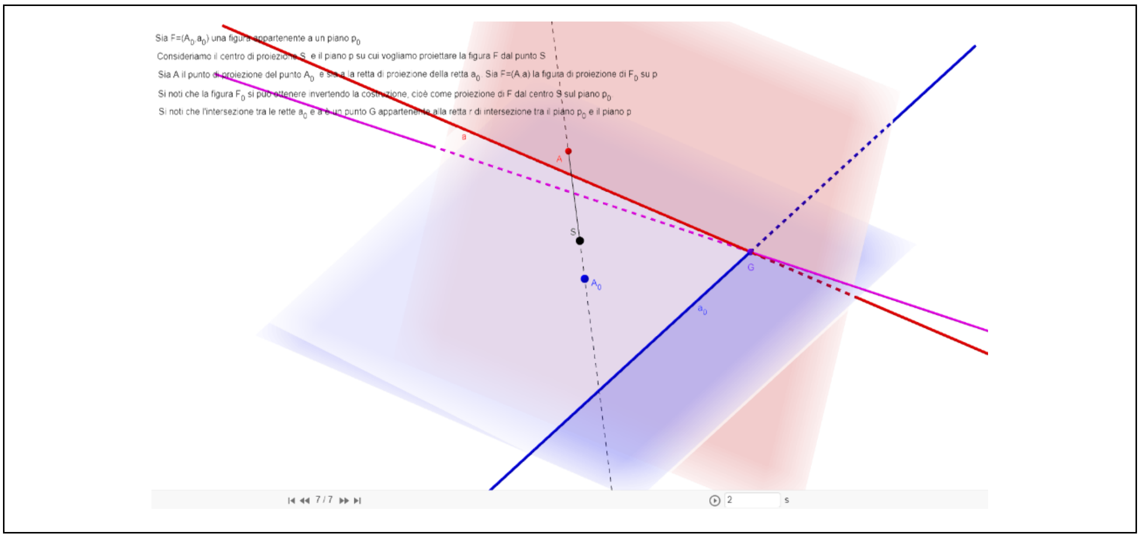


Tabella 11: Applet relativo al testo del primo paragrafo.

Il processo di realizzazione dell'applet è stato scandito nelle seguenti fasi:

- Lettura e analisi del testo originale, con definizione delle già discusse proposte di modifica.
- Costruzione di *tutti* gli elementi grafici che costituiscono la visualizzazione dinamica dell'intero testo in esame. Infatti, la scelta di RGA1 e RGA2 è stata quella di realizzare una visualizzazione unica contenente tutto e poi, in un secondo momento, "accendere e spegnere" solo gli elementi necessari usando la funzionalità [Mostra/Nascondi][109]. Per facilitare questo tipo di procedimento, RGA1 e RGA2 hanno sempre tenuto aperta anche la *Vista Algebra* (in cui la scelta di quali elementi rendere visibili è particolarmente agile da implementare). In particolare, per la realizzazione della visualizzazione dinamica, RGA1 e RGA2 hanno seguito il seguente approccio:
    - costruzione degli elementi costituivi introdotti nella prima parte del testo (figura di partenza - che RGA1 e RGA2 hanno stabilito essere composta da un punto e una retta e che hanno chiamato F_0 - con il suo piano di appartenenza; centro di proiezione S; piano schermo della proiezione; figura F costruita implementando la proiezione di F_0 da S);
    - ritorno al testo originale e controllo della presenza nella costruzione di tutti gli elementi necessari.

[109] In GeoGebra ci sono due livelli per gestire la visibilità degli elementi di una costruzione. Uno, di base, permette di decidere a livello globale quali elementi della costruzione rendere visibili (funzionalità [Mostra/Nascondi], maggiori dettagli qui https://wiki.geogebra.org/en/Show_/_Hide_Object_Tool). Un altro, più avanzato, permette di gestire la visibilità degli elementi sulla base di certe condizioni (funzionalità [Visibilità condizionata], maggiori dettagli qui https://wiki.geogebra.org/en/Conditional_Visibility). Nella sperimentazione qui descritta, abbiamo fatto riferimento solo alla funzionalità ([Mostra/Nascondi].

- Esplicitazione e personalizzazione di tutte le etichette di ciascuno degli elementi presenti nella costruzione realizzata.
- Momenti di confronto su come sfruttare le funzioni di personalizzazione dello stile degli oggetti della costruzione (colore, spessore, posizione relativa, visuale prospettica dello schermo…) in funzione della chiarezza comunicativa. In particolare, hanno sfruttato:
  - parametri di stile (come lo spessore delle linee o la trama di colorazione superficiale dei piani) per distinguere figure e centri di proiezione da rette e piani proiettanti;
  - parametri cromatici sia per indicare elementi da "pensare insieme" (ad esempio, la figura di partenza e il suo piano di appartenenza) sia per indicare intersezioni (ad esempio, l'intersezione tra un elemento blu e uno rosso viene colorata di viola, colore risultante dal blu e rosso insieme).
- Momenti di simulazione e monitoraggio del comportamento voluto dalla costruzione. Concretamente, la simulazione avveniva usando la funzionalità [Mostra/Nascondi] nella *Vista Algebra* per mostrare l'aspetto della costruzione in un certo step e, simultaneamente, verbalizzare ciò che il testo associato a quella visualizzazione avrebbe contenuto. Questi momenti hanno avuto una funzione di "progettazione" rispetto al comportamento voluto per l'applet finale e, quindi, hanno fornito la traccia per l'inserimento dei [Punti di interruzione].
- Momenti, come ad esempio quello riportato all'inizio di questa sottosezione in riferimento all'inizio nella prima frase del testo originale, in cui Castelnuovo viene esplicitamente chiamato in causa.

6.2.6 Riflessioni conclusive sulla coppia RGA1 e RGA2

Rispetto alle altre coppie di partecipanti, i due geometri algebrici si sono rivelati molto veloci nello svolgere l'attività e terminano tutti i primi otto problemi nel primo incontro. Tuttavia, anche nell'analisi della loro attività di GGBZ del testo sono stati individuati numerosi nodi semiotici – quattro dei quali, localizzati rispettivamente nei Problemi 2, 3, 4 e 8 – che sono stati descritti e analizzati in modo più o meno dettagliato nelle sottosezioni precedenti. Tali nodi, per quanto abbiano una durata breve, usando i criteri di enucleazione degli eventi critici presentati nella Sezione 5.3 sono *riconoscibili* e, dunque, *presenti*. Questo indica che anche per il caso di RGA1 e RGA2 si è verificato un processo di oggettivazione che ha portato a una trasformazione dell'occhio testimoniata dall'approccio avuto durante l'attività nel Problema 9. Rispetto alla modalità di partecipazione all'attività, possiamo mettere in evidenza tre particolarità. La prima riguarda il modo in cui GeoGebra è stato usato o forse sarebbe più corretto dire, a volte *non* usato. Infatti, tranne nel caso del Problema 8, in tutte le azioni in cui veniva fornita una schermata vuota in cui realizzare una costruzione e in tutte le azioni del Problema 5, RGA1 e RGA2 non hanno realizzato le costruzioni richieste ma hanno sempre commentato a voce e a gesti costruzioni già esistenti. Il Problema 8 è, in questo senso, stato un momento cruciale dell'attività: infatti, per la prima volta, anche le funzionalità del software hanno avuto parte attiva nella rete di mezzi semiotici di oggettivazione impiegati, con importanti effetti in termini di oggettivazione. La seconda particolarità riguarda l'approccio a tutte le situazioni geometriche proposte, impregnato e caratterizzato dal loro occhio da geometri algebrici che cercano invarianti di trasformazioni continue. La terza particolarità riguarda una sorta di rispetto per ciò che Castelnuovo ha ritenuto importante scrivere nel testo, rispetto che si è manifestato in maniera esplicita e con forza durante il lavoro nel Problema 9 e, in particolare, nella lunga discussione sul modo di materializzare l'inciso che Castelnuovo aveva avuto cura di inserire.

6.3 Coppia Ricercatori in Didattica della Matematica (DDM1 e DDM2)

Globalmente, il percorso di DDM1 e DDM2 si snoda nell'arco di quattro incontri; in tutte le sessioni di lavoro sia mouse che tastiera venivano tendenzialmente manovrati da DDM2. Come anticipato nella parte introduttiva del presente capitolo, per questa coppia di matematici esperti in didattica della matematica, daremo maggiore spazio agli spunti di analisi e riflessione rispetto al processo di GGBZ emersi dalle loro riflessioni metacognitive. Quindi, rispetto allo svolgimento dell'attività in sé, presenteremo solo una breve panoramica, limitandoci alla notifica di presenza e descrizione sintetica di uno dei nodi semiotici.

6.3.1 Panoramica del lavoro nei Problemi 1, 2 e 3

Problema 1 - punti propri e impropri (cfr. Sezione 4.2)

DDM1 e DDM2 iniziano con la lettura del testo originale (Figura 23) e, a mano a mano che vanno avanti a leggere, ne commentano/riformulano dei passaggi. Facendo riferimento a quanto riportato da Radford e Santi (2022) riguardo al senso di straniamento generato dalla lettura di testi storici, sentiti come qualcosa di alieno (p. 1485), una delle espressioni che ha generato particolare perplessità a DDM1 e DDM2 è l'uso del verbo "segare" invece del più familiare "intersecare". Alla lettura dell'espressione "punto improprio" esplicitano la riattivazione ricordi (più o meno recenti) e collegamenti rispetto allo studio universitario della geometria proiettiva, per il quale hanno esperienze diverse[110]. La risoluzione di

[110] Entrambi l'hanno affrontato nel corso di Matematiche Elementari da un Punto di vista Superiore ma in anni diversi, con docenti diversi e con approcci diversi (a DDM1 la geometria proiettiva era stata introdotta come estensione della geometria euclidea; a DDM2 era stata introdotta per via assiomatica).

A1.1 procede in maniera diretta e fluida e, nel momento in cui si tratta di realizzare la costruzione in GeoGebra:

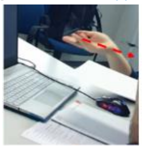
1. DDM1: Quindi l'idea è se hai capito che in realtà parliamo di parallele usi il comando retta parallela giusto?
2. DDM2: si
3. DDM1: cioè cioè perché il punto all'infinito ((punta la mano davanti a sé muovendola con piccoli movimenti ritmici su e giù )) ovviamente non è un puntooo [DDM2: cliccabile] cliccabile.

Questo breve scambio mette in evidenza la delicatezza del disegnare in GeoGebra, istanziando anche in questo contesto quella specie di rottura percettiva creata dagli elementi impropri (Osservazione 3.3 nel Capitolo 4). Infatti, le parole di DDM1 in 1 mettono in evidenza la presenza (e l'importanza) del passaggio in cui le informazioni date dal testo originale letto ("Congiungere un punto proprio B con A_∞ vuol dire condurre per B a retta parallela ad a") vengono materializzate attraverso le funzioni del software. In questo senso è di particolare interesse la riga 3 in cui entrambi fanno riferimento alla relazione tra punto e "cliccabilità" in ambito software, sottolineando una sorta di rottura che la gestione del punto all'infinito crea rispetto alle interazioni familiari con il software - in cui, ad esempio, per costruire un oggetto [Punto] basta, una volta attivato il comando, un unico clic.

Problema 2 - rette proprie e improprie (cfr. Sezione 4.3)

La lettura del testo originale è ogni tanto alternata a momenti di riformulazione e scorre fluidamente fino alla riga finale ("Una retta all'infinito è individuata quando si dia un piano che la contenga, che abbia giacitura definita dalla retta") in cui si verificano segni di titubanza (silenzi e rilettura) che, rispetto all'analisi dello svolgimento dell'attività, è stato interpretato come l'inizio di un evento critico, e quindi di un nodo semiotico, che riguarda la visualizzazione degli elementi impropri e che, di fatto, si è sviluppato nell'arco dell'intero primo incontro, avendo il suo apice durante il Problema 3. Il primo dei passaggi cruciali del processo di oggettivazione testimoniato dal nodo e descritto dalla dinamica dei mezzi semiotici di oggettivazione, si verifica già nella rilettura della riga finale, in cui DDM1 e DDM2 materializzano con una ricca rete di segni verbali e gestuali la relazione tra quanto visto nel Problema 1 relativamente ai punti impropri e le nuove informazioni relative alle rette improprie.

Quando passano a Q2.1+A2.1 (Figura 26), DDM1 e DDM2 si trovano di fronte a una schermata GeoGebra vuota, che richiede di costruire anche gli elementi iniziali, cosa che risulta sfidante e stimola una discussione su come procedere. Per riflettere sulla risposta non usano da subito la schermata GeoGebra fornita ma, prima, DDM1 materializza il proprio ragionamento usando un foglio di carta su cui disegna un punto B e immaginando il tavolo come se fosse il piano che rappresenta la retta impropria:

4. DDM1: ((rilegge la consegna)) Che cosa vuol dire congiungere B con la retta all'infinito A? Vuol dire fare un piano parallelo ((mano con palmo rivolto verso l'alto che si muove parallelamente al tavolo  )) a questo ((appoggia la mano al tavolo )) passante per questo punto ((indica il punto B disegnato sul foglio )).

I passi della costruzione da realizzare vengono quindi prima ripercorsi e voce, per poi essere descritti nel campo di testo. La risposta finale è:

> "Segniamo un punto proprio B nello spazio, costruiamo un piano α non contenente B e poi costruiamo un altro piano β con la stessa giacitura, cioè parallelo, di α"

La scrittura della risposta, e in particolare l'aver specificato "un piano α non contenente B" ha ispirato una riflessione sulla differenza tra la richiesta di completare una costruzione avviata (come in A1.1) e la richiesta di realizzare una costruzione partendo da una schermata vuota (come in Q2.1+A2.1). Infatti, al termine della scrittura della risposta, DDM1 esprime la seguente osservazione: mentre in A1.1 la retta che rappresentava il punto all'infinito era data, in Q2.1+A2.1 il piano che rappresenta la retta all'infinito indicato nella consegna è *da costruire*. Loro stanno scegliendo di considerare "un piano α non contenente B" ma, avendo la schermata vuota e non essendo esplicitamente indicato nel testo originale nessun vincolo, avrebbero potuto fare una scelta diversa. Un altro aspetto, sottolineato da DDM2, è che la schermata vuota richiede una scelta esplicita rispetto agli elementi da cui partire per avviare la costruzione. Interpretando questa riflessione alla luce della TO, potremmo dire che a livello del progetto didattico che configura un'attività di GGBZ, questi due tipi di azioni presentano due complessità concettuali differenti e la loro presenza combinata può offrire la possibilità di percepire la matematica incorporata nel testo in un nuovo modo, più profondo, permettendo l'incontro con nuovi aspetti del sapere.

Il lavoro sul Problema 2 prosegue con la realizzazione della costruzione durante la quale DDM1 e DDM2 sviluppano riflessioni rispetto a:

- usabilità[111] dell'inserimento di punti in *GeoGebra 3D*. In particolare, la riflessione si è focalizzata sul "comportamento" di default del [Piano grigio] che bisogna usare per costruire i punti liberi (elemento base di qualsiasi costruzione);
- ruolo del cambiamento della visuale e del trascinamento. Viene esplicitamente osservato come alcune prospettive di visualizzazione offrano la possibilità di cogliere particolari aspetti del sapere. Figura 82 esemplifica delle prospettive di visualizzazione della costruzione che DDM1 e DDM2 hanno realizzato per Q2.1+A2.1: le due più a destra sono state particolarmente apprezzate per il fatto che creano un collegamento percettivo con A1.1.

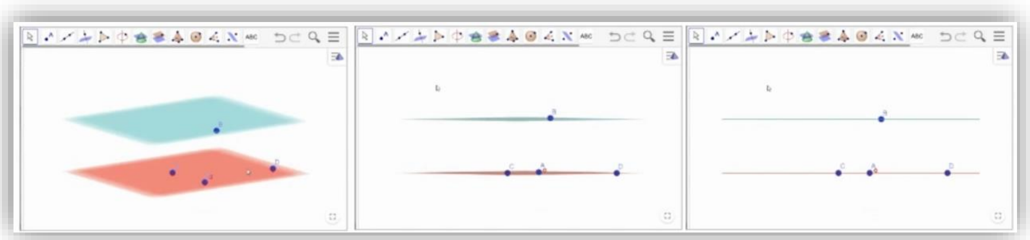


Figura 82: Tre diverse prospettive di visualizzazione della stessa costruzione.

Il lavoro sul Problema 2 si conclude con S2.1, che presenta il testo originale di Castelnuovo (Figura 27), che viene ritenuto un testo non banale, soprattutto nella seconda parte del testo ("[…] il problema ha sempre una soluzione come quello di congiungere, mediante un piano, il punto B con una retta propria a, che non passi per B").

Problema 3: proiettare da un punto una figura composta da punti e rette (cfr Sezione 4.4)

Nella lettura del testo originale del Problema 3 (Figura 28) hanno un momento di straniamento di fronte all'espressione "figura $(A, B, \dots a, b, \dots)$ composta di punti e rette": in effetti, si tratta di un modo inusuale di riferirsi a una figura geometrica, molto diverso da quello, ad esempio alle figure piane nell'ambito della geometria euclidea. Durante l'attività del Problema 3, DDM1 e DDM2 informano anche

---

[111] In riferimento alla norma ISO 9241 – 210:2010, nella traduzione proposta dall'Enciclopedia Treccani online, per usabilità si intende il "grado in cui un prodotto può essere usato da particolari utenti per raggiungere certi obiettivi con efficacia, efficienza e soddisfazione in uno specifico contesto d'uso" - https://www.treccani.it/enciclopedia/usabilita/

sull'attivazione di collegamenti con conoscenze pregresse (legate ad esempio all'algebra lineare) ed esperienze (ombre).

Anche per la coppia DDM1 e DDM2, durante il lavoro nel Problema 3 si verifica un lungo processo di oggettivazione che riguarda la natura dei punti impropri e l'operazione di proiezione da centro improprio. Tale processo di oggettivazione, i cui passaggi cruciali si concentrano durante l'attività in Q3.2+A3.2 (Figura 30), si articola in una serie di tappe simili a quelle esaminate per la coppia LT1 e LT2. Infatti, durante l'esplorazione della proiezione da centro improprio di una retta propria, si assiste a un'evoluzione nella percezione del punto improprio che da *una retta precisa* (che genera un conflitto nella gestione della situazione tra due rette sghembe) passa ad essere *una delle rette di un fascio improprio* e quindi la *direzione comune alle rette di un fascio improprio.* Riporto un piccolo estratto, avvenuto durante l'esplorazione del caso della proiezione da centro improprio di una retta propria, che ha avuto un ruolo cruciale nel superamento del conflitto generato dalla situazione delle rette sghembe. In questa fase del *joint labour*, il punto improprio viene identificato con una retta precisa e il caso in esame è quello in cui la retta da proiettare e la "retta punto improprio" sono sghembe. Nella definizione di proiezione proposta da Castelnuovo, quando il centro è un punto e l'oggetto proiettato è una retta, la figura proiettante è un piano; ma, ovviamente, quando due rette sono sghembe non è possibile trovare un piano che le contenga entrambe e questo genera un forte conflitto.

[…]

8. DDM1: […] ((sta ruotando una mano  immaginando un fascio proprio di piani con asse la retta da proiettare)) per il punto improprio ((ferma la mano che ruotava))

9. DDM2: che è una direzione

10. DDM1: E qui torniamo al punto di partenza cioè è-è-è la cosa che lo vedo come una retta quindi dico devo trovare tra i tanti piani ((riprende a ruota la mano)) che contiene quella retta ma non è detto che ci sia o cosa?…siamo in un leggero impasse

11. A: posso dire una cosa io?

12. DDM1**:** si

13. A: una ((enfasi nel tono)) retta?

4 secondi di silenzio.

14. DDM2: Quando?

15. DDM1: Quando?

16. A: Il punto improprio

17. DDM1: ((incrocia le braccia)) è una ((enfasi nel tono)) retta o ((aspira l'aria e spalanca gli occhi)) o un fascio di rette parallele ((pronuncia le parole lentamente e con enfasi)) perché è una direzione ((pronuncia le parole lentamente e con enfasi e intanto sorride e annuisce; poi rimane in silenzio per 5 secondi letteralmente a "bocca aperta")) non possiamo vederlo come una retta non è la stessa cosa dire è una retta e è una direzione ((annuisce)) grazie.

Il passaggio riportato tra 8 e 17 segna una svolta nell'attività. Il mio intervento (riga 13) è stato minimale ma ha offerto la possibilità di percepire in un nuovo modo il punto improprio da "una retta" (riga 10) alla direzione di un fascio di rette parallele (riga 17). La percezione del punto improprio come direzione comune a un fascio di rette parallele ha messo nuovamente in moto l'attività sbloccando l'impasse e permettendo il proseguimento del processo di oggettivazione.

6.3.2 Parte conclusiva del lavoro: Problema 9

A DDM1 e DDM2 viene proposto di scegliere se lavorare alla dinamizzazione del testo originale relativo alle operazioni di proiezione e sezione (che in Castelnuovo, 1904, corrispondono al Paragrafo 9 e Paragrafo 11 e che nella prima parte dell'attività sono stati segmentati e distribuiti nei Problemi 3, 4, 5, 6 e 7) o se lavorare al testo relativo al Lemma (che corrisponde al Paragrafo 13 del testo originale e al Problema 8 del percorso sperimentale). Scelgono di lavorare su proiezione e sezione. Dopo aver riguardato il testo originale e avuto un breve confronto per decidere come segmentare e organizzare le informazioni, predispongono la schermata del PC affiancando una finestra con aperta l'app *GeoGebra Classico 3D* e la finestra con il testo originale (Figura 83) e iniziano con l'inserimento delle prime tre righe introduttive.

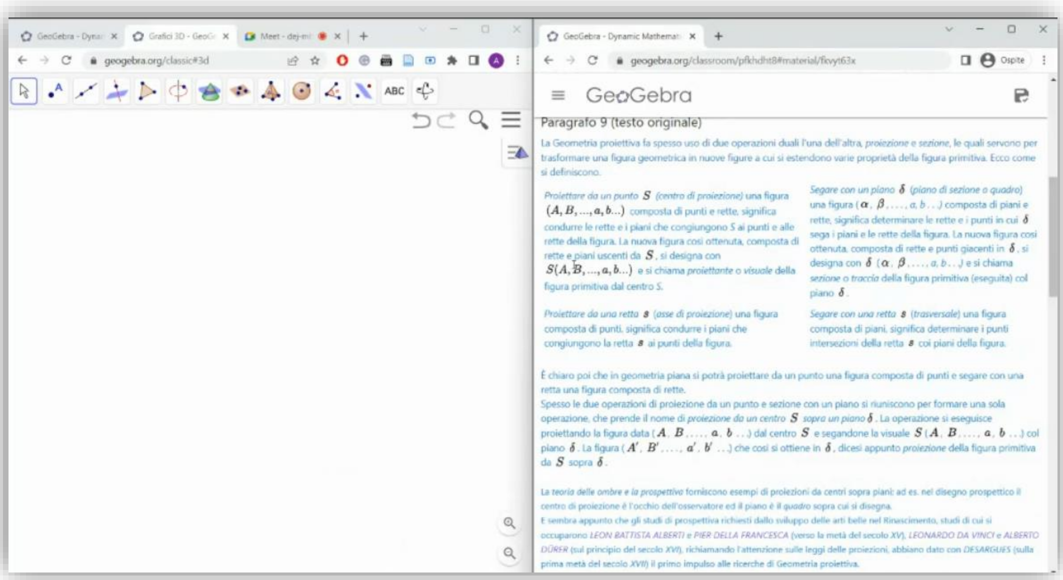
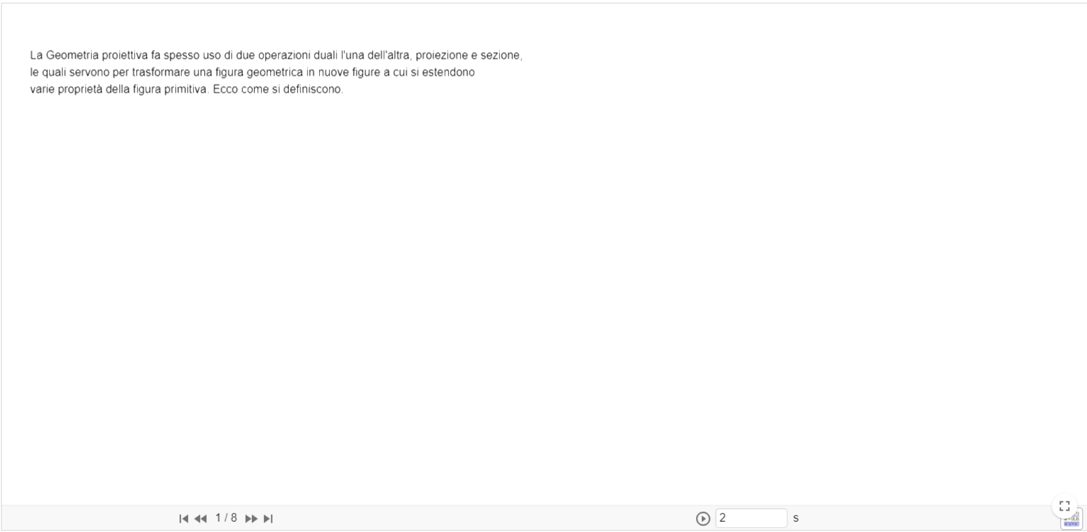
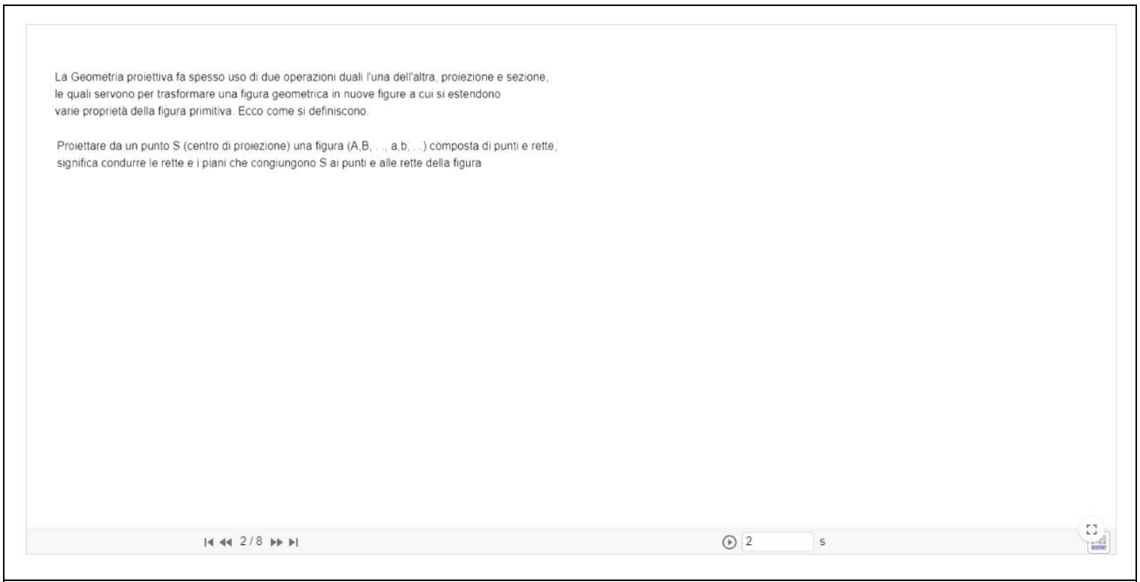
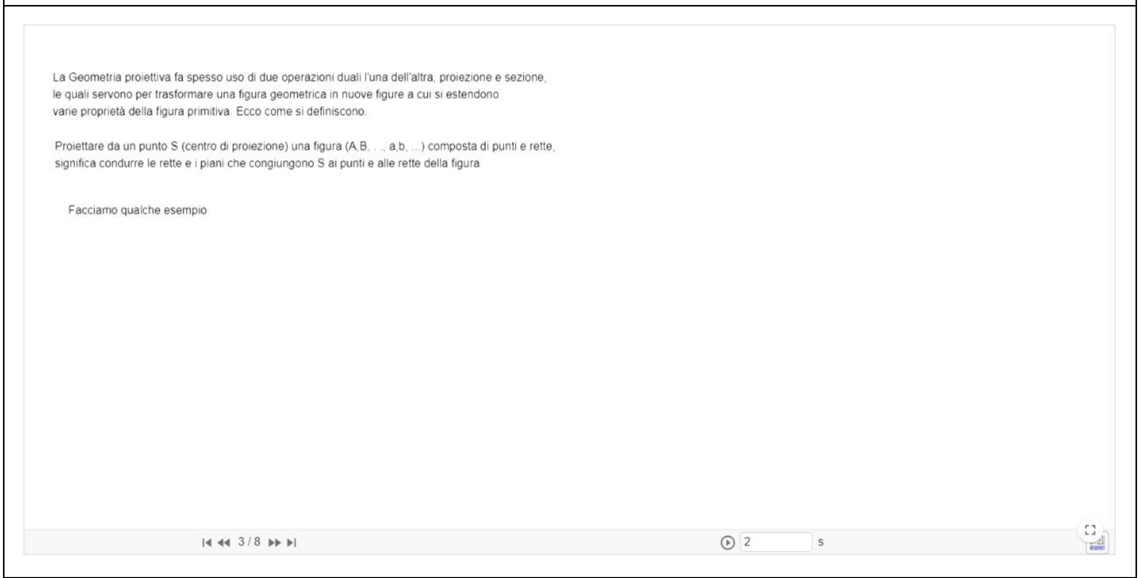


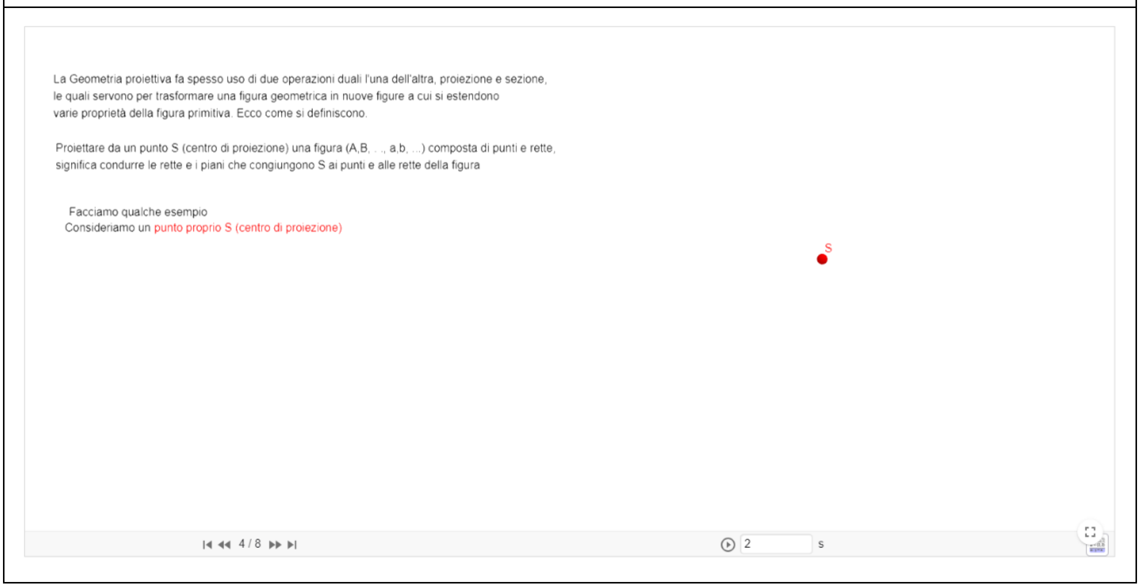
Figura 83: Schermate affiancate.

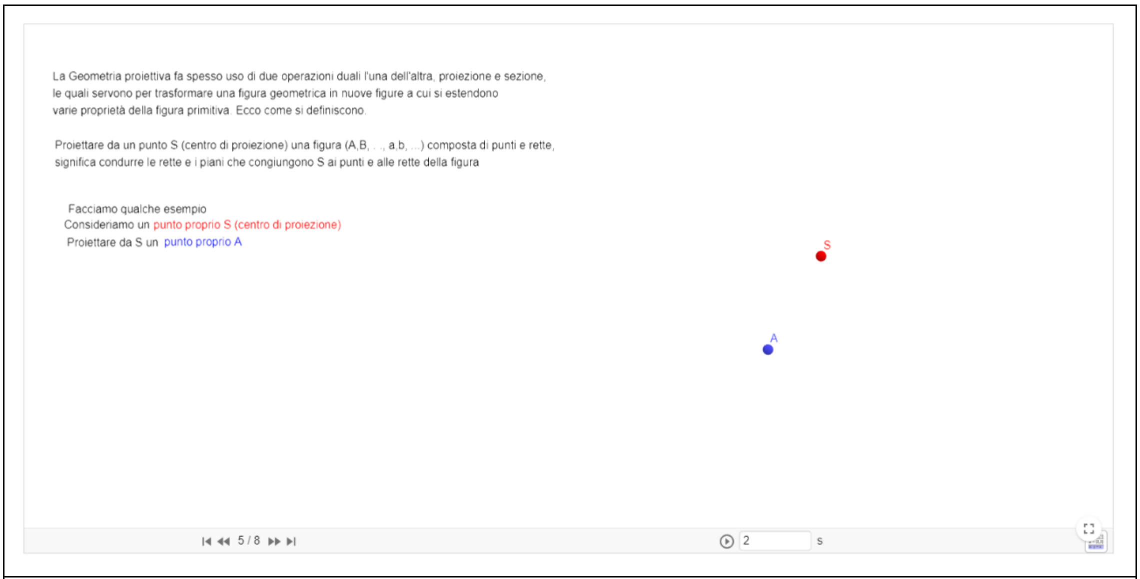
Globalmente, il loro lavoro si organizza inserendo prima tutte le componenti discorsive del testo, con confronto su come segmentarle, e poi inserendo le componenti iconiche, con confronto su come visualizzarle prospetticamente. Decidono di usare un approccio che potremmo caratterizzare come dal globale ai dettagli: partire da una frase intera del testo originale e poi farla seguire da esempi che materializzino le informazioni incapsulate nella frase iniziale. Come nel caso di RGA1 e RGA2, anche DDM1 e DDM2 avrebbero voluto poter "accendere e spegnere" alcuni elementi della costruzione ma, per via delle limitazioni tecniche imposte dalla funzione [Mostra/nascondi], la loro progettazione iniziale non è stata seguita fedelmente. Al termine dell'incontro vengono realizzate due applet separati, uno relativo alla proiezione da centro proprio di punti e rette proprie (Tabella 12, https://www.geogebra.org/m/scqmh2hy); l'altro, relativo alla proiezione da centro proprio di punti e rette impropri (Tabella 13, https://www.geogebra.org/m/ws5wfer2).

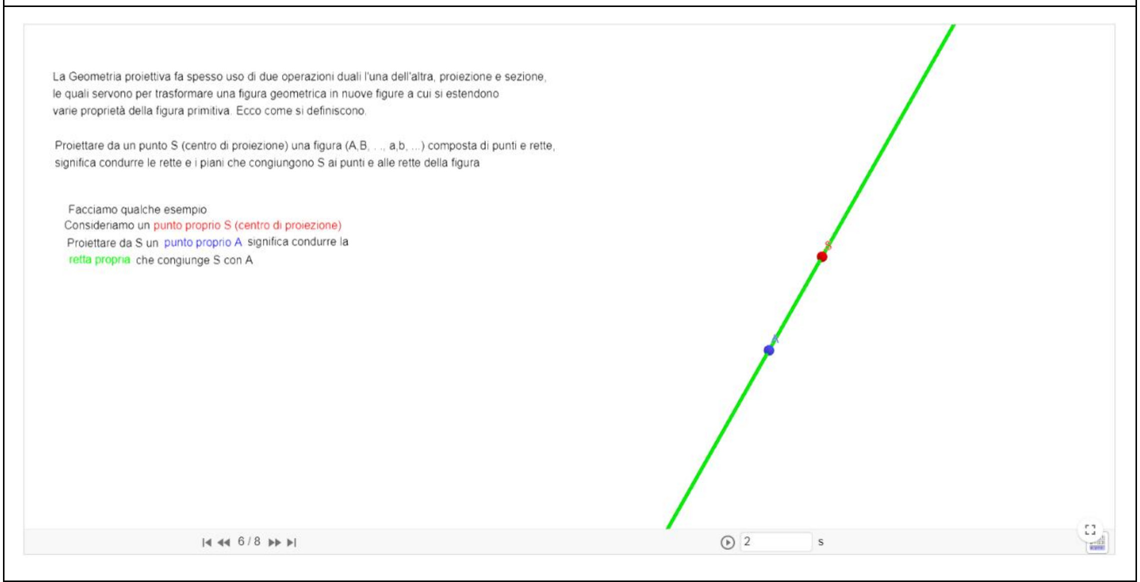
STEP DELL'APPLET FINALE RELATIVO ALLA PROIEZIONE DA CENTRO PROPRIO DI PUNTI E RETTE PROPRIE


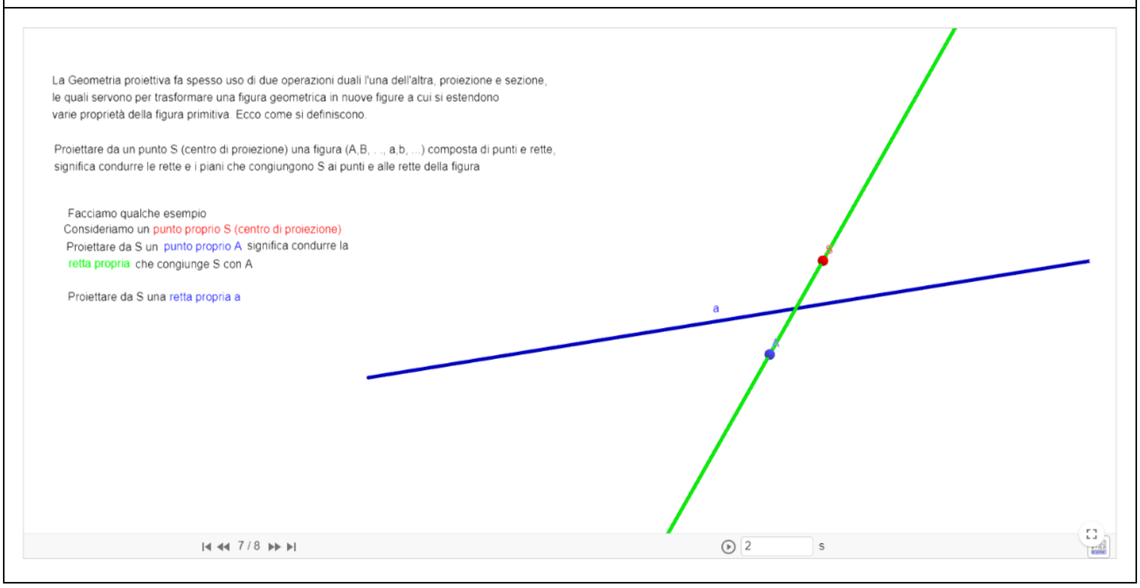

La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
2 / 8


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
3 / 8


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
S
4 / 8


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto proprio A
S
A
5 / 8
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto proprio A significa condurre la
retta propria che congiunge S con A
6 / 8
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto proprio A significa condurre la
retta propria che congiunge S con A
Proiettare da S una retta propria a
a
7 / 8
2
s

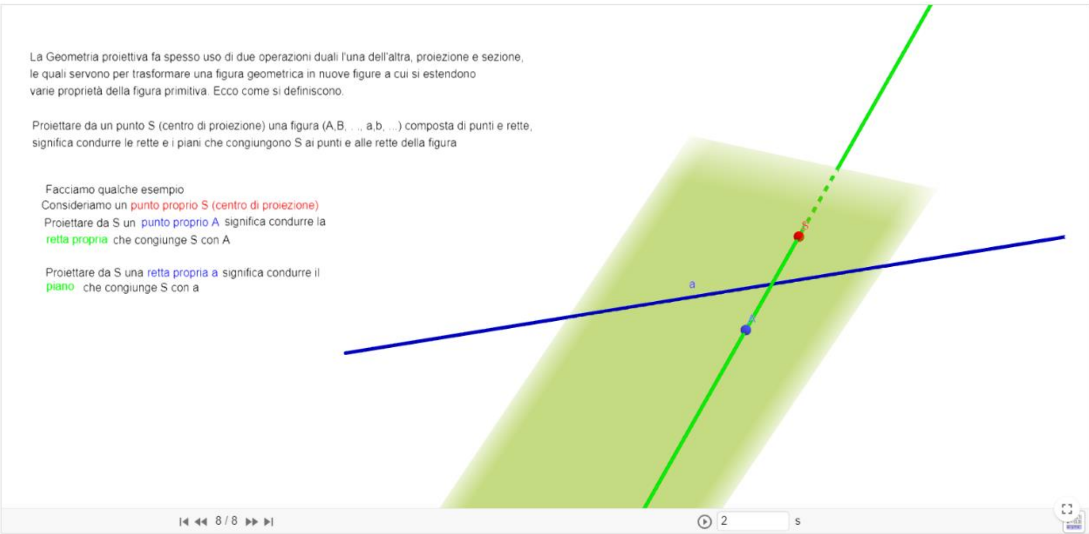
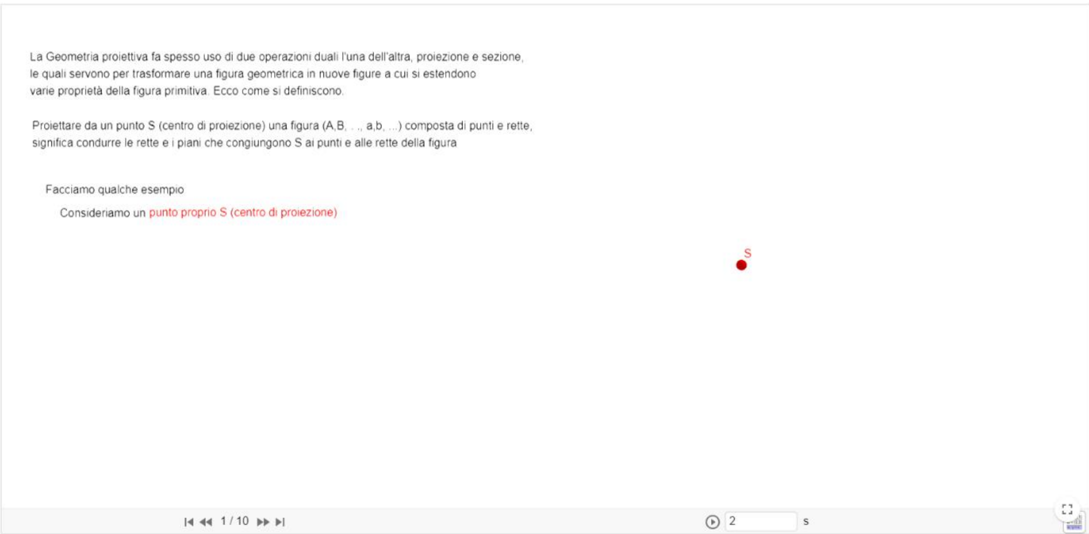
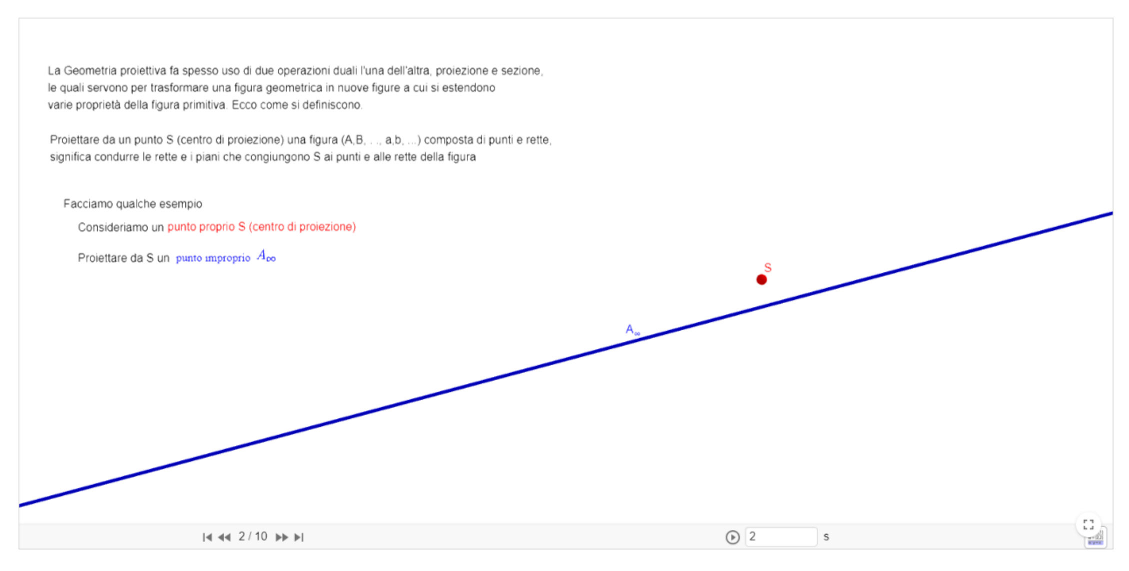
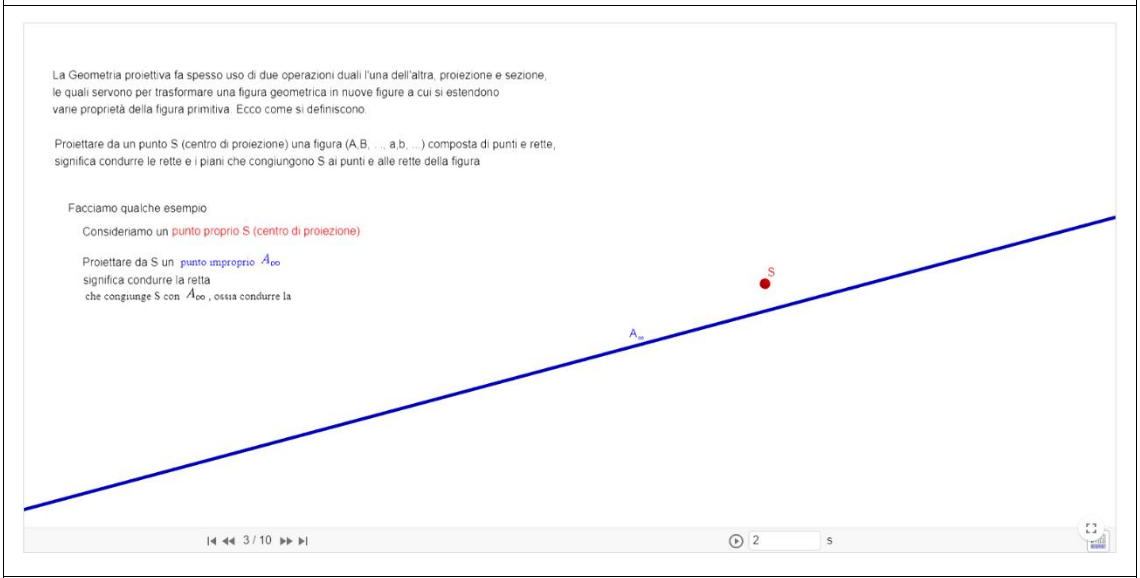
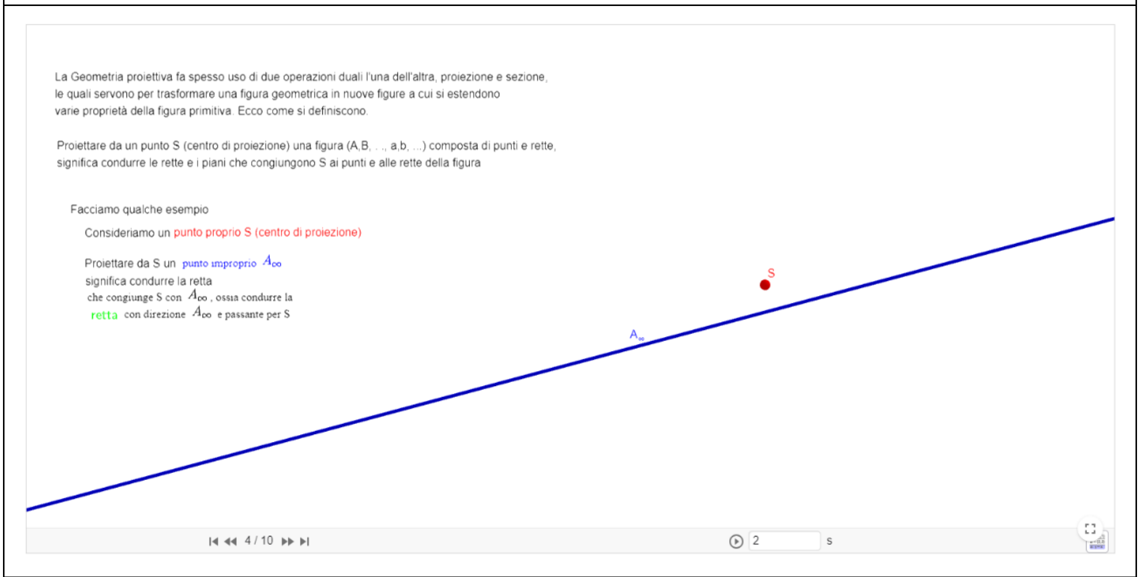


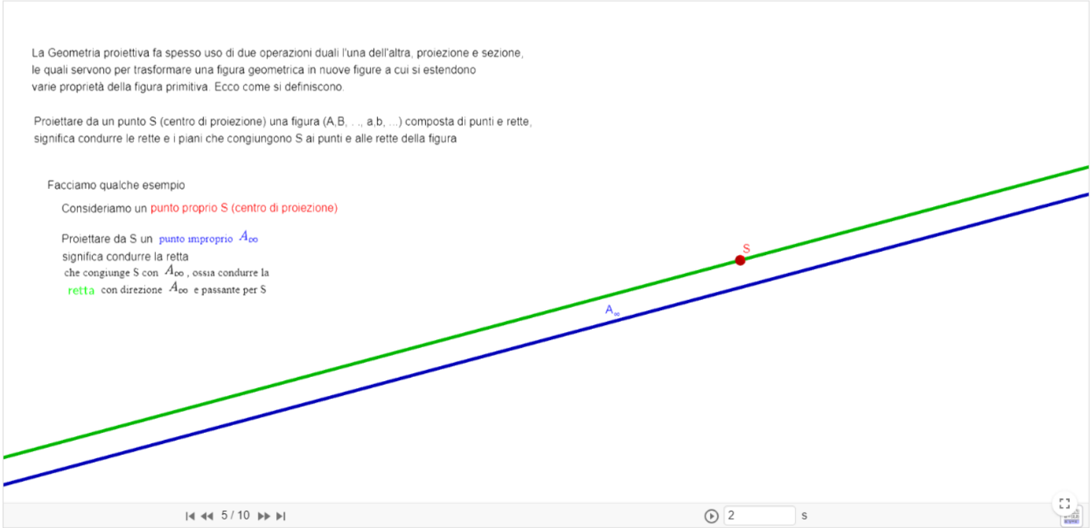
Tabella 12: Applet finale relativo alla proiezione da centro proprio di punti e rette proprie.

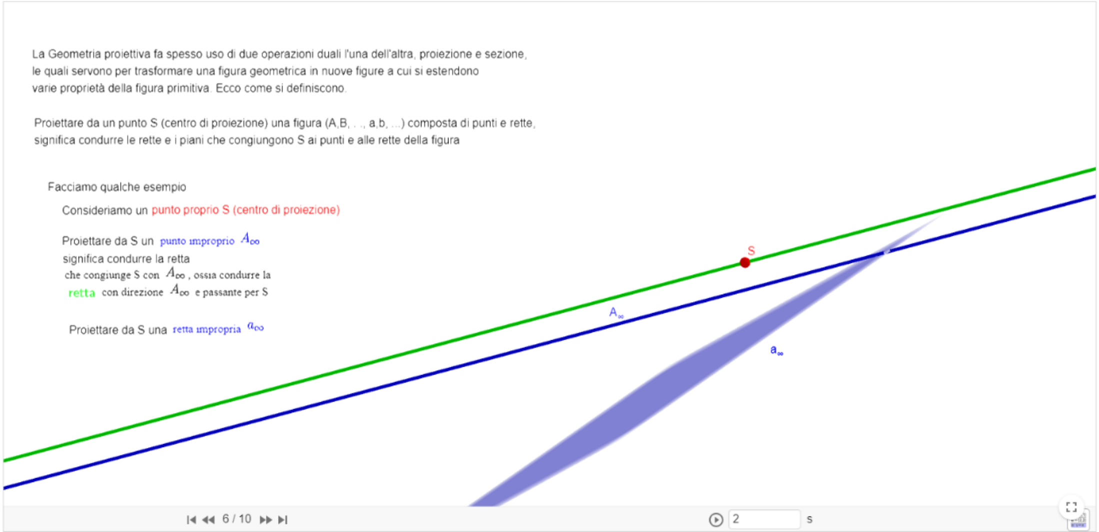
STEP DELL'APPLET FINALE RELATIVO ALLA PROIEZIONE DA CENTRO PROPRIO DI PUNTI E RETTE IMPROPRI


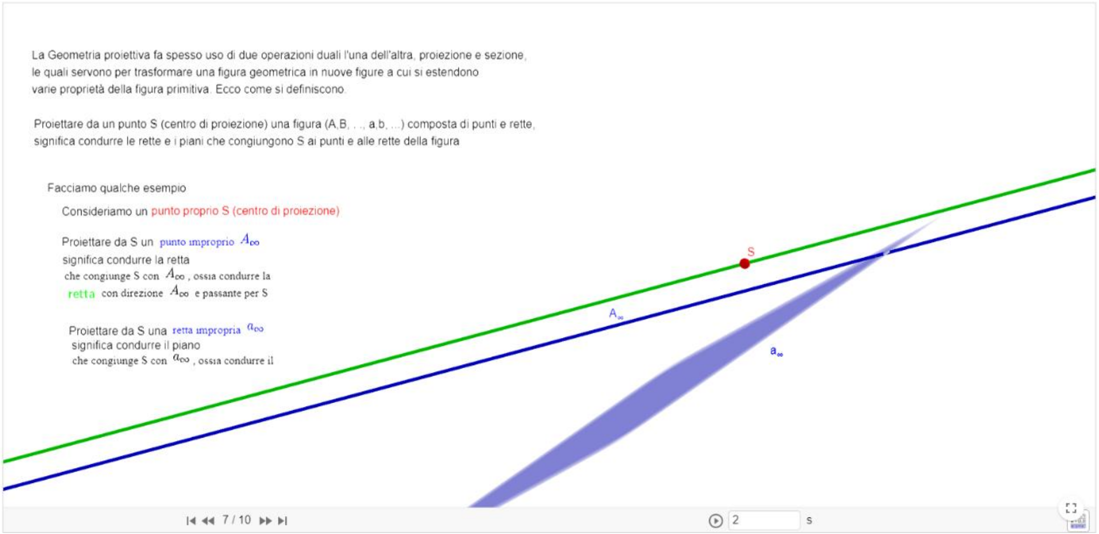

La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
S
A_∞
2 / 10
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
significa condurre la retta
che congiunge S con A_∞ , ossia condurre la
S
A_∞
3 / 10
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
significa condurre la retta
che congiunge S con A_∞ , ossia condurre la
retta con direzione A_∞ e passante per S
S
A_∞
4 / 10
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
significa condurre la retta
che congiunge S con A_∞ , ossia condurre la
retta con direzione A_∞ e passante per S
S
A_∞
5 / 10
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
significa condurre la retta
che congiunge S con A_∞ , ossia condurre la
retta con direzione A_∞ e passante per S
Proiettare da S una retta impropria a_∞
S
A_∞
a_∞
6 / 10
2
s


La Geometria proiettiva fa spesso uso di due operazioni duali l'una dell'altra, proiezione e sezione,
le quali servono per trasformare una figura geometrica in nuove figure a cui si estendono
varie proprietà della figura primitiva. Ecco come si definiscono.
Proiettare da un punto S (centro di proiezione) una figura (A,B, . . ., a,b, ...) composta di punti e rette,
significa condurre le rette e i piani che congiungono S ai punti e alle rette della figura
Facciamo qualche esempio
Consideriamo un punto proprio S (centro di proiezione)
Proiettare da S un punto improprio A_∞
significa condurre la retta
che congiunge S con A_∞ , ossia condurre la
retta con direzione A_∞ e passante per S
Proiettare da S una retta impropria a_∞
significa condurre il piano
che congiunge S con a_∞ , ossia condurre il
S
A_∞
a_∞
7 / 10
2
s

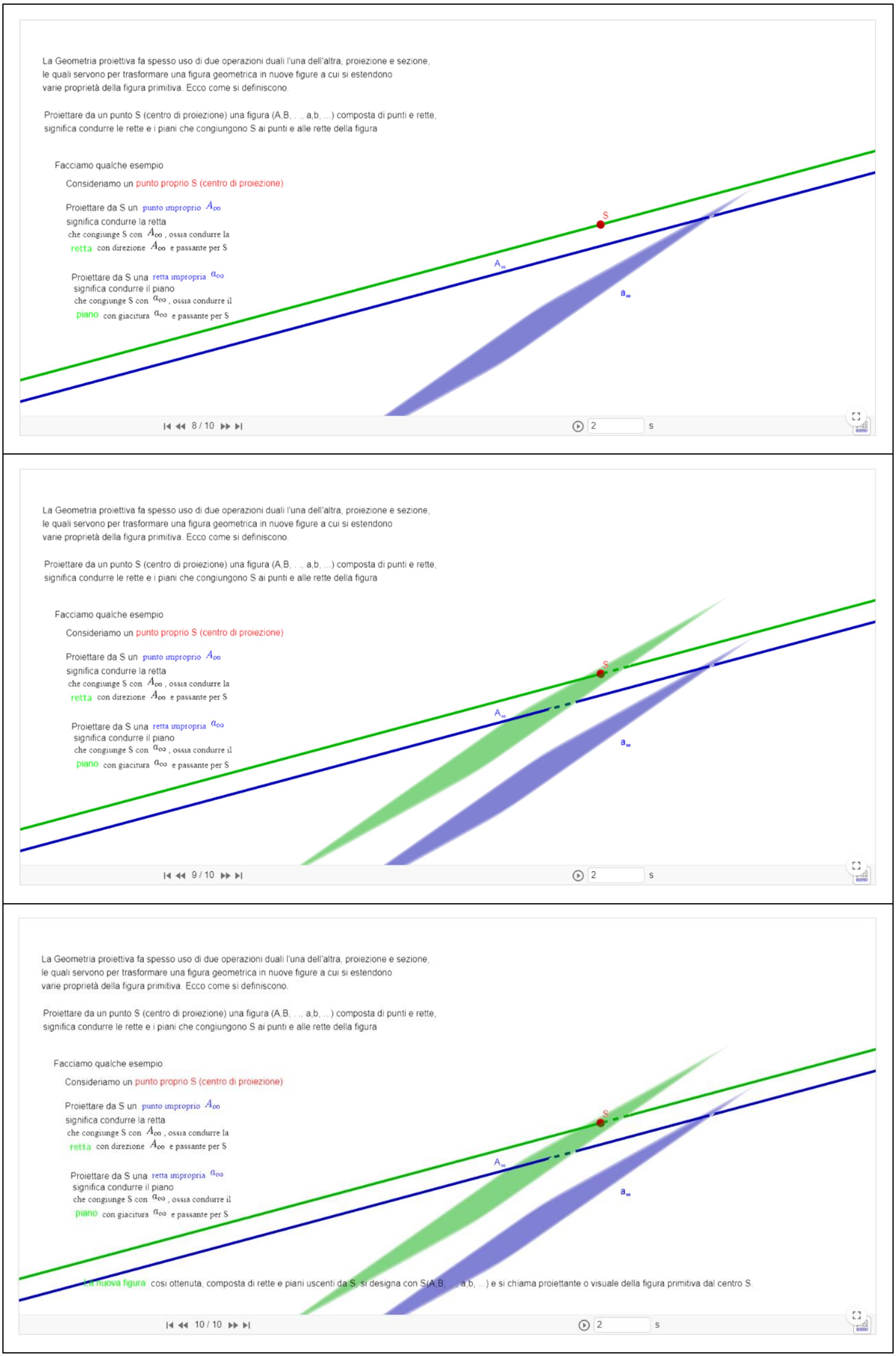


Tabella 13: Applet finale relativo alla proiezione da centro proprio di punti e rette proprie.

Quanto mostrato in Tabella 12 e Tabella 13 è stato raggiunto alla fine di una lunga attività, durata più di due ore, ricca di confronti, riflessioni e scelte riguardo al come gestire le componenti discorsive del testo inserite e al come far comportare le segmentazioni e sincronizzazioni con le componenti iconiche. Riassumo di seguito i principali elementi di confronto:

- dove posizionare i segmenti di testo, (scegliendo di metterli su più righe) e dove posizionare le immagini rispetto al testo (scegliendo di metterli affiancati);
- in quali parole della componente verbale del testo aggiungere particolari stili di formattazione (grassetto o corsivo);
- scelta della visuale prospettica iniziale della costruzione;
- è emersa una forte necessità di usare colori sia sulle componenti discorsive del testo che su quelle iconiche, con l'attenzione di impostare le opportune corrispondenze cromatiche tra le due. Questa particolare scelta sull'uso del colore permette sia di distinguere gli elementi sia di creare una corrispondenza percettiva a supporto del collegamento tra le componenti discorsive e quelle iconiche del testo che stanno producendo. In termini concisi, al colore viene dato un ruolo nella coesione del testo[112] matematico che stanno scrivendo;
- sono emerse profonde discussioni su come formulare alcuni dei segmenti delle componenti discorsive del testo, sia in casi "matematicamente neutrali" (come, ad esempio, la frase che introduce il blocco di esempi) sia in casi matematicamente più connotati. Riporto tre esempi di quest'ultima situazione:
    - scelta di quali oggetti denominare con un'etichetta esplicita. Ad esempio, inizialmente avevano dato un nome alla retta proiettante il punto proprio ma poi, anche a valle di una consultazione del testo originale, decidono di evitarlo per non creare confusione;
    - riflessioni su come gestire la relazione tra formulazione della componente discorsiva e comportamento della componente iconica;
    - gestione della descrizione discorsiva dell'atto di proiettare da centro proprio un punto improprio: usare espressioni come "condurre la retta passante per"? Parlare del parallelismo? Parlare di direzione?

Sugli ultimi due sotto-punti è il caso di dire qualcosa in più. Infatti, una volta presa la decisione di trattare separatamente il caso della proiezione da centro proprio

[112] Con il termine coesione di un testo ci riferiamo a "la proprietà che si manifesta precipuamente nella forma di un sistema di reti di collegamenti linguistici tra le frasi, che indicano dipendenze e sintonie interpretative di particolari forme rispetto al co-testo" Ferrari (s.d.).

di elementi impropri, DDM1 e DDM2 discutono a lungo su come organizzare l'applet e su come gestire la scrittura del testo in questa situazione. Per quanto riguarda l'organizzazione dell'applet, riprendono i loro appunti scritti su carta durante il lavoro sul Problema 3 (cfr. sezione precedente). Per quanto riguarda l'inserimento dei contenuti, il comportamento che dovrà avere la componente iconica per visualizzare la proiezione è "teoricamente" chiaro (dovrà mostrare la retta che passa per il centro di proiezione e che è parallela a quella che rappresenta il punto improprio). Tuttavia, decidere come scomporre in passi la componente iconica e come gestire la componente discorsiva del testo si rivela sfidante e porta DDM1 e DDM2 a ripercorrere in profondità alcuni passaggi che durante il loro lavoro nel Problema 3 corrispondevano a segmenti di processo di oggettivazione. Ad esempio, per il caso del punto improprio, sono tornati sia ad affrontare nuovamente la delicatezza di come scegliere la retta rappresentante la direzione che lo materializzi, sia a precisare nuovamente la relazione tra *punti impropri - direzione comune alle rette di un fascio improprio – condurre la retta parallela alla retta che rappresenta il punto improprio che passa per il centro di proiezione - congiungere un punto proprio con un punto improprio*. In particolare, quest'ultimo punto li porta ad introdurre nella componente verbale del testo il termine *ossia* per collegare l'operazione di congiungimento (di: punto proprio e punto improprio; punto proprio e retta impropria) con quella di conduzione di rette con direzione (giacitura) data (si veda Tabella 13, in particolare gli screenshot degli step 3 e 7). Una volta scelta la formulazione della componente discorsiva del testo, passano alla componente iconica e dunque all'inserimento delle visualizzazioni. In questa fase, dicono esplicitamente che stanno dando per scontato che il Lettore da qualche parte avrà visto cosa sono gli elementi impropri. Infatti, la parola *ossia* che mettono nel testo è un ossia che si riferisce a qualcosa che si suppone sia stato affrontato. A questo proposito DDM1 e DDM2 osservano anche che, per quanto la visualizzazione offra un supporto, c'è comunque un "salto" (parola usata da loro) che per essere completo ha bisogno di fare riferimento alle definizioni dei punti impropri.

Una volta completato l'inserimento di componenti discorsive del testo e visualizzazioni, DDM1 e DDM2 tornano al primo applet realizzato (proiezione da centro proprio di elementi propri) aprono il [Protocollo di costruzione] per sistemare l'ordine di apparizione dei vari elementi e impostare le sincronizzazioni inserendo i [Punti di interruzione] e poi guardano il risultato usando la [Barra di navigazione]. In questa fase dell'attività, l'applet non ha ancora l'aspetto mostrato in Tabella 12, ma ha quello mostrato in Figura 84.

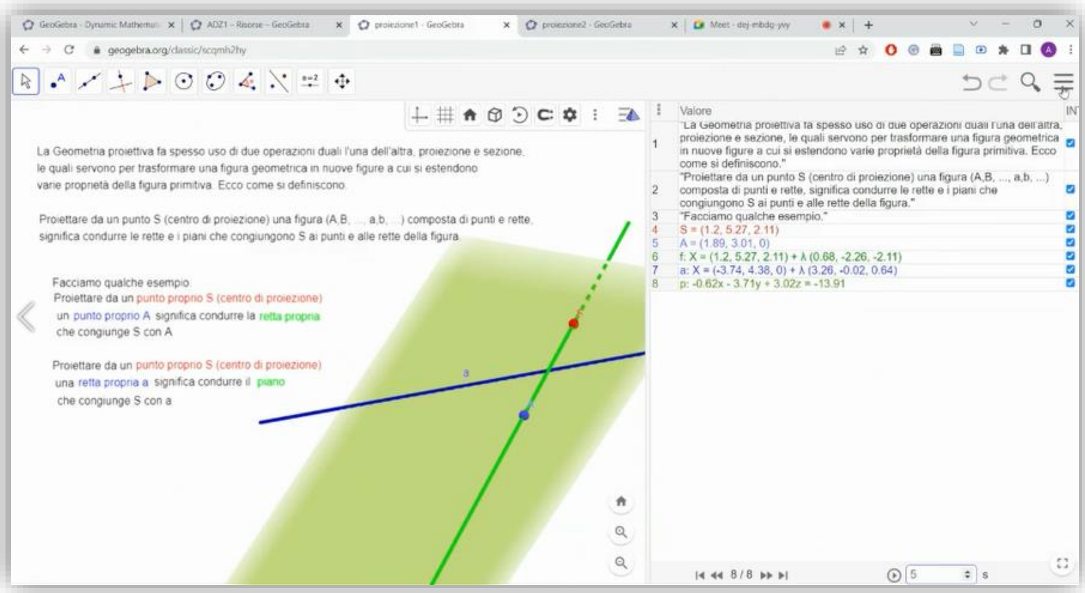


Figura 84: Prima versione dell'applet sulla proiezione di elementi propri da centro proprio.

Guardare il risultato rende contenti DDM1 e DDM2 ma non completamente soddisfatti perché vorrebbero poter modificare la visualizzazione in modo da rispettare il contenuto dei blocchi di testo solo che, a causa del comportamento della funzione [Mostra/nascondi], non riescono a farlo. DDM2 fa quindi una proposta che rappresenta una svolta: *modificare le componenti discorsive sulla base del comportamento di quelle iconiche*. Questa proposta dà all'attività una nuova energia e li porta a rivedere l'intero contenuto discorsivo dell'applet. È così che arrivano alla versione mostrata in Tabella 12: quando guardano il risultato usando la [Barra di navigazione] sono entusiasti del comportamento del prodotto finale e la loro soddisfazione è palpabile.

Passano quindi all'applet successivo (proiezione da centro proprio di elementi impropri) e, dopo aver riformulato tutti i testi anche lì, passano al lavoro sul [Protocollo di costruzione] e all'inserimento dei [Punti di interruzione]. In questo secondo applet le sincronizzazioni vengono gestite in un modo particolare, diverso dall'applet precedente. Infatti, vengono inseriti dei [Punti di interruzione] "speciali" che non hanno la funzione di sincronizzare le componenti discorsive con le visualizzazioni ma di *separarle* per dare al Lettore quella che inizialmente hanno chiamato una "pausa di riflessione" (si veda Tabella 13, in particolare gli screenshot degli step 3,4,5 e 7,8,9). Dopo aver guardato il risultato finale usando la [Barra di navigazione], DDM1 osserva che sono pause che non hanno un intento comunicativo ma hanno un intento didattico. Riporto un estratto di conversazione:

1. DDM1: non è per fartelo capire meglio quella pausa ma è per farti riflettere sul fatto se tu abbia capito o no

2. A: e qual è la differenza?

3. DDM1: [...] Nel comunicativo deve essere un po' più non lo so magari è una scemata ma deve essere un po' più al servizio di chi legge deve proprio togliere molto la fatica a chi sta leggendo mentre nel didattico può essere funzionale il "non te lo ripeto qua perché dovresti averlo capito se hai il dubbio vai tu a rivedertelo perché te lo devi un po' più conquistare". Non so sei d'accordo

4. DDM2: Sono d'accordo.

   [..]

5. DDM2: Cioè il comunicativo non si prende le pause di riflessione che si prende il didattico

6. DDM1: non è che non se le prenda non sfrutta la pausa...cioè non sfrutta la pausa per dare un messaggio al lettore. La pausa didattica [...] è il lettore che si dovrebbe fermare perché questa cosa la dovrebbe già sapere se invece è puramente comunicativo […] è un po' diverso [A: però c'è anche...] allora è proprio no? se ti ho perso è mia responsabilità di dirtelo

7. A: quindi […] voi state pensando a questa parte precedente sugli elementi impropri che non abbiamo fatto ma che è propedeutica a fare questa parte qui

8. DDM2: esatto si si

Chiedo come si immaginano la parte sugli elementi impropri e me la descrivono spiegando che ciò che farebbero è riprodurre passo passo le costruzioni che hanno fatto loro. Quindi, io riassumo dicendo che il lavoro che hanno fatto nell'ultimo incontro con una parte del testo originale del Paragrafo 9 rappresenta il passo 2 di un passo 1 in cui vengono trattati gli elementi impropri:

9. DDM2: esatto. Ma è grosso il passo 1 perché poi questo sia....perché quegli ossia siano facili

Questo breve estratto aprirebbe a molte riflessioni ma in questa sede mi limito a farne una che possa permettere di connettere i vari elementi finora emersi. Ancora una volta, ritroviamo una corrispondenza tra quanto avvenuto durante l'attività di DDM1 e DDM2 nei primi 8 problemi, in particolare nel Problema 3, e quanto emerge con l'approccio metacognitivo proposto dal Problema 9. Riformulando l'espressione "quegli ossia siano facili" alla luce della TO, potremmo dire che "facile" significa percepibile da un occhio addomesticato da oggettivazioni sviluppate nell'attività di GGBZ, intesa come *joint labour*, configurata dai problemi precedenti. Percepire la portata matematica della connessione tra ciò che è verbalmente legato da "ossia" e ciò che è visualizzato è reso possibile dall'apprendimento che si è sviluppato attraverso il *joint labour* nei problemi precedenti.

6.3.3 Riflessioni conclusive sulla coppia DDM1 e DDM2

Nel caso della coppia DDM1 e DDM2, esperti nello studio dell'apprendimento della matematica, abbiamo presentato una panoramica dell'attività svolta nel primo e nell’ultimo incontro riportando solo alcuni passaggi cruciali dell’evoluzione del processo di oggettivazione (senza riportare un’analisi dettagliata dei nodi semiotici) e l’attenzione è stata concentrata maggiormente nella meta-lettura dell’attività stessa. Nell’intervista non strutturata finale condotta al termine dell’ultimo incontro ho proposto a DDM1 e DDM2 di tirare le fila dell’intera esperienza confrontando l’attività fatta nei primi otto problemi con quella fatta per il Problema 9. Riporto di seguito alcuni passaggi dell’intervista:

1. DDM1: Ti dico io a bruciapelo perché lui è riflessivo […] Ovviamente sono sullo stesso contenuto ma le ho trovate abbastanza diverse. Quella di oggi ha necessità della precedente, assolutamente […] Trovo questa molto interessante se mi vedo come docente. Cioè credo che sia molto interessante pensare di…cioè proprio […] un'attività interessante pensando a degli studenti diciamo così. Eh e da docente dico caspita si vedono proprio le potenzialità del…del proporre a qualcun altro la spiegazione fatta in questo modo. L'attività dell'altra volta l'ho vissuta molto più da da studente diciamo da learner. E l'ho trovata molto potente più di questa per le domande cioè era molto bello il fatto che lì tu lì sul testo non chiedevi solo di rappresentarlo in modo dinamico ma di lavorarci in modo dinamico. Cioè oggi a me ha quasi fatto un po’ patire che poi queste figure non le toccavamo, non so come dire. E in quello sì, l'altra l'ho trovata molto coinvolgente. Okay, qui è più da esperto. Ah, ho già fatto quella di prima, mi è piaciuta, Mi hai sbloccato su certe cose. E allora adesso sì, mi metto qua e capisco cosa può servire, eccetera. E l'altra è proprio molto potente. Però non so se questo è utile come
2. A: […] è la vostra esperienza che mi è utile qui io voglio capire i processi che ci sono in gioco […]?
3. DDM1: Sì, ti direi questa come ti direi questa come primissima impressione che nell'altra lavori proprio su questi oggetti e quindi aggiungi molto al testo. Qui lo rendi sicuramente più fruibile però mi verrebbe voglia di dirti ma adesso però ci mettiamo delle domande, ci mettiamo un qualcosa che chi legge poi va a fare

L’intervista prosegue e, più avanti viene messa in evidenza un’altra distinzione:

4. DDM1: […] Mentre l'altra volta […] abbiamo molto lavorato sugli aspetti matematici. […] Oggi abbiamo lavorato molto sugli aspetti tecnici. […] è una differenza insomma sì. Cioè là comunque quando non riuscivamo a fare una cosa non vedevamo una cosa c'era una ragione matematica probabilmente dietro tutto quello che stavamo facendo. Qui magari è veramente il software non me lo permette […] quindi è un piano di lavoro molto diverso. Molto interessante.

5. DDM2: mi aggancio solo a quest'ultima per dire che forse quest'ultima osservazione sulle difficoltà tecniche è proprio dal punto di vista di chi…progetta questo questo tipo di visualizzazione non da chi poi ci lavora. […] lo vedo come il fatto che qua ci siamo spostati cioè non è più la fase esplorativa di manipolazione di comprensione ma è più pensata come progettazione, quindi si incontrano difficoltà diverse. Un'altra cosa che mi risuonava molto è il fatto che qui le figure e le immagini sono appunto statiche. Eh, non ci posso lavorare, non le posso, cioè non è richiesto…

Dopo qualche altro passaggio, DDM2 chiarisce ancora di più il legame percepito tra le due parti del percorso:

6. **DDM2:** […] la propedeuticità di fare prima l'esplorazione rispetto alla progettazione io l'ho vista molto nel poi ti mettiamo una pausa didattica perché noi nell'esplorazione abbiamo avuto bisogno di una pausa di esplorazione di ripresa dei concetti eh riguardare la definizione, costruire…Credo che tutta questa parte di esplorazione si sia poi condensata in "Ora c'è una pausa di di della barra di navigazione ora qui vai con calma perché c'è della sostanza" […]

Nel resto dell'intervista, vengono sottolineati altri aspetti di collegamento tra il Problema 9 e l'esperienza fatta nei problemi precedenti:

- il ruolo del colore e della visualizzazione prospettica (entrambi riportano come il supporto del colore sia stato un vantaggio nella parte esplorativa dei primi otto problemi);
- la delicatezza del gestire il conflitto generato dal fatto che il punto improprio non sia un punto o la retta impropria non sia una retta, collegata all'importanza di gestire in un certo modo la comparsa di nome e visualizzazione con l'aggiunta di una pausa (cfr. riga 15) offrire al Lettore un "momento di attenzione".

Riassumendo, possiamo enucleare due riflessioni conclusive. Una, più legata al processo di GGBZ, riguarda il *riconoscimento del valore formativo dei primi otto problemi* che viene attribuito alla richiesta di *lavorare in modo dinamico* sul testo con i quesiti e le azioni proposte. La seconda riflessione, più legata al prodotto finale realizzato, riguarda la distinzione tra un prodotto realizzato con scopo divulgativo e uno realizzato con scopo didattico.

6.4 Coppia Ricercatori in Informatica e Didattica dell'Informatica (DDI1 e DDI2)

Globalmente, il percorso di DDI1 e DDI2 si snoda nell'arco di tre incontri; in tutte le sessioni di lavoro sia mouse che tastiera venivano tendenzialmente manovrati da DDI1. È utile ricordare che DDI1 e DDI2 non sono laureati in matematica e quindi non hanno conoscenze pregresse riguardo la geometria proiettiva come branca della geometria. D'altra parte, sono ricercatori in informatica esperti, professionisti e hanno un interesse per lo studio dell'apprendimento dell'informatica: la loro percezione è dunque culturalmente educata in un modo che strutturerà il loro punto di vista sull'attività. Come anticipato nella parte introduttiva del presente capitolo, anche per questa coppia daremo maggiore spazio agli spunti di analisi e riflessione rispetto al processo di GGBZ emersi dalle loro riflessioni metacognitive. Quindi, rispetto allo svolgimento dell'attività in sé, presenteremo solo una breve panoramica, limitandoci alla notifica di presenza e descrizione sintetica di uno dei nodi semiotici e alla descrizione di una porzione di attività che, in un altro nodo semiotico, ha avuto un ruolo cruciale.

6.4.1 Panoramica del lavoro nei Problemi 1, 2 e 3

Problema 1 - punti propri e impropri (cfr. Sezione 4.2)

La lettura del testo originale (Figura 23) viene fatta in maniera silente mentre la consegna di A1.1 (Figura 24) viene letta da DDI1. L'azione viene subito compiuta senza difficoltà: DDI2 verbalizza la soluzione e DDI1 realizza la costruzione che la visualizza nella schermata fornita.

Problema 2 - rette proprie e improprie (cfr. Sezione 4.3)

Anche qui il testo originale (Figura 25) è letto in maniera silente e la consegna di Q2.1+A2.1 (Figura 26) è letta da DDI2 che, quando conclude, inizia a verbalizzare la soluzione bloccandosi però a metà e tornando a rileggere la consegna. Ho interpretato questo momento come una titubanza che segna l'inizio di un evento critico: il segmento di attività che lo compone dura circa 15 minuti ed è identificabile come nodo semiotico. È un primo segmento di oggettivazione innescato dal forte conflitto che il confronto con la retta all'infinito genera rispetto all'esperienza familiare della geometria euclidea. La presenza della parola *retta* infatti richiama fortemente la retta come l'ente unidimensionale nella geometria euclidea e questo primo nodo semiotico ha riguardato il notare la portata matematica della specifica "all'infinito". Nell'arco di questo segmento di attività, si assiste a un'evoluzione di varie percezioni della retta all'infinito, evoluzione permessa dall'intreccio e dalla coordinazione di numerose attualizzazioni del sapere: verbali (ad esempio giacitura, famiglia di piani paralleli), gestuali, cinestetiche, materiali (usando fogli e penna per materializzare piani e rette), iconiche (producendo disegni su carta) e materializzazioni come costruzioni nel software (in cui inizialmente viene costruita una retta per due punti). La richiesta di produrre una risposta scritta muove l'attività verso una rifinitura delle risorse semiotiche messe in campo interpretata come contrazione semiotica, segnando la chiusura dell'evento critico e, dunque, del nodo semiotico.

Problema 3: proiettare da un punto una figura composta da punti e rette (cfr Sezione 4.4)

Stavolta, il testo originale (Figura 28) viene letto ad alta voce e A3.1 (Figura 29) viene svolto in maniera diretta e fluida. Passano dunque a A3.2+Q3.2 e, una volta letta la consegna[113], entrambi rimangono in silenzio per qualche secondo e poi DDI1, ridendo, dice: "e qui casca l'asino". Il silenzio e l'esclamazione di DDI1 sono stati interpretati come un indicatore di titubanza e segnano l'inizio di un evento critico (e dunque di un nodo semiotico) che si svilupperà nell'arco di tutto il resto del lavoro nel Problema 3. Ne riporto solo un estratto, particolarmente

[113] "Cosa succederebbe se S fosse un punto improprio? Usa la schermata GeoGebra che segue se ti è utile per esplorare."

cruciale. Il passaggio descritto di seguito si verifica dopo un lungo confronto in cui, dopo aver raggiunto un buon livello di convinzione rispetto alla costruzione realizzata per materializzare il caso della proiezione da punto improprio di un punto proprio, si arriva a un'impasse nel caso della proiezione da centro improprio di una retta propria.

1. DDI1: ((guarda DDI2)) io direi che non so cosa vuol dire proiettare […] da un punto improprio una retta propria ((DDI2 annuisce))
2. A: posso fare una domanda?
3. DDI1: certo
4. A: un punto improprio definisce? mi avete detto?
5. DDI1: un..un fascio di rette
6. A: mh…quindi cioè non una retta

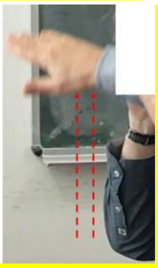
Rimangono in silenzio per 5 secondi guardandomi.

7. DDI1: quindi tu dici una retta che poi passa che interseca quel- la retta propria
8. A: qual è il caso che ti mette in difficoltà?
9. DDI1: eh allora ((mette le braccia materializzando due rette sghembe )) l'idea è questa
10. A: ok
11. DDI1: è vero che hai ragione tu che nel momento in cui ((fa uno scatto con il braccio più lontano da sé ma continua a tenere le braccia a "forma di rette sghembe")) definisco ((ancora uno scatto ma braccia sempre nella stessa posizione)) una retta propria
12. A: quale delle due braccia è quella impropria?
13. DDI1: ((indica il braccio più lontano da sé )) questa è impropria ((poi riporta le braccia a "forma di rette sghembe")) ok? E questa ((guarda il braccio più vicino a sé e lo muove leggermente)) è propria
14. A: mh-mh

15. DDI1: questa ((muove leggermente il braccio più vicino a sé)) sta ferma qui e non la tocca nessuno ((rivolge lo sguardo verso DDI2)) ok? ((guarda verso il braccio più lontano da sé) questa (fa un piccolo movimento con il braccio più lontano da sé)) invece ((silenzio e braccia ferme))

16. DDI2: ((allinea un suo braccio lungo il braccio che indica il punto improprio )) è l'insieme di tutte le rette parallele a questa ((piccolo scatto con il suo braccio))

17. DDI1: esatto ((inizia a muovere leggermente il braccio che rappresenta il punto improprio orizzontalmente davanti a sé))

18. DDI1: quindi qui ((con il suo braccio, scavalca il braccio di DDI1 che rappresenta il punto improprio )) c'è una famiglia di rette parallele a questa ((appoggia il suo braccio su quello di DDI1 che rappresenta la retta propria e lo scorre verso l'alto   mantenendo il contatto con il braccio di DDI1)) che viene su così ((si rimette a braccia conserte))

19. DDI1: ((ha tolto il braccio che indicava il punto improprio ma ha ancora il braccio che indica la retta propria davanti a sé)) esatto ok

20. DDI2: e quello è il piano

21. DDI1: ok ((silenzio per 5 secondi tenendo sempre la mano alzata)) quindi io dovrei ((5 secondi di silenzio)) ho la retta propria ((scatto con la mano alzata)) ho la rettaaa il punto all'infinito ((rimette anche il secondo braccio per tornare a "forma di rette sghembe")) che però è definito da due punti ((silenzio 4 secondi con le braccia ferme)) devo trovare un piano ((muove il braccio che indica la retta propria e fa un gesto rotatorio con l'indice

indicando il braccio che indica il punto improprio  poi, rimanendo in silenzio si mette a braccia conserte)) si però non so farlo su GeoGebra ((rivolge lo sguardo a DDI2)) adesso ho capito cos'è ma non riesco a farlo

22. DDI2: eeeee allora io prenderei la mia retta ((alza un avambraccio davanti a sé )) una retta propria ((piccolo scatto del braccio)) prendo un punto qualunque ((indica il braccio appoggiando il dito )) su di esso [DDI1: mh-mh] attraverso quel punto ((batte il dito sul braccio)) faccio passare la retta impropria

23. DDI1: si ((annuisce vistosamente e prende subito il mouse in mano))

24. DDI2: e definisco il piano che è dato ((mani aperte davanti a sé)) definito ((torna a braccia conserte)) dalle due rette che a quel punto sono due rette che si intersecano

I passaggi tra 1 e 24 esemplificano uno dei momenti di svolta dell'attività durante Q3.2+A3.2. In 1 si nota come sia in atto un momento delicato dell'attività: nella parte precedente, il *joint labour* era intenso ma qui DDI1 e DDI2 stanno comunicando un distacco, non sentono più di esprimersi nell'attività. Nei passaggi tra 2 e 9 l'interazione avviene tra DDI1, DDM2 e me: gli interventi alle righe 4-6 e 8 forniscono un impulso che riattiva il flusso dell'attività fino a portare a materializzare il caso problematico delle rette sghembe (riga 9). Nei passaggi 10-15 la relazione tra il sapere e i mezzi semiotici di oggettivazione che materializzano il sapere in conoscenza viene precisata e resa più esplicita. Infatti, lo stabilire un'associazione tra le braccia che materializzano la situazione problematica (righe 12 e 13) e gli enti geometrici in gioco permette, tra 16 e 20, di introdurre nuovi mezzi semiotici dati non tanto e non solo dall'aggiunta del braccio di DDI2 (riga 16) quanto dalla sincronia tra il "nuovo braccio" e parole e movimenti che lo accompagnano. Questa nuova organizzazione dei mezzi semiotici di oggettivazione permette una nuova percezione della situazione. Nei passaggi 21-24 la rete di mezzi semiotici si arricchisce nuovamente perché entra in gioco anche il software GeoGebra, “portato” da DDI1 in 21. Il passaggio 22 mette in evidenza sia la tensione in atto in questo segmento di attività sia la complessa relazione tra il sapere e la sua materializzazione in conoscenza attraverso i mezzi semiotici di oggettivazione. Infatti, nella prima parte la verbalizzazione di DDI2 passa dal parlare di retta (parola che in italiano è di genere femminile) al parlare di “un punto su di esso”, con “esso” al maschile mentre, a livello non verbale, indica il braccio che materializza la retta. Nella parte finale, l’espressione “retta impropria” che, non si riferisce davvero alla retta impropria ma sembra più essere un’espressione che collassa verbalmente ciò che viene materializzato attraverso l’attività cinestetica, gestuale e verbale precedente (prendo un punto sulla retta propria e prendo la retta che passa per quel punto e per il punto improprio). Il processo di oggettivazione proseguirà anche in altri momenti nell’ambito di Q3.3+A3.3 rendendo l’incontro con il sapere storico-culturale sempre più profondo e consapevole anche se non ancora completo.

6.4.2 Parte conclusiva del lavoro: Problema 9

A DDI1 ed DDI2 viene proposto di scegliere se lavorare alla dinamizzazione del testo originale relativo agli elementi impropri (che corrisponde al Paragrafo 13 del testo originale e ai Problemi 1 e 2 del percorso sperimentale) o se lavorare alle operazioni di proiezione e sezione (che in Castelnuovo, 1904, corrispondono al Paragrafo 9 e Paragrafo 11 e che nella prima parte dell’attività sono stati segmentati e distribuiti nei Problemi 3, 4, 5, 6 e 7). Scelgono di lavorare sugli elementi impropri. Il testo originale viene messo a disposizione sia nella versione online che nella versione stampata, portando però stampe del libro originale (e non del *Libro GeoGebra* con il percorso sperimentale in cui il testo era segmentato in nuclei tematici). Globalmente, il lavoro di DDI1 e DDI2 si organizza in due fasi. Nella prima parte dell’incontro rileggono il testo sottolineando parole a cui associare significati particolari, confrontandosi su quali rimodernare (ad esempio, propongono di usare “intersecare” invece di “segare”) e ripercorrendo parte delle loro riflessioni. In questa fase, DDI2 esplicita una riflessione di confronto tra l’esperienza di lettura fatta nei primi due incontri e quella che sta facendo attualmente: il testo originale completo (come proposto all’ultimo incontro) gli sembra più chiaro alla lettura di quanto non fosse quello segmentato proposto nei problemi precedenti. Nel notare questa differenza, DDI2 mette anche a fuoco due possibili cause: l’aver già lavorato sul testo in precedenza o il focalizzarsi troppo sull'aspetto operativo durante i problemi precedenti, che ha portato a una perdita di attenzione sulla comprensione del testo stesso (cito un estratto: “Facendo si capisce se hai capito”). Questa osservazione ispira DDI1 a proporre di realizzare qualcosa di operativo che possa stimolare una riflessione prima che il Lettore inizi a leggere il testo. Passano quindi a progettare su carta il comportamento di un applet in questa direzione. Al termine dell'incontro vengono realizzate due applet separati, uno sui punti propri (Tabella 14, https://www.geogebra.org/m/mvpjycdt) e uno sui punti impropri in cui è presente uno slider da trascinare o su cui attivare l'animazione (Tabella 15, https://www.geogebra.org/m/dfq6sc8z).

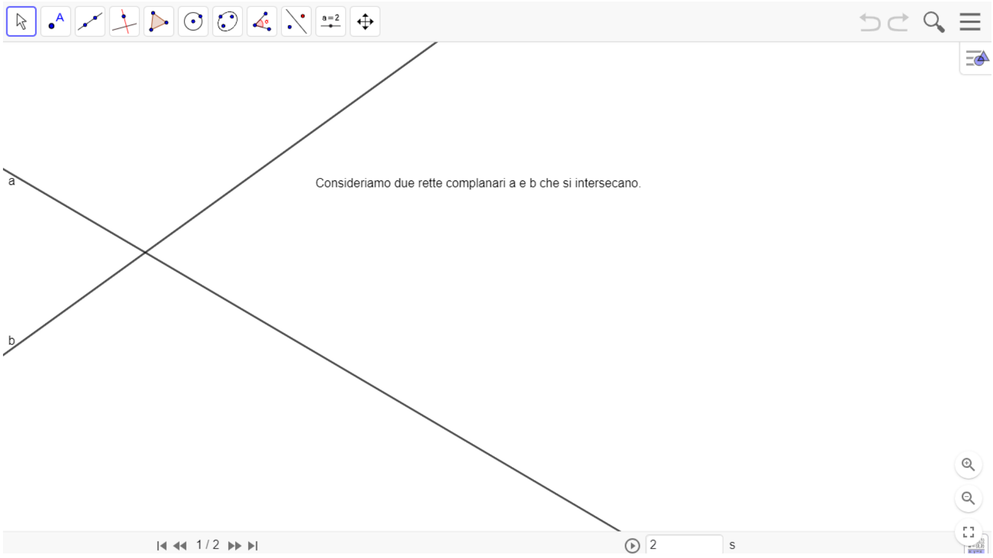
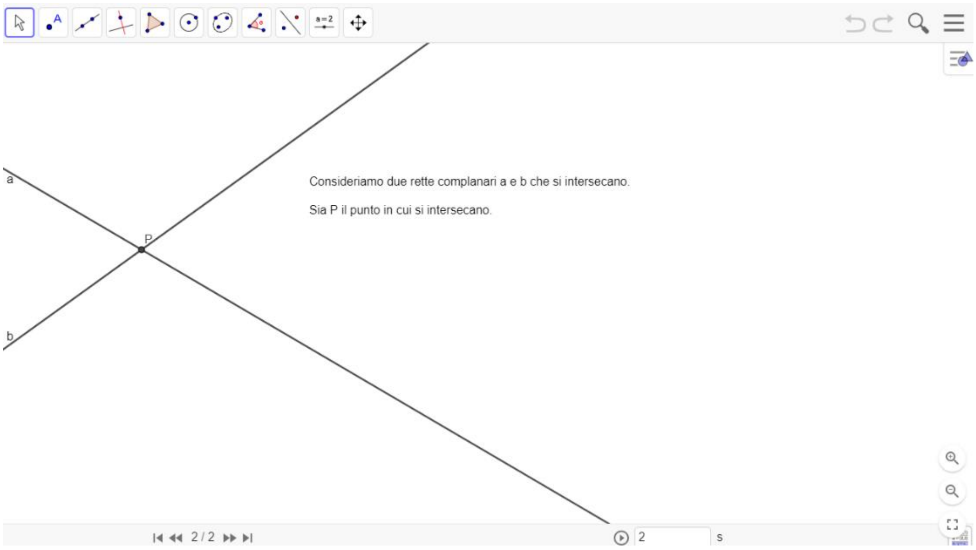
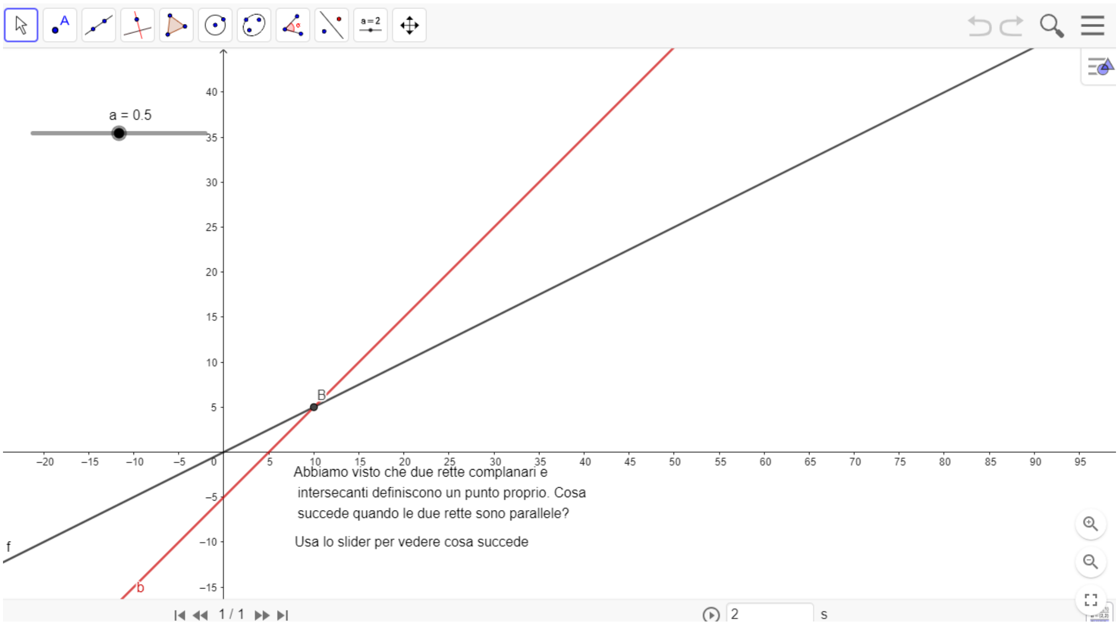
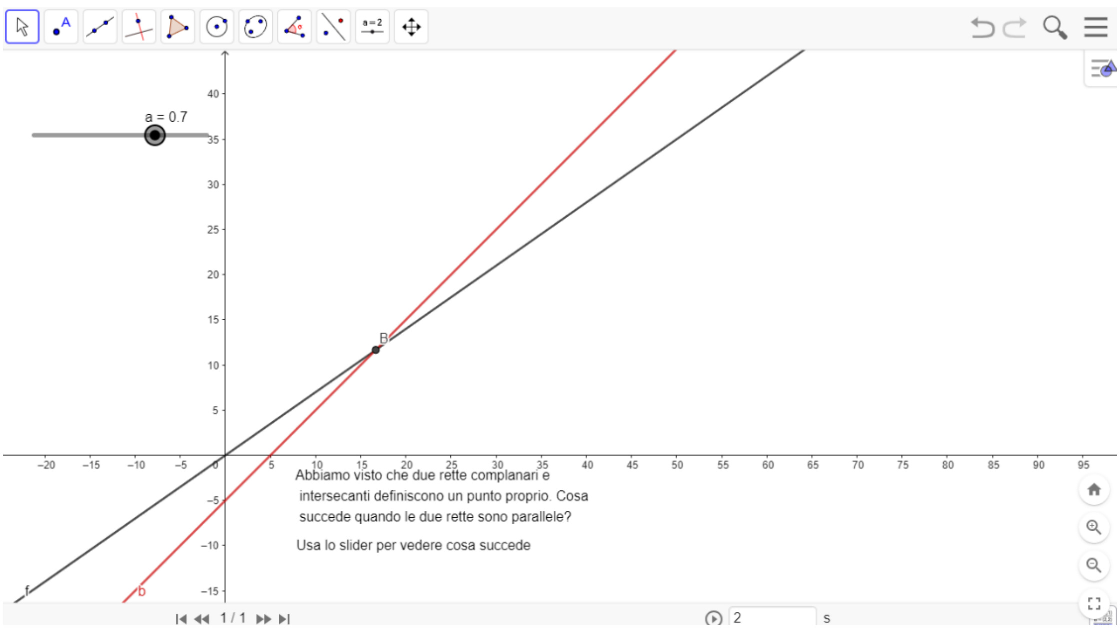
<table>
<tr><th>STEP DELL'APPLET FINALE RELATIVO AI PUNTI PROPRI</th></tr>
<tr><td>
</td></tr>
<tr><td>
</td></tr>
</table>

Tabella 14: Applet finale sui punti propri.

APPLET FINALE RELATIVO AI PUNTI PROPRI





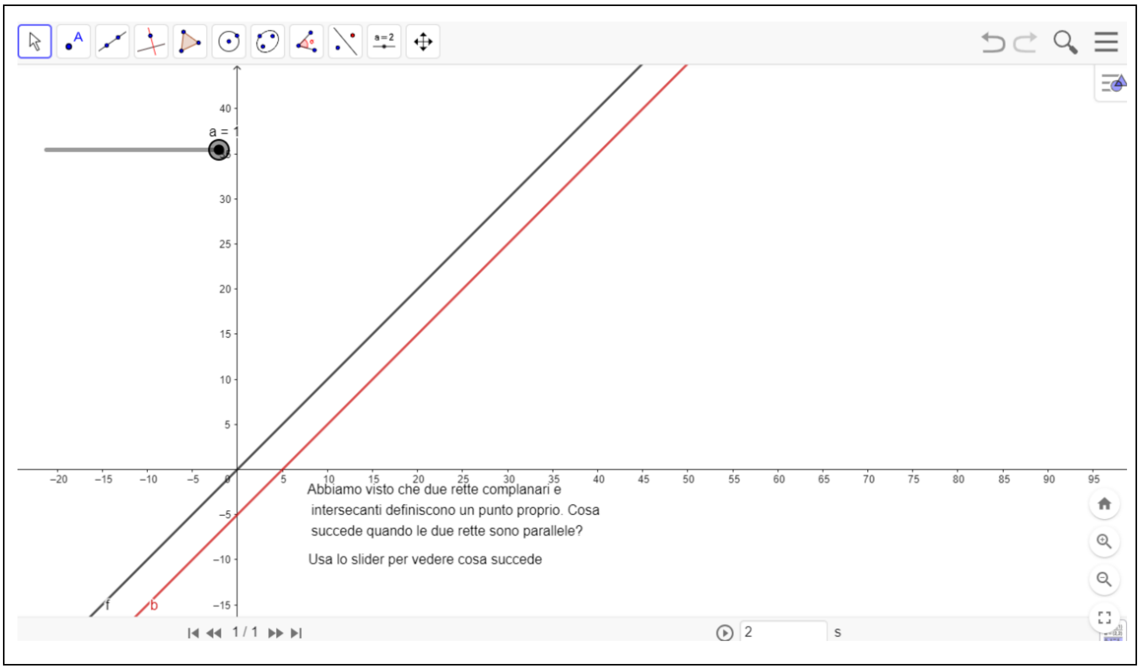


Tabella 15: Applet finale sui punti impropri. Contiene un passo solo ma usando lo slider (cfr. versione online) è possibile vedere il comportamento del punto di intersezione.

La versione mostrata in Tabella 14 e in Tabella 15, pur non essendo la versione completamente definitiva (avrebbero voluto aggiungere colori e formattazione del testo ma a causa del poco tempo rimasto e di alcuni problemi tecnici non è stato possibile) è lo stato considerato finale al termine di una lunga attività durata quasi due ore in cui DDI1 e DDI2 si sono confrontati a lungo su alcune questioni delicate incontrate. Tali questioni delicate riguardavano principalmente tre aspetti: il comportamento dell'animazione, il posizionamento delle rette (considerando anche il fatto che volevano che si fermassero nella posizione di parallelismo[114]) e la formulazione del testo annesso. La discussione ha portato non solo a ripercorrere l'intero lavoro del primo incontro ma anche ad andare in maggiore profondità in alcune questioni.

6.4.3 Riflessioni conclusive sulla coppia DDI1 e DDI2

Nel caso della coppia DDI1 e DDI2, esperti nello studio dell'informatica e dell'apprendimento dell'informatica, abbiamo presentato una panoramica dell'attività svolta nel primo e nell'ultimo incontro riportando solo alcuni passaggi cruciali dell'evoluzione del processo di oggettivazione (senza riportare un'analisi completa e dettagliata dei nodi semiotici), rivolgendo l'attenzione maggiormente nella meta-lettura dell'attività stessa.

[114] Per risolvere questo punto hanno fatto ricorso alla rappresentazione analitica degli elementi della costruzione.

Al termine del primo incontro, durante l'intervista[115] non strutturata finale, DDI1 riporta di essersi mosso per analogie, usando l'approccio informatico di *pattern recognition.* Nel momento iniziale dell'intervista, non sente ancora di aver compreso a fondo l'operazione di proiezione ed esemplifica il suo sentire nel seguente modo:

1. DDI1: ho come l'impressione in questo momento di essere come chatGPT[116]: a forza di dai di pattern ecc sto costruendo uno schema mentale linguistico di questa cosa ma non non sto comprendendo.

Ho chiesto di spiegarmi meglio lo schema linguistico e:

2. DDI1: quando vedo improprio aggiungo una dimensione sostanzialmente e quindi provo a ragionare in quel senso […] punto improprio retta, retta impropria piano a questo punto ho degli altri oggetti e cerco di ricordarmi cosa significa fare le proiezioni cose di questo genere però per il momento ho come l'impressione che lo sto facendo in maniera molto meccanica e appunto ci vedo chatGPT istruito per bene con questa cosa a rispondere a questo tipo di esercizi […] quello che ho visto su chatGPT è che applica pattern noti a cose di questo genere senza comprendere quello che fa quindi l'ho visto svolgere correttamente certi esercizi per esempio di fisica ma poi sbagliare in altri perché proprio non capisce di cosa sta parlando cioè non ha una vera comprensione di cosa sta parlando […] non lo so questa è l'impressione che ho in questo momento

3. DDI2: […] c'è un problema di linguaggio nel senso che come sempre in matematica devi definire delle cose capire che cosa vogliono dire le parole dimenticarti quello che avevi prima e usare quelle diciture lì e quelle cose lì che però è un processo lento da acquisire. Allora il processo più veloce è quello di fare un remapping su cose note e quindi anche per me c'è appunto questo mapping che scala la dimensione per cui c'è sempre questo passaggio […] i termini sono poco chiari perché non si parla di piano che sarebbe molto più chiaro perché piano è una cosa che so cosa vuol dire mentre retta impropria devo sempre ritornare alla definizione […] Proiezione è [DDI1: molto diversa da quella] una cosa ancora più oscura nel senso che secondo me non è nemmeno definita in maniera chiara cioè io non ho ben capito che cos'è la proiezione

4. DDI1: mah, il problema è che tu hai un'idea di proiezione di un altro tipo

Chiedo loro di dirmi di più su questa discrepanza di idee e DDI1 mi spiega che, durante l'attività, gli è tornato in mente quando faceva la prospettiva in disegno tecnico in storia dell'arte. Quindi, la sua idea di proiezione di un oggetto (frutto di apprendimenti precedenti) è quella di *proiezione su una superficie*. La rottura rispetto a questa idea è legata a quanto esplicitato nell'Osservazione 3.1 nella Sezione 4.4: nel testo di Castelnuovo l'operazione di proiezione non è definita come proiezione su qualcosa (che è una definizione separata) ma *l'operazione di proiezione coincide con la figura proiettante*. Curiosamente, la discussione durante l'intervista sul confronto tra l'idea di proiezione familiare e l'idea di

[115] Riporto solo scambi verbali senza trascrivere azioni o gesti.
[116] La sperimentazione è avvenuta tra marzo e aprile del 2023 e la prima versione di chatGPT (acronimo di Chat Generative Pre-trained Transformer, https://chat.openai.com/) era stata rilasciata da pochi mesi (il 30 novembre 2022).

proiezione in Castelnuovo, ha permesso a DDI1 di materializzare una connessione tra le due che gli ha permesso di notare nuovi collegamenti tra esse e nuove percezioni del sapere presentato in Castelnuovo (1904), rendendo anche il momento dell'intervista una parte del processo di oggettivazione. DDI1 stesso, infatti, dopo questa discussione si "smentisce" e dichiara di aver capito meglio l'idea di proiezione da centro proprio ma di avere ancora poco chiara la proiezione da una retta (che, in effetti, è qualcosa di puramente geometrico che non ha corrispondenza nel mondo artistico della prospettiva). Mettere in evidenza la questione della familiarità rispetto a linguaggio e oggetti introdotti porta l'attenzione su quanto sia cruciale l'indicazione di progettazione relativa alla considerazione e valorizzazione delle conoscenze pregresse (cfr. Sezione 3.4). Si tratta infatti non solo di tenerne conto ma anche di trovare un modo per capire quali esse siano, perché hanno un ruolo cruciale nel comprendere lo sviluppo del processo di addomesticamento dell'occhio.

L'intervista prosegue con una mia richiesta di approfondimento riguardo alla relazione tra pattern linguistici e comprensione. Entrambi dichiarano di sentire di aver individuato un pattern che sembra funzionare ma sentono anche di non aver compreso le ragioni per cui tale pattern funzioni, anche a causa di uno specifico problema di terminologia che, come evidenziato da DDI2, in Castelnuovo è estremamente diversa da quella familiare. L'intervista si chiude con un'ultima domanda di approfondimento sui momenti dell'attività che hanno percepito come momenti di svolta rispetto al "funzionare" del pattern linguistico. Descrivono tre momenti, tutti localizzati nell'ambito del Problema 3 (cfr. Sezione 6.4.1):

- il momento in cui l'idea di direzione di una retta è stata percepita in termini vettoriali (cosa che è avvenuta nel segmento di attività subito precedente l'estratto riportato in 1-24);
- il momento in cui DDI1 mette le "braccia a forma di rette sghembe" (riga 9 dell'estratto riportato);
- il momento in cui le due braccia si toccano (riga 18 dell'estratto riportato)

Queste esplicitazioni forniscono una conferma del fatto che nel segmento 1-24, viene *effettivamente* descritto un segmento di oggettivazione.

Per riassumere quanto avvenuto nell'ultimo incontro, possiamo fare due osservazioni. La prima riguarda la diversa percezione dell'esperienza di lettura riportata da DDI2, suggerendo che il ruolo dell'abitudine potrebbe influenzare questa percezione, punto da esplorare meglio in futuro. La seconda osservazione riguarda il prodotto finale realizzato da DDI1 e DDI2, che presenta diversi aspetti interessanti. Questa coppia è stata l'unica a realizzare qualcosa di operativo per anticipare la lettura del testo. Inoltre, hanno introdotto l'uso delle animazioni e hanno formulato il testo di accompagnamento con una domanda, attribuendo al Lettore un ruolo attivo.

6.5 Riflessioni conclusive trasversali e risposta alle domande di ricerca

Il presente capitolo riguarda l'analisi dei dati raccolti coinvolgendo quattro coppie di partecipanti, con diverse formazioni in ambito matematico, alle quali è stato proposto di svolgere il percorso sperimentale descritto nel Capitolo 4.

La prima coppia di partecipanti è composta da due studenti di Laurea Triennale in Matematica (LT1 e LT2). In questo caso, è stata presentata un'analisi dettagliata di uno dei nodi semiotici rilevati che ha segnato uno dei momenti chiave dell'intero percorso. Tale nodo si localizza nell'ambito del Problema 3 e, in particolare, durante il lavoro in Q3.2+A3.2. Il conflitto che ne ha permesso l'innesco è stato generato dalla richiesta di realizzare una costruzione per visualizzare l'operazione di proiezione nel caso del centro improprio. L'ultimo problema del percorso, il Problema 9, richiede di partire da estratti di testo originale su cui si è già lavorato nei problemi precedenti e di creare una o più risorse da pubblicare online sulla PSG avendo uno scopo comunicativo. Tale richiesta offre un contesto per ripercorrere con un approccio metacognitivo la propria esperienza. Nel caso di LT1 e LT2 tale approccio ha permesso di rilevare una sorta di consapevolezza del nuovo modo di percepire non solo gli oggetti culturali coinvolti ma anche il testo stesso.

La seconda coppia di partecipanti è composta da due ricercatori in geometria algebrica (RGA1 e RGA2). In questo caso, è stata presentata un'analisi di quattro nodi semiotici distribuiti nell'arco dell'intero percorso (Problema 2, Problema 3, Problema 4 e Problema 8). RGA1 e RGA2 sono geometri algebrici professionisti e hanno un occhio già addomesticato dalle loro esperienze di apprendimento precedenti. Tuttavia, conversare con Castelnuovo e confrontarsi con i modi di fare geometria proiettiva in un testo di inizio Novecento, avendo a disposizione un "arsenale" semiotico in grado di materializzare visivamente e dinamicamente comportamenti che sono tipici della geometria proiettiva, ha offerto loro la possibilità di incontrare nuovi aspetti del sapere. Durante l'attività relativa al Problema 9 è emerso un fenomeno interessante: la rilettura del testo fatta dopo un'esperienza di apprendimento e con un nuovo obiettivo (comprendere il testo da una prospettiva diversa, come quella di un'altra persona) ha permesso a RGA1 e RGA2 di notare nuovi aspetti del testo stesso.

La terza coppia di partecipanti è composta da DDM1 e DDM2 che si occupano di ricerca in didattica della matematica. Per valorizzare il punto di vista di esperti nello studio dell'apprendimento della matematica, in questo caso è stato dato maggiore spazio alle meta-riflessioni emerse sull'attività di GGBZ in sé. Tuttavia, anche in questo caso sono stati rilevati dei nodi semiotici nel corso dell'attività e ne sono stati riportati due esempi: di uno, nel Problema 2, è stato fatto un rapido accenno e di un altro, nel Problema 3, è stato riportato un estratto particolarmente significativo. Durante l'attività relativa al Problema 9, è emersa una riflessione che evidenzia una distinzione tra un prodotto finale realizzato con scopo comunicativo e uno realizzato con scopo didattico.

La quarta coppia di partecipanti è composta da due ricercatori in informatica ed esperti nello studio dell'apprendimento dell'informatica (DDI1 e DDI2). Per valorizzare il loro particolare punto di vista sull'attività di GGBZ, anche in questo caso, è stato dato maggiore spazio alle meta-riflessioni emerse sull'attività di GGBZ in sé. Tuttavia, anche nell'analisi dell'attività della coppia DDI1 e DDI2 sono stati rilevati dei nodi semiotici e ne sono stati riportati due esempi: di uno, nel Problema 2, è stato fatto un rapido accenno e di un altro, nel Problema 3, è stato riportato un estratto particolarmente significativo. Durante l'attività legata al Problema 9, ripercorrendo la propria esperienza con i problemi precedenti, è emerso un punto interessante: DDI1 e DDI2 hanno evidenziato la possibilità di realizzare un prodotto finale che coinvolga direttamente il Lettore *anticipando* la lettura.

In tutte e quattro le coppie sono emerse due forti evidenze:

- la *presenza* di processi di oggettivazione nell'attività nei primi otto Problemi indipendentemente dal background matematico delle coppie coinvolte. In particolare, in tutti i casi, nel primo incontro è stato rilevato almeno un nodo semiotico sia nell'attività del Problema 2 che nell'attività del Problema 3 (in particolare, in Q3.2+A3.2). Tuttavia, il processo di oggettivazione non si è sviluppato allo stesso modo nei quattro casi ma si è consustanziato con il processo di soggettivazione di ciascuna persona coinvolta e con le dinamiche di interazione. Inoltre, nello specifico, l'uso della TO nell'analisi dell'attività di GGBZ ha permesso di mettere in luce anche informazioni importanti rispetto all'apprendimento dei fondamenti della geometria proiettiva e al modo con cui il dialogo con Castelnuovo ha permesso di ricollegare le frammentate e diversificate conoscenze pregresse. Questo fornisce una conferma empirica dell'efficacia della TO come prospettiva teorica per rilevare e studiare l'apprendimento anche in situazioni che coinvolgono l'uso di tecnologie digitali e testi storici.
- Durante l'attività nel Problema 9 si è verificata una corrispondenza tra i tratti di attività nei primi otto problemi che si sono rivelati cruciali nel processo di oggettivazione della coppia e le attenzioni che quella coppia mostra di avere per il Lettore nel progettare e realizzare la sua risorsa. Attraverso l'attività proposta nel Problema 9, è come se emergesse una sorta di consapevolezza del processo di oggettivazione.

Guardando in maniera trasversale il dispiegarsi dell'attività nelle quattro situazioni e mettendo insieme le meta-riflessioni emerse, possiamo delineare una risposta alle domande di ricerca che sono state presentate nella Sezione 3.5 .

DR1: Quando si è coinvolti in un'attività di GGBZ di un estratto del testo di Castelnuovo (1904) relativo ai fondamenti della geometria proiettiva, in che modo si sviluppa l'addomesticamento dell'occhio e in che misura si può affermare che si tratti di un'attività Θ di insegnamento/apprendimento?

Risposta a DR1: Nel processo di GGBZ del testo di Castelnuovo viene richiesto di incarnare e materializzare le componenti iconiche, simboliche e verbali degli estratti proposti sfruttando le *affordances* della GSP. In questo processo, analizzando l'attività di tutte e quattro le coppie alla luce della TO e secondo la metodologia presentata nel Capitolo 5, sono stati enucleati dei nodi semiotici che nella TO sono considerati segmenti di processo di oggettivazione, cioè di processo di apprendimento. L'analisi di tali nodi semiotici, caratterizzati da una ricca e complessa organizzazione di mezzi semiotici di oggettivazione, ha permesso di evidenziare dei passaggi cruciali del processo di oggettivazione del sapere storico-culturale che riguarda sia la natura degli elementi impropri e sia la loro relazione con quelli propri. Ad esempio, nelle tre coppie di non geometri professionisti, nel corso dell'attività di visualizzazione dinamica è emersa una trasformazione nella percezione del "punto improprio": da una retta precisa (generando una forte rottura percettiva rispetto all'esperienza euclidea) – al fascio/famiglia di rette parallele – a una delle rette di un fascio/famiglia di rette parallele – alla direzione comune di un fascio/famiglia di rette parallele. Questo ci autorizza a caratterizzare l'attività di GGBZ di un testo matematico come un'attività Θ di insegnamento/apprendimento nel senso di Radford (2021). Ma ci autorizza anche a ipotizzare che un'attività di GGBZ di un testo storico di geometria proiettiva potrebbe essere scelta come attività sperimentale per studiare come si sviluppa l'apprendimento in questo ambito della geometria.

La seconda domanda di ricerca si focalizza maggiormente sugli aspetti di progettazione di un percorso didattico che strutturi l'attività di GGBZ.

DR2: Volendo progettare un percorso didattico ϕ che configuri l'attività di GGBZ di un testo matematico qualsiasi, quali linee guida operative si possono delineare?

Risposta a DR2: Nel Capitolo 4 è stato presentato e descritto il percorso didattico sperimentale, caratterizzando di caso in caso i diversi tipi di quesiti e di azioni e la sua descrizione può già essere considerata parte della risposta. Alla luce dell'analisi dei dati, è possibile però mettere a fuoco alcuni dettagli di progettazione più precisi a cui prestare attenzione per il loro ruolo particolare:

- sfruttare le condizioni che si sono rivelate funzionali a creare la possibilità di trasformare la percezione della situazione. Ad esempio:
  - l'alternanza di azioni in cui è richiesto di completare costruzioni con quelle in cui è richiesto di realizzare costruzioni partendo da una schermata vuota;
  - la richiesta esplicita di produrre delle risposte scritte;
  - il fatto di avere a disposizione anche il testo stampato su carta;
  - il rispetto dei momenti di conflitto, della titubanza e dei silenzi;
- nell'attività in cui è richiesto di realizzare la risorsa finale (es. Problema 9), specificarne la finalità in modo preciso (prodotto comunicativo/divulgativo o didattico);
- considerare come prerequisito tecnico anche il cambio di visualizzazione prospettica nella schermata *GeoGebra 3D*, la familiarità nell'uso del [Piano grigio] e il funzionamento delle dipendenze reciproche tra gli elementi di una costruzione. Infatti, il comportamento del software in alcuni momenti si è rivelato fuorviante per tre ragioni: se lo zoom non è adeguato, le appartenenze tra gli elementi non sono visualmente evidenti (ad esempio, può capitare di vedere un punto che sembra stare fuori da un piano anche se gli appartiene); distinguere il [Piano grigio] (che serve per creare punti liberi) e un piano "geometrico" non è spontaneo; l'ordine con cui vengono costruiti gli oggetti in GeoGebra (cioè il processo del disegnare in GeoGebra) influenza le relazioni di dipendenza in modi che potrebbero non essere assonanti/coerenti con il comportamento geometrico atteso.

A tali domande specifiche e contestualizzate, ne abbiamo aggiunto un'altra, più ampia, che accoglie la sfida di Thomsen e colleghi (2022) riguardo al settore di ricerca in didattica della matematica in cui storia, didattica e tecnologie digitali interagiscono tra loro: proporre studi inquadrati con prospettive teoriche in grado di equilibrare in modo opportuno sia gli aspetti storici, matematici e didattici coinvolti, sia il loro legame con l'uso della tecnologia digitale.

DR3: Più in generale, posizionandoci nel terreno di ricerca che riguarda la relazione tra storia, didattica della matematica e uso di tecnologie digitali in che misura la TO può essere una prospettiva efficace a inquadrare la complessità dei problemi in questo ambito?

Risposta alla DR3: Per delineare la risposta a questa domanda, consideriamo il lavoro di Santi e Radford (2022) come il primo tassello che chiarisce le ragioni per cui la TO è una prospettiva efficace a inquadrare studi che riguardano il ruolo della storia nella didattica della matematica. Nel lavoro qui presentato hanno un ruolo centrale sia il testo storico che l'uso delle tecnologie digitali e la TO si è rivelata una prospettiva teorica efficace e operativa per cogliere complessità e specificità di questo ampliamento. Infatti, nell'analisi dell'attività, ciò che caratterizza un nodo semiotico e fornisce informazioni sull'apprendimento è l'*organizzazione* dei mezzi semiotici di oggettivazione, la loro *dinamica d'uso* da parte delle persone impegnate nell'attività di insegnamento/apprendimento. In quest'ottica, la richiesta di visualizzare dinamicamente porzioni di testo in GeoGebra offre la possibilità di materializzare la conoscenza con un *nuovo sistema di mezzi semiotici di oggettivazione*, strutturato secondo le specifiche del software.

La prospettiva della TO, nell'analisi dei dati, ha permesso di accogliere la complessità che la tecnologia digitale porta con sé senza però perdersi in essa. Infatti, il "seguire il nodo" permetteva di riconoscere anche cosa in quel momento stava avendo (e non stava avendo) un ruolo nel processo di oggettivazione. "Seguendo il nodo" sono emerse tutte le sfumature dettagliate dell'uso intenzionale che le persone coinvolte nell'attività hanno fatto di: oggetti (come la penna che, in diversi momenti dell'attività di, ad esempio, RGA2, ha permesso di tracciare disegni su carta, materializzare movimenti in aria, incarnare rette, indicare punti precisi nello schermo o in un foglio,…); segni e dispositivi linguistici (come, ad esempio, le riletture e riformulazioni di parti di testo, porzioni di consegna delle attività, la scelta di una parola piuttosto che un'altra o l'uso di una certa struttura linguistica per materializzare oralmente o in modo scritto qualcosa, ma anche la scelta delle etichette da inserire nella costruzione,…); strumenti (ad esempio il mouse) funzioni e comportamenti del software (non tanto e non solo il trascinamento, ma anche i colori, il cambio di visuale prospettica, il [Mostra/Nascondi], la traccia attivata su una retta che materializza il piano che si sta cercando di visualizzare…), ecc.

Il processo di oggettivazione può essere analizzato solo tenendo conto di tutta questa complessità (altrimenti, non ci sarebbe oggettivazione) e questo lavoro esemplifica un modo per farlo quando sono coinvolte tecnologie digitali, fornendo forza e fondamento per la scelta di una teoria come la TO per inquadrare ricerche che hanno un fuoco sull'insegnamento/apprendimento della matematica nell'ambito di interazione tra storia-didattica e tecnologie digitali.

Conclusioni e prospettive future

Nella prima parte di questo lavoro viene introdotta la definizione di GGBZ di un testo matematico, un processo attraverso il quale uno o più individui trasformano un testo matematico stampato in una combinazione di risorse della PSG in modo tale da soddisfare due requisiti:

- *Requisito 1, relativo all'implementazione del processo*: spacchettare e materializzare la matematica incorporata nel testo matematico di partenza sfruttando le *affordances* della PSG.
- *Requisito 2, relativo alle caratteristiche del prodotto finale*: aumentare il potenziale comunicativo del testo originale di partenza.

La caratterizzazione operativa di tali prerequisiti ha permesso di caratterizzare in modo operativo anche il processo di GGBZ individuando tre fasi:

- *Lettura e analisi del testo di partenza* per acquisire familiarità con i suoi contenuti matematici;
- *Visualizzazione dinamica* del contenuto matematico del testo che chi è impegnato nel processo di GGBZ realizza per la propria comprensione attraverso un disegno in GeoGebra;
- *Dinamizzazione del testo* dopo aver integrato e segmentato le componenti discorsive, sincronizzando ciascun segmento con la visualizzazione appropriata, con l'obiettivo comunicativo di agevolare la comprensione degli utenti che fruiranno il prodotto finale ottenuto.

La definizione proposta è generale e non dipende dal tipo di testo. Ma, volendo studiare le caratteristiche del processo di GGBZ, la definizione è stata istanziata in un caso in cui il testo matematico di partenza è un testo storico – *Lezioni di geometria analitica e proiettiva* di Guido Castelnuovo (1904) – e il punto di arrivo è un *Libro GeoGebra.* Il contesto che ha fornito senso all'attività è la progettazione di una nuova edizione del testo di Castelnuovo composta da un sistema di *Libri GeoGebra* collegati tra loro in cui uno è fedele all'opera originale (*Libro originale*) e l'altro (*Libro delle costruzioni*) contiene i prodotti delle geogebrizzazioni di estratti di testo originale (cfr. nota 53 della Sezione 2.3.2, e Appendice B).

Alla prima parte teorica della tesi si affianca una seconda parte più sperimentale in cui il processo di GGBZ, strutturato in un percorso didattico sperimentale, è stato svolto da quattro coppie di esperti di tematiche ritenute rilevanti per l'esplorazione e la caratterizzazione del processo stesso. In questo modo l'attività di geogebrizzare un testo ha preso forma concreta e ciò che è emerso è che si tratta di un'attività di insegnamento/apprendimento nel senso di Radford (2021).

Gli sviluppi del lavoro qui presentato potranno diramarsi in diverse direzioni[117]. In una prima, mantenendo intatto l'impianto di ricerca, si potrebbe proporre una nuova analisi dando maggiore rilevanza ad aspetti che in questa sede sono stati solo accennati. Ad esempio, per gli obiettivi di questa tesi il focus dell'analisi è stato principalmente orientato sul processo di oggettivazione; un primo approfondimento potrebbe dunque riguardare l'analisi dei processi di soggettivazione (D'Amore, 2015; D'Amore & Radford, 2017), ponendo attenzione anche alla relazione tra questi e la consapevolezza sul processo di oggettivazione emersa. Altri esempi possono essere lo studio del ruolo dell'immaginazione, dell'utilizzo didattico dei *Libri GeoGebra* in contesti di formazione universitaria o formazione insegnanti e del ruolo dell'insegnante nel contesto di un'attività di GGBZ di un testo. Una seconda direzione si potrebbe sviluppare proponendo una nuova analisi del processo di GGBZ, condotta scegliendo quadri teorici diversi dalla TO per giustificare le scelte e interpretare i dati, arricchendo così lo studio della GGBZ di ulteriori elementi e risultati. Una terza direzione potrebbe riguardare la distinzione di diversi processi di GGBZ, per individuarne diverse tipologie in base ai soggetti che la compiono, ai loro obiettivi e alle diverse finalità dei prodotti realizzati. Infine, una quarta direzione riguarda l'approfondimento delle caratteristiche del *Libro GeoGebra* realizzato come prodotto della GGBZ. Infatti, pur essendo anch'esso un testo matematico, presenta una maggiore complessità semiotica: è un testo "aumentato", con elementi di novità non solo nelle caratteristiche strutturali ma anche nelle relazioni tra esse. Un primo passo in questa direzione di approfondimento potrebbe essere fatto partendo da studi di linguistica adattati alla didattica della matematica (ad esempio Ferrari, 2020) e da studi che riguardano l'analisi del discorso multisemiotico della matematica (ad esempio il già citato O'Halloran, 2008) e l'analisi del discorso multimodale (come O'Halloran, 2006).

Per concludere, alla luce delle riflessioni finora delineate, possiamo tornare a pensare alla possibile nuova edizione per il testo di Castelnuovo. Essendo la GGBZ un'attività di apprendimento, un prossimo passo potrebbe essere quello di coinvolgere sempre più "studenti del presente" per geogebrizzare parti di testi storici da innestare nei *Libri originali* scritti dagli "autori del passato". Così facendo, il dialogo tra il passato e il presente potrà materializzarsi in un'opera scritta in modo corale in cui lo spazio online fornisce uno spazio "fisico" per ospitare lo sviluppo dello "spazio congiunto di presenza passata e presente" (Radford & Santi, 2022, p. 1490)[118].

[117] Gli sviluppi futuri qui presentati prendono le mosse dalle considerazioni dei revisori di questa tesi, che ringrazio per i loro suggerimenti.
[118] Testo originale: "joint space of past and present presence".

Bibliografia

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practices in Cabri Environments. *ZDM*, *34*(3), 66–72. https://doi.org/10.1007/BF02655708

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Santi, G. R. P. (2020). La teoria dell'oggettivazione e la teoria delle situazioni didattiche: Un esempio di confronto tra teorie in didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica*, *28*(1), 7–61.

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Garzetti, M. (accettato). Enhancing teacher training in mathematics education: A model for a semiotic approach to feedback and interpretative knowledge. In *ERME Topic Conference on Feedback & Assessment in Mathematics Education (FAME).*

Asenova, M., D'Amore, B., Fandiño Pinilla M. I., M., Fúneme, M., Iori, & Santi, G. (2023). *Teorie rilevanti in didattica della matematica*. Bonomo editore.

Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023a). Unfolding Teachers' Interpretative Knowledge into Semiotic Interpretative Knowledge to Understand and Improve Mathematical Learning in an Inclusive Perspective. *Education Sciences*, *13*(1), 65. https://doi.org/10.3390/educsci13010065

Asenova, M., Del Zozzo, A., &, Santi, G. (2023b). From Interpretative Knowledge to Semiotic Interpretative Knowledge in prospective teachers' feedback to students' solutions. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 51–58). PME.

Aubry, M. (2009). Metaphors in mathematics: introduction and the case of algebraic geometry. *SSRN*. https://doi.org/10.2139/SSRN.1478871

Baccaglini–Frank, A. E., Santi, G., Del Zozzo, A., & Frank, E. (2020). Teachers' perspectives on the intertwining of tangible and digital modes of activity with a drawing robot for geometry. *Education Sciences*, *10*(12), 387. https://doi.org/10.3390/educsci10120387

Baccaglini–Frank, A., & Mariotti, M.A. (2010). Generating conjectures in dynamic geometry: the maintaining dragging model. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *15*(3), 225–253. https://doi.org/10.1007/s10758–010–9169–3

Bagni, G.T., & D'Amore, B. (2020/2023). *Le basi matematiche e artistiche della prospettiva*. Bonomo editore. [Prima edizione nel 2020 con Pitagora].

Balsløv, C. (2018). *The mutual benefits of using CAS and original sources in the teaching of mathematics*. [Tesi di Laurea non pubblicata]. The Danish School of Education, Aarhus University.

Barbin E., Guillemette D., & Tzanakis C. (2020). History of mathematics and education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education*. Springer.

Bolondi, G. (2005). Geometria proiettiva, geometria descrittiva e geometria dello spazio nella scuola italiana. In M. Franciosi (Ed.), *Prospettiva e geometria dello spazio* (pp. 145–176). Agorà.

Bolondi, G., Branchetti, L., Cascella, C., & Giberti, C. (2023). What does it mean to "grasp the rectangle"? Organization of linguistic formulation and activation of argumentative processes in geometrical problems. *Frontiers in Education, 8*, 1250661. https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1250661

Bolondi, G., Cascella, C., & Giberti, C. (2021). Formulazione degli item matematici e strategie di soluzione: Alcuni esempi da uno studio empirico condotto al grado 8. In P. Falzetti (Ed.), *I dati INVALSI per indagare e migliorare l'insegnamento della matematica: III seminario "I dati INVALSI: Uno strumento per la ricerca"* (pp. 167–187).

Boninsegna, R., Bolondi, G., Branchetti, L., Giberti, C., & Lemmo, A. (2017). Uno strumento per analizzare l'impatto di una variazione nella formulazione di una domanda matematica. In P. Falzetti (Ed.), *I dati INVALSI: uno strumento per la ricerca* (pp. 101–109). Franco Angeli.

Brigaglia, A., & Ciliberto, C. (1998). La geometria algebrica italiana tra le due guerre mondiali. In S. Di Sieno, A. Guerraggio, & P. Nastasi (Eds.), *La matematica italiana dopo l'unità. Gli anni tra le due guerre mondiali* (pp. 185–320). Marcos y Marcos.

Campedelli, L. (1956). *Esercitazioni di geometria analitica e proiettiva.* CEDAM.

Castelnuovo, G. (1904). *Lezioni di geometria analitica e proiettiva*. Società editrice Dante Alighieri di Albrighi, Segati e C.

Catastini, L., & Ghione, F. (2006). *Le geometrie della visione: scienza, arte, didattica*. Springer Science & Business Media.

Cortesi, E. (2010). Mezzi semiotici di rappresentazione tattili per l'apprendimento della Geometria dei Poliedri [Tesi di Laurea]. Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/1267/1/cortesi_elisa_tesi.pdf

D'Amore, B. (2015). Saber, conocer, labor en didáctica de la matemática: Una contribución a la teoría de la objetivación. In L. Branchetti (Ed.), *Teaching and* *learning mathematics. Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 151–171). Università di Urbino Carlo Bo, Isonomia.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2015). A formula for an objective measurement of students' understanding difficulties of a mathematical text: Evaluative and educational use. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 52*(1–2), 27–58.

D'Amore, B. & Fandiño Pinilla, M.I. (2016). Una formula per la misurazione oggettiva della difficoltà di comprensione di un testo di matematica da parte degli studenti. Uso valutativo e uso didattico. *La matematica e la sua didattica*, *24*(1-2), 59–78.

D'Amore, B., & Radford, L. (2017). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Daroczy, G., Wolska, M., Meurers, W. D., & Nuerk, H. C. (2015). Word problems: A review of linguistic and numerical factors contributing to their difficulty. *Frontiers in Psychology, 6*, 129726. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2015.00348

Del Zozzo, A. (in pubblicazione). Geogebrization of mathematical texts: An example of activity. In *CIEAEM74 Proceedings*.

Del Zozzo, A. (2010). Percezione aptica e apprendimento in geometria: immagini mentali, ostacoli e misconcezioni in presenza di deficit visivo [Tesi di laurea]. Università di Bologna. https://amslaurea.unibo.it/1268/1/Del_Zozzo_Agnese_tesi.pdf

Del Zozzo, A. (2023). Geogebrization: A process for dynamizing classical mathematical texts. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)* (pp. 1479–1492). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.

Del Zozzo, A., & Garzetti, M. (2022). Valutazione formativa oltre la distanza: Lo scambio di feedback nella classe virtuale. *Annali Online della Didattica e della Formazione Docente, 14*(24), 26–46. https://doi.org/10.15160/adfd.v14i24.2582

Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). Transitions between domains of activity as "domestications of the eye" for the learning of mathematics with GGBot. *Digital Experiences in Mathematics Education, 9*(2), 372–400. https://doi.org/10.1007/s40751–023–00124–7

Drijvers, P., Gitirana, V., Monaghan, J., Okumus, S., Besnier, S., Pfeiffer, C., Mercat, C., Thomas, A., Christo, D., Bellemain, F., Faggiano, E., Orozco–Santiago, J., Ndlovu, M., van Dijke–Droogers, M., da Silva Ignácio, R., Swidan, O., Filho, P. L., Marinho de Albuquerque, R., Hadjerrouit, S., ... & Rodrigues, A. (2019). Transitions toward digital resources: Change, invariance, and orchestration. In L. Trouche, G. Gueudet, B. Pepin (Eds.), *The 'Resource' Approach to Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (pp. 389–444). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978–3–030–20393–1_12

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century: An ICMI study* (pp. 37–51). Kluwer.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie: Développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 10*, 5–53.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. (Prefazione di Bruno D'Amore). Springer International Publishing AG. [Lavoro originale del 2011 pubblicato in portoghese da Proem Editora].

Enriques, F. (1898). *Lezioni di geometria proiettiva*. Zanichelli.

Enriques, F. (1908). *Lezioni di geometria descrittiva*. Zanichelli.

Fallavolita, F. (2008). *Le superfici rigate e le superfici sviluppabili; una rilettura attraverso il laboratorio virtuale* [Tesi di dottorato]. Sapienza Università di Roma. https://iris.uniroma1.it/bitstream/11573/916749/1/F_Fallavollita.pdf

Fallavollita, F., & Salvatore, M. (2014). A digital synthetic method. *Geometria's, 14*, 181–190.

Fandiño Pinilla, M. I. (2019). Su alcune situazioni marginali didatticamente significative riscontrate in fase di ricerca: esempi e commenti. *La matematica e la sua didattica*, 27(1), 29–46.

Fandiño Pinilla M. I., & D'Amore B. (2015). Una fórmula para medir objetivamente la dificultad de los estudiantes en la comprensión de un texto matemático. Uso con fines evaluativos didácticos. In B. D'Amore, M. I. Fandiño Pinilla (Eds.), *Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica. Textos completos de las conferencias dictadas por lo conferencistas invitados al Congreso Internacional: Didáctica de la matemática. Una mirada epistemológica y empírica* (pp. 183–214). Edicciones Universidad De La Sabana.

Ferrari, A. (s.d.). *Procedure di coesione*. In Enciclopedia dell'Italiano. Recuperato il 15 aprile 2024, da https://www.treccani.it/enciclopedia/procedure–di–coesione_(Enciclopedia–dell%27Italiano)/

Ferrari, P.L. (2020). *Educazione matematica, lingua, linguaggi. Costruire, condividere e*

comunicare matematica in classe. UTET Università.

Ferri, O. (1996). Sulla necessità di accennare all'esistenza del piano proiettivo nella Scuola Media Superiore. *La matematica e la sua didattica, 10*(2), 201–210.

Fiorentino, M. G. (2017). *Properties of Classical Differential Geometry for camera calibration in Computer Vision* [Tesi di dottorato]. Università degli Studi di Bari.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139–162.

Fitzpatrick, R. (2008). *Euclid's elements of geometry*. (http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/ Elements.pdf) [The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa, edidit et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, in aedibus B.G. Teubneri, 1883–1885 edited, and provided with a modern English translation, by Richard Fitzpatrick.]

Fuchs, H. U. (2012). Il significato in natura: Dalle strutture schematiche alle strutture narrative della scienza. *Le Scienze Nella Prima Educazione*, 11–33.

Gagatsis, A. (1999). *Come misurare la leggibilità dei testi matematici*. Pitagora e Gripo Editorial Iberoamérica.

Gario, P. (2016). Guido Castelnuovo: L'uomo e lo scienziato. *Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, 37*(3–4), 147–183. https://www1.mat.uniroma1.it/ricerca/rendiconti/ARCHIVIO/2016(3–4)/147–183.pdf

Garzetti, M. (2023). *Caratterizzare l'inclusione nella classe di matematica: progettazione e valutazione di interventi didattici inclusivi* [Tesi di dottorato]. Libera Università di Bolzano. https://bia.unibz.it/esploro/outputs/doctoral/Caratterizzare–linclusione–nella–classe–di–matematica/991006524598401241

Giacardi, L. M. (2015). Models in mathematics teaching in Italy (1850–1950). In *Proceedings of Second ESMA Conference Mathematics and Art III* (pp. 9–33). Cassini.

Gibson, J. J. (1977). The theory of affordances. *Hilldale, USA, 1*(2), 67–82.

Hartley e Zisserman (2003). *Multiple View Geometry in Computer Vision*. Cambridge University Press.

Hartley, T., & Hitch, G. (2022, ottobre 19). Working Memory. In *Oxford Research Encyclopedia of Psychology*. Recuperato il 15 aprile 2024 da https://oxfordre.com/psychology/view/10.1093/acrefore/9780190236557.001.0001/acrefore–9780190236557–e–768

Ilyenkov, E. V. (1977). *Dialectical logic*. Progress.

Inwood, M. (1992). *A Hegel dictionary*. Blackwell.

Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2019). Digital technologies as a way of making original sources more accessible to students. In E. Barbin, U. T. Jankvist, T. H. Kjeldsen, B. Smestad, & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 107–130). Oslo Metropolitan University.

Jankvist, U. T., & Geraniou, E. (2021). "Whiteboxing" the content of a formal mathematical text in a dynamic geometry environment. *Digital Experiences in Mathematics Education, 7*, 222–246. https://doi.org/10.1007/s40751–021–00088–6

Jankvist, U., Misfeldt, M., & Aguilar, M. (2019). Tschirnhaus' transformation: Mathematical proof, history and CAS. In E. Barbin, U. Jankvist, T. Kjelsen, B. Smestad & C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of the Eighth European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (pp. 319–330). Oslo Metropolitan University.

Johnson, M. (1987). *The Body in the Mind*. University of Chicago Press.

Kirschner, P., Strijbos, J. W., Kreijns, K., & Beers, P. J. (2004). Designing electronic collaborative learning environments. *Educational Technology Research and Development, 52*(3), 47–66. https://doi.org/10.1007/BF02504675

Laborde, C., & Laborde, J. M. (1995). The case of Cabri–géomètre: Learning geometry in a computer based environment. *Integrating Information Technology into Education, 95*–106.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*. Basic Books.

Lakoff, G, & e Núñez, R. E. (2005). *Da dove viene la matematica, Come la mente embodied dà origine alla matematica* [Where Mathematics Comes From: How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being].(O. Robutti, F. Ferrara & C. Sabena, Trans.). Bollati Boringhieri. (Lavoro originale pubblicato nel 2000 da Basic Books).

Lakoff, G. (1987). *Women, Fire, and Dangerous Things: What Categories Reveal about the Mind*. University of Chicago Press.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. Prentica–Hall.

Leont’ev, A. N. (1981). *Problems of the development of the mind. Progress.*

Lodge, D. (1995). *Therapy*. Secker & Warburg.

Love, E., & Pimm, D. (1996). ‘This is so’: A text on texts. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 371–409). Kluwer.

Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics, 34*(3), 219–248.

Martinelli, A. (2023). *Principi teorici e sperimentazioni digitali finalizzate alla conoscenza e alla comunicazione della geometria delle forme* [Tesi di Dottorato]. Sapienza Università di Roma. https://iris.uniroma1.it/handle/11573/1680882

Mayer, R. E., & Moreno, R. (2003). Nine ways to reduce cognitive load in multimedia learning. *Educational Psychologist*, *38*(1), 43–52.

Merthens, H. (2004). Mathematical Models. In S. De Chadarevian, & N. Hopwood, *Models: the third dimension of science* (pp. 276–306). Stanford University Press.

Migliari, R. (2008). *Geometria descrittiva (Vol. 2)*. CittàStudi.

Migliari, R. (2009). *Geometria descrittiva (Vol. 1)*. CittàStudi.

MIUR. (2012). *Indicazioni nazionali per il curricolo della scuola dell’infanzia e del primo ciclo d’istruzione*. Recuperato il 15 aprile 2024 da https://www.miur.gov.it/documents/20182/51310/DM+254_2012.pdf/1f967360–0ca6–48fb–95e9–c15d49f18831?version=1.0&t=1480418494262

Nemirovsky, R., Rasmussen, C., Sweeney, G., & Wawro, M. (2012). When the classroom floor becomes the complex plane: Addition and multiplication as ways of bodily navigation. *Journal of the Learning Sciences*, *21*(2), 287–323. https://doi.org/10.1080/10508406.2011.611445

Nemirovsy, R. (in pubblicazione). Bodies, Incorporeals, and the Birth of a Mathematical Diagram. In L. D. Edwards & C. M. Krause (Eds.), *The body in mathematics: Theoretical and methodological lenses*. Springer.

Niss, M. & Jensen, T. H. (Eds.) (2002). Kompetencer og matematiklæring – Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark [Competencies and mathematics learning – Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching in Denmark]. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie, 18. Undervisningsministeriet.

Nunokawa, K. (1994). Improving diagrams gradually: One approach to using diagrams in problem solving. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 34–38.

O'Halloran, K. (Ed.). (2006). *Multimodal discourse analysis: Systemic-functional perspectives*. Bloomsbury Publishing.

O'Halloran, K. (2008). *Mathematical discourse: Language, symbolism and visual images*. A&C Black.

Olsen, I., & Thomsen, M. (2017). *History of mathematics and ICT in mathematics education in primary education* [Tesi di laurea non pubblicata]. Aarhus University, Danish School of Education.

Paas, F., Renkl, A., & Sweller, J. (2003). Cognitive load theory and instructional design: Recent developments. *Educational psychologist*, *38*(1), 1–4. http://dx.doi.org/10.1207/S15326985EP3801_1

Parzysz, B. (1988). "Knowing" vs "seeing". Problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational studies in mathematics*, *19*(1), 79–92.

Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: communication in mathematics classrooms*. Routledge & K. Paul.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2003). An analytical model for studying the development of learners' mathematical ideas and reasoning using videotape data. *The journal of mathematical behavior*, *22*(4), 405–435. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2003.09.002

Prieto, J. L., & Arredondo, E. H. (2021). Construcciones euclidianas con GeoGebra y procesos de objetivación: Un estudio con futuros profesores de matemáticas. *REMATEC*, *16*(39), 77–100. http://dx.doi.org/10.37084/REMATEC.1980–3141.2021.n39.p77–100.id496

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9* (Extraordinario 1), 103–129. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33509906

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Towards a cultural theory of learning. In N. Presmeg, L. Radford, W. M. Roth, & G. Kadunz (Eds.), *Semiotics in mathematics education* (pp. 215–234). Brill.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities. *For the learning of mathematics*, *30*(2), 2–7.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM*, *46*, 349–361. https://doi.org/10.1007/s11858–014–0591–1

Radford, L. (2021). *The theory of objectification: A Vygotskian perspective on knowing and becoming in mathematics teaching and learning*. Brill.

Radford, L., Sabena, C. (2015). The Question of Method in a Vygotskian Semiotic Approach. In A. Bikner–Ahsbahs, C. Knipping, C., N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education*. Springer. https://doi.org/10.1007/978–94–017–9181–6_7

Radford, L., & Santi, G. (2022). Learning as a critical encounter with the other: Prospective teachers conversing with the history of mathematics. *ZDM*, *54*(7), 1479–1492. https://doi.org/10.1007/s11858–022–01393–z

Salvatore, M. (2022). Girard Desargues and Geometry Applied to the Arts. In M. A. Ródenas–López, J. Calvo–López, M. Salcedo–Galera (Eds.), *Architectural Graphics. EGA 2022. Springer Series in Design and Innovation, vol 22* (pp. 121–130). Springer. https://doi.org/10.1007/978–3–031–04703–9_13

Salvatore, M., Baglioni, L., Valenti, G. M., & Martinelli, A. (2021). Forms in space: AR experiences for geometries of architectural form. *Representation Challenges. Augmented Reality and Artificial Intelligence in Cultural Heritage and Innovative Design Domain*, 159–162. https://series.francoangeli.it/index.php/oa/catalog/view/686/540/4052

Sernesi, E. (2000). *Geometria 1*. Bollati Boringhieri.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Steenrod, N. E., Halmos, P. R., Schiffer, M. M., & Dieudonné, J. A. (1973). *How to write mathematics*. American Mathematical Society.

Streeck, J., & Mehus, S. (2005). Microethnography: The study of practices. In K. L. Fitch & R. E. Sanders (Eds.), *Handbook of language and social interaction* (pp. 381–404). Lawrence Erlbaum.

Sweller J, Ayres P, & Kalyuga S. (2011). *Cognitive load theory*. Springer.

Sweller, J. (1988). Cognitive load during problem solving: Effects on learning. *Cognitive science*, *12*(2), 257–285.

Thom, J. S., McGarvey, L. M., and Lineham, N. D. (2021). Perspective taking: Spatial reasoning and projective geometry in the early years. In Y. H. Leong, B. Kaur, B. H. Choy, J. B. W. Yeo, & S. L. Chin (Eds.), *Excellence in Mathematics Education: Foundations and Pathways (Proceedings of the 43rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia)*, pp. 385–392. MERGA. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED616208.pdf

Thomsen, M. & Jankvist, U. (2020). Reasoning with digital technologies: Counteracting students' techno–authoritarian proof schemes. In A. Donevska–

Todorova, E. Faggiano, J. Trgalova, Z. Lavicza, R. Weinhandl, A. Clark–Wilson & H.–G. Weigand (Eds.), *Proceedings of the Tenth ERME Topic Study Conference on Mathematics Education in the Digital Age* (pp. 483–490). Johannes Kepler University.

Thomsen, M. & Jankvist, U. T. (2022). Mathematical Thinking in the Interplay Between Historical Original Sources and GeoGebra. In U. T. Jankvist, R. Elicer, A. ClarkWilson, H–G. Weigand y M. Thomsen (Eds.), *Proceedings of the 15th International Conference on Technology in Mathematics Teaching (ICTMT 15)* (pp. 189–196). AU Library Scholarly Publishing Services. https://doi.org/10.7146/aul.452

Thomsen, M., Jankvist, U. T., & Clark, K. M. (2022). The interplay between history of Mathematics and Digital Technologies: A review. *ZDM*, *54*(7), 1631-1642. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01368-0

Voloshinov, V. N. (1973). *Marxism and the Philosophy of Language*. Harvard University Press.

Wartofsky, M. (1984) The paradox of painting: pictorial representation and the dimensionality of visual space. *Social Research, 5*(4), 863–883.

Wassie, Y. A., & Zergaw, G. A. (2019). Some of the Potential Affordances, Challenges and Limitations of Using GeoGebra in Mathematics Education. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(8), em1734. https://doi.org/10.29333/ejmste/108436

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of the Mind. A Sociocultural Approach to Mediate Action*. Harvard University Press.

Yin, R. K. (2003). *Lo studio di caso nella ricerca scientifica*. Armando Editore.

Appendice A

Questa appendice presenta una panoramica tecnica di alcuni ambienti della Piattaforma di Servizi GeoGebra che hanno un particolare ruolo in questa tesi.

Per chiunque connesso a Internet: app GeoGebra Classico

All'avvio di default nella sua versione online *GeoGebra Classico* 2D si presenta come in Figura 85:

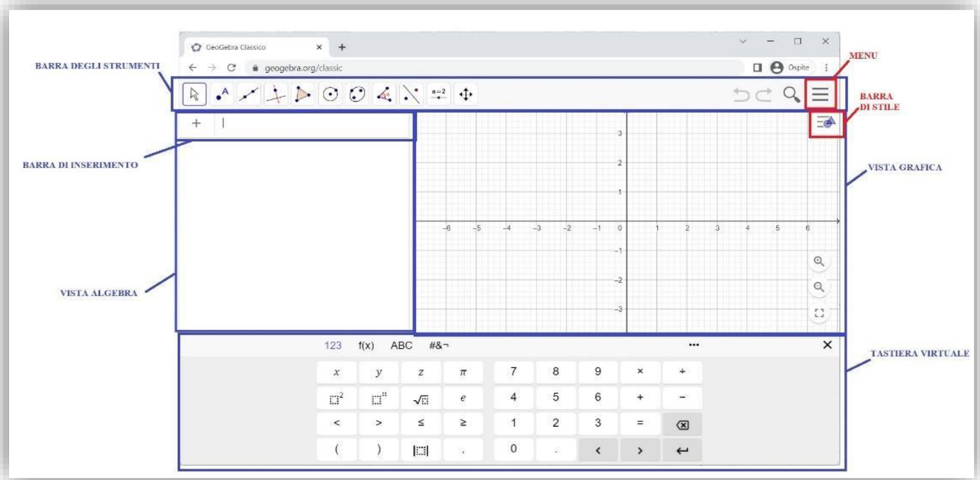


Figura 85: GeoGebra Classico all'avvio con indicazione delle diverse aree.

Analogamente, Figura mostra la schermata di default di *Geogebra Classico* 3D:

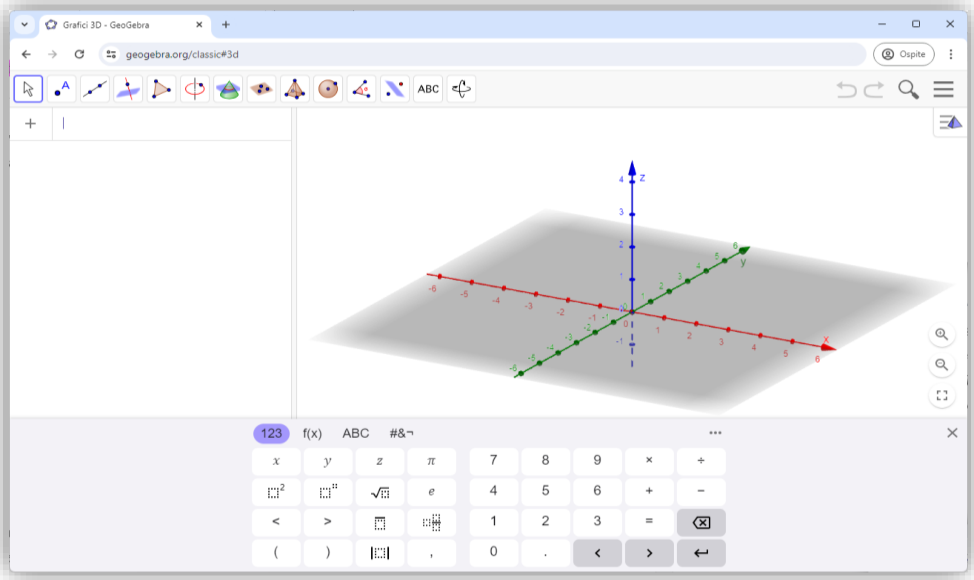


Figura 86: GeoGebra Classico 3D all'avvio.

Gli strumenti di qualsiasi versione di GeoGebra sono raccolti nella [Barra degli strumenti] e sono organizzati in *caselle* ciascuna contenente diversi strumenti: in Figura 87 è mostrato l'esempio della casella degli strumenti di default[119] che si apre cliccando su [Punto] in *GeoGebra Classico 2D.*

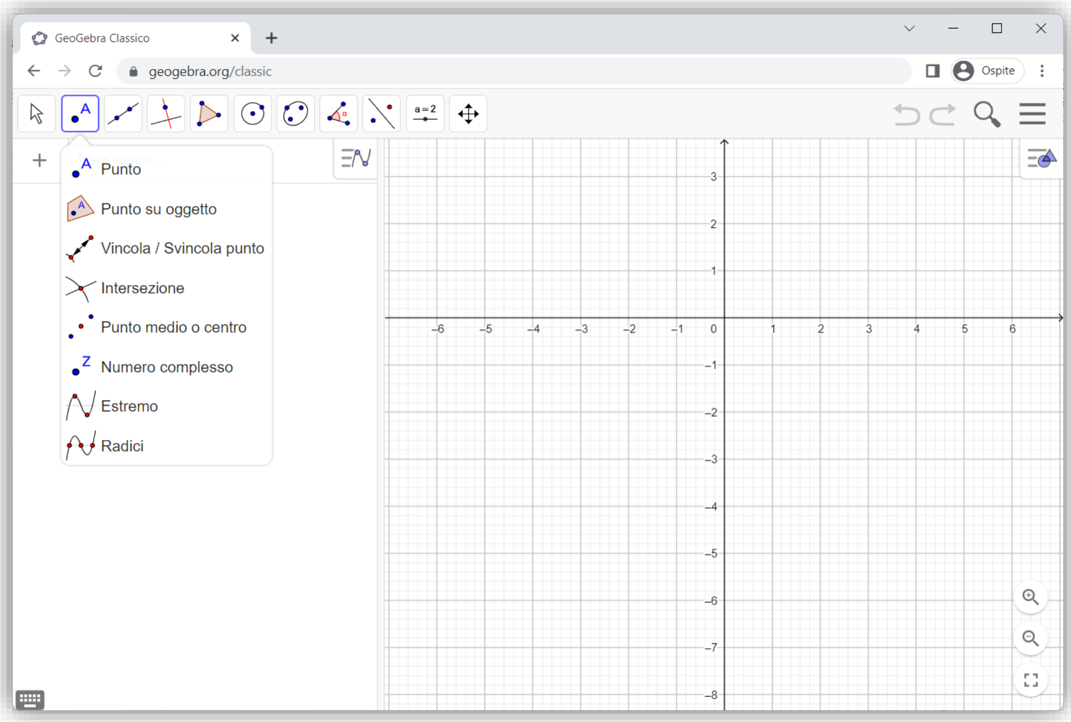


Figura 87: Un esempio con la casella degli strumenti del comando [Punto].

La *Vista Algebra* e la *Vista Grafici* sono in costante e dinamica comunicazione tra loro: a qualsiasi configurazione e costruzione geometrica realizzata nella *Vista Grafici* corrisponderà l'equivalente semiotico in termini algebrici nella *Vista Algebra* (e viceversa). D'altra parte, dal *Menu* è possibile personalizzare l'interfaccia scegliendo quali viste rendere visibili e dalla *Barra di stile* della *Vista Grafici* è possibile scegliere quali elementi (assi, griglia, etc.) visualizzare. A titolo di esempio, in Figura 88 è mostrata l'interfaccia di *GeoGebra Classico 2D* (Figura 85) con visibile solo la *Vista Grafici* senza assi né griglia:

[119] La [Barra degli strumenti] è completamente personalizzabile sia attraverso la scelta di quali pulsanti visualizzare (https://wiki.geogebra.org/it/Barra_degli_strumenti) che attraverso la funzione di creazione di nuovi strumenti (https://wiki.geogebra.org/it/Strumenti_Personalizzati).

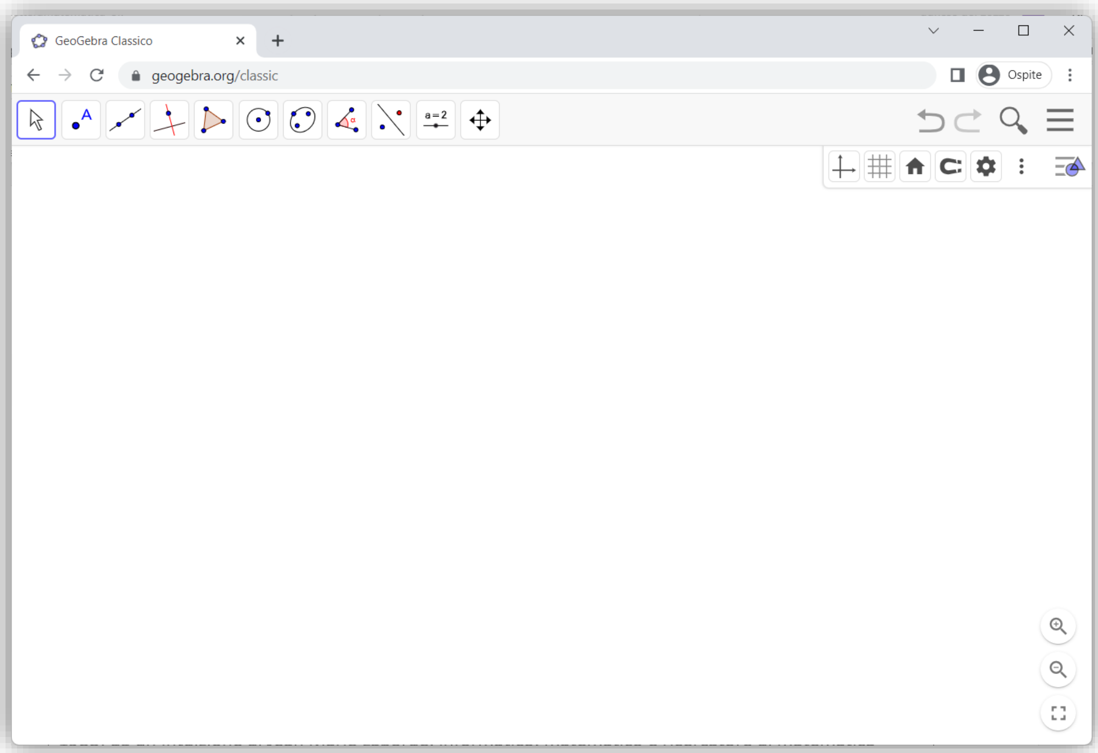


Figura 88: GeoGebra Classico con visibile solo la Vista Grafici senza assi né griglia.

Nella *Vista Grafica*, GeoGebra può gestire diversi tipi di *oggetti* geometrici (come, ad esempio, linee unidimensionali e regioni bidimensionali) e, dato un oggetto nella *Vista Grafica*, è possibile vincolare dei punti su di esso. Ad ogni costruzione realizzata corrisponde un [Protocollo di costruzione] e la funzionalità [Barra di navigazione], permette di visualizzare qualsiasi costruzione eseguita in maniera segmentata. Infine, GeoGebra permette di performare il movimento degli elementi presenti nella *Vista Grafica* in diversi modi, ad esempio attraverso il *trascinamento*[120], usando la funzionalità [Slider] o sfruttando (quando disponibile) la funzione di [Animazione automatica]. La funzione di trascinamento, una delle caratteristiche distintive dei software di geometria dinamica, è stata (ed è tutt'ora) oggetto di studio specifico nell'ambito della ricerca in didattica della matematica (si veda ad esempio Arzarello et al., 2002; Baccaglini-Frank & Mariotti, 2010).

[120] La funzione di trascinamento, una delle caratteristiche distintive dei software di geometria dinamica, è stata (ed è tutt'ora) oggetto di studio specifico nell'ambito della ricerca in didattica della matematica. In questa sede non entreremo nei dettagli della questione ma consigliamo al lettore curioso di approfondire i lavori di Arzarello et al. (2002) e Baccaglini-Frank & Mariotti (2010).

Per chi ha un account GeoGebra: Attività, Libri e GeoGebra Classroom

Chiunque abbia un account GeoGebra ha la possibilità di creare delle *Attività* ciascuna delle quali, sostanzialmente, è una singola pagina web[121] che permette di incorporare una sequenza di [Elementi] di diversa natura (Figura 89): componenti discorsive del testo (verbali e, usando l’editor LaTeX[122] incorporato, simboliche) digitabili direttamente, applet e schermate di (una delle App) GeoGebra o di *GeoGebra Note*, elementi [Domanda] (che permettono a chi svolge l’attività di interagire scrivendo), file di diverso tipo (come ad esempio immagini e PDF), video e miniature di intere pagine web.

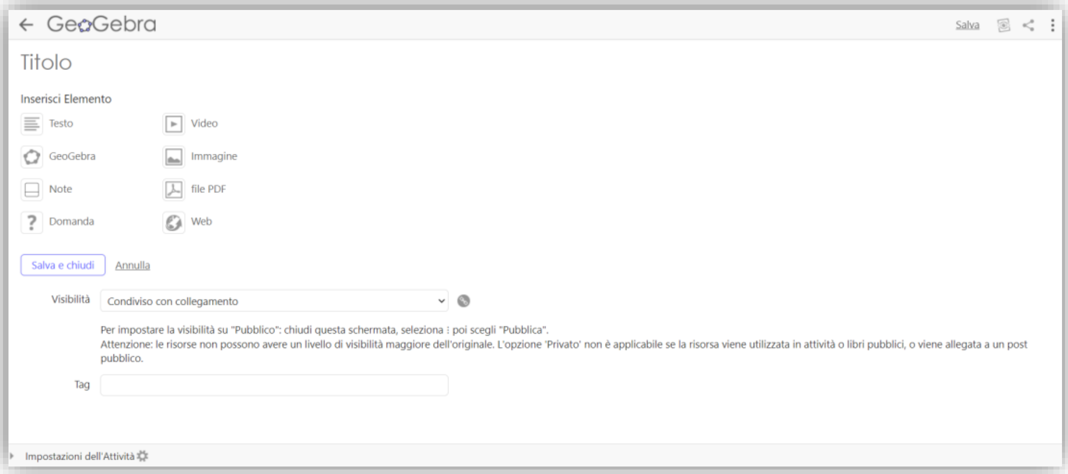


Figura 89: Editor di Attività GeoGebra.

GeoGebra offre anche l’opportunità di creare dei *Libri GeoGebra*, cioè delle collezioni di *Attività* organizzate in capitoli (Figura 90). Ad ogni *Libro GeoGebra* è associato un link, così come è associato un link a ciascuna delle attività che lo compone.

[121] dunque: a ciascuna *Attività* è associato un link a cui è possibile configurare diversi livelli di visibilità.
[122] https://www.latex-project.org/

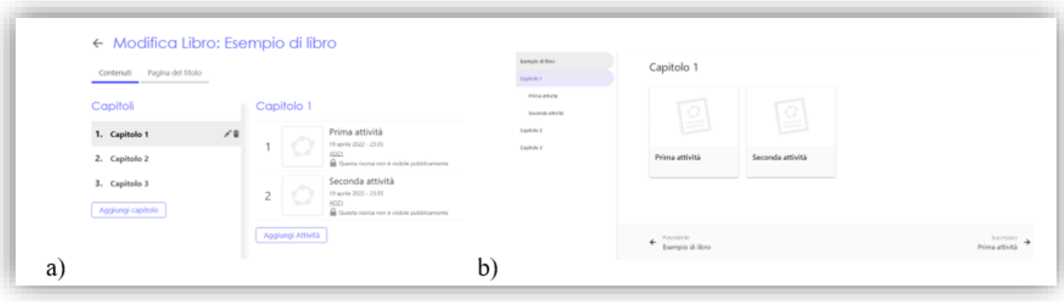


Figura 90:Editor di Libri GeoGebra (parte a) e Libro GeoGebra visualizzato (parte b).

Quando un'*Attività GeoGebra* o un *Libro GeoGebra* contiene almeno un elemento di tipo [Domanda] o di tipo applet GeoGebra, è possibile creare una *GeoGebra Classroom* associata. *GeoGebra Classroom* è una classe virtuale a cui è possibile accedere con il ruolo di docente o con il ruolo di studente. Il docente (che può essere anche più di uno perché sono classi virtuali che supportano la condivisione con più account) può monitorare in tempo reale dal proprio dispositivo il lavoro svolto dagli studenti e ha due modalità di visualizzazione:

- panoramica dell'intera classe, come esemplificato in Figura 91, con un riquadro per ciascuno studente il cui contenuto si aggiorna ogni 3 secondi sulla base di ciò che lo studente fa nel suo dispositivo;
- dettaglio del lavoro del singolo studente, come esemplificato in Figura 92, in cui vengono mostrate delle anteprime dinamiche delle costruzioni realizzate da quello studente che il docente può esplorare dal proprio dispositivo (senza che però le sue azioni abbiano un qualche effetto sul lavoro dello studente). Questa possibilità è didatticamente molto potente perché permette in tempo reale di analizzare in profondità il lavoro dello studente (ad esempio trascinando elementi della costruzione o aprendo il [Protocollo di costruzione]) ma di farlo in modo discreto, da "dietro le quinte".

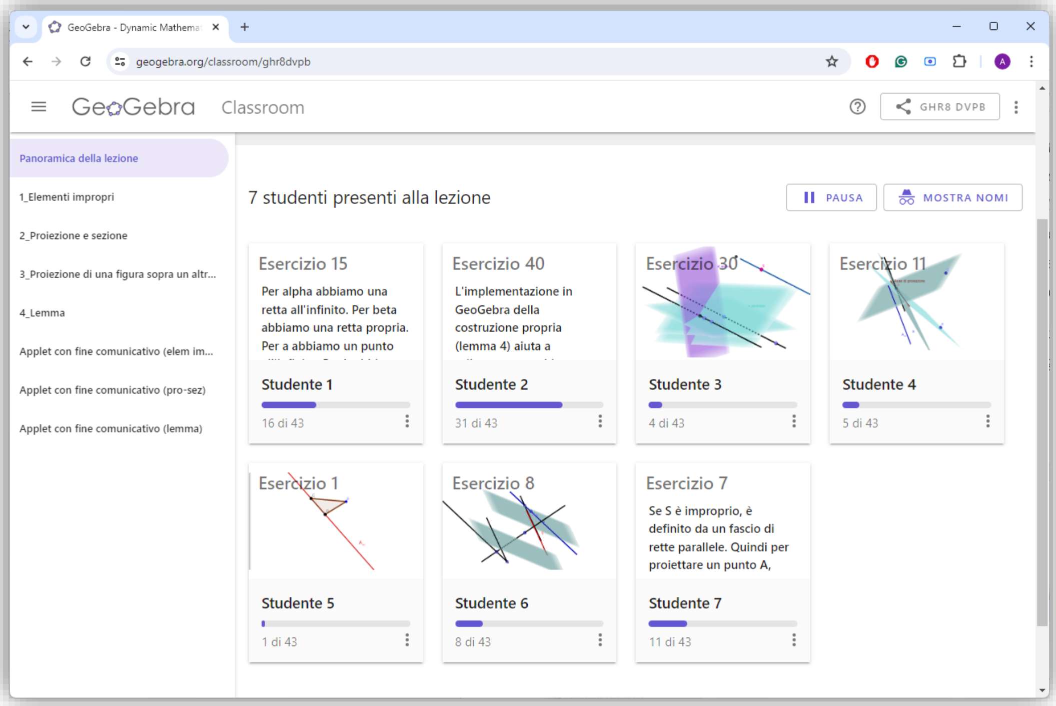


Figura 91: Esempio di schermata dell’account docente con visualizzazione dell'intera classe partecipante.

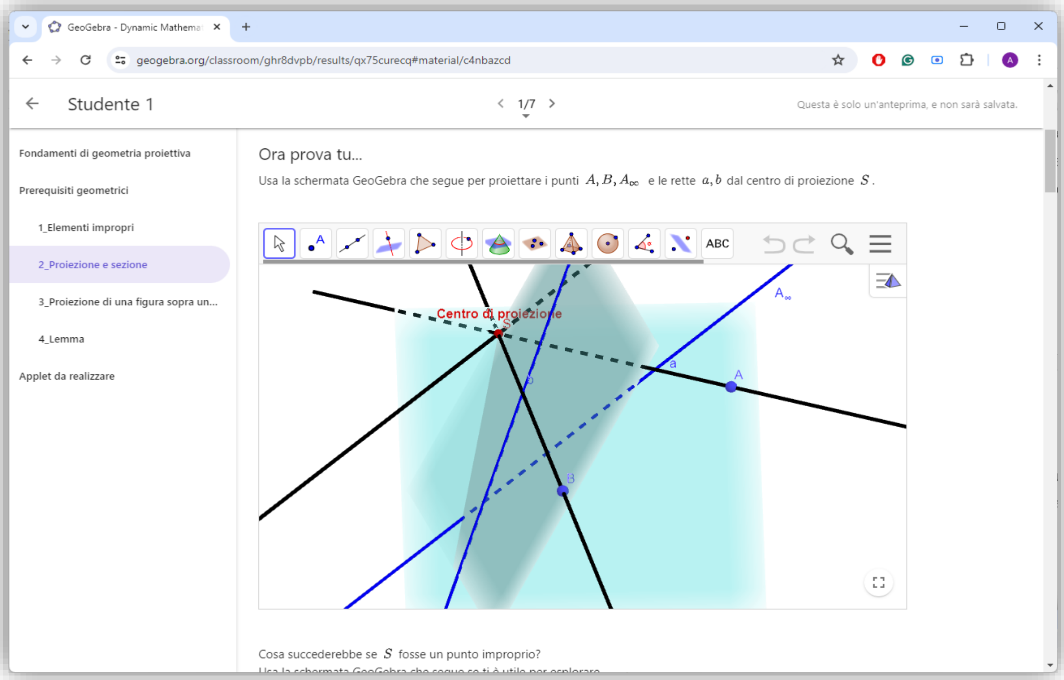


Figura 92: Esempio di schermata dell'account docente con visualizzazione del dettaglio di uno degli studenti.

Lo stato finale del lavoro dello studente rimane poi automaticamente archiviato in quella *GeoGebra Classroom* e il docente può accedervi ogni volta che vuole.

Con il ruolo di studente si può accedere alla classe virtuale anche senza avere un account GeoGebra[123] e ciascuno studente, nel proprio dispositivo, visualizza e interagisce solo il proprio lavoro (senza poter vedere o accedere a quello degli altri studenti della classe virtuale).

[123] La differenza è che, se lo studente ha un account GeoGebra, può riaprire il proprio lavoro anche in sessioni successive; se lo studente non ha un account, una volta chiusa la finestra della classe virtuale, non avrà modo di riprendere il lavoro dal punto in cui l'aveva interrotto.

Appendice B

Pensando alla GGBZ di un testo matematico storico di pubblico dominio come un processo per produrne nuove edizioni, una delle domande che ci siamo fatti all'inizio è: che struttura potrebbe avere tale nuova edizione? Alla luce delle varie esplorazioni fatte nelle fasi iniziali del mio percorso di dottorato, quelle che segnano la genesi del lavoro qui presentato e descritto, abbiamo delineato alcune prime linee guida in cui il prodotto finale è *un sistema di Libri GeoGebra* composto da:

- Un *Libro GeoGebra* base, che chiameremo *Libro originale*, creato mantenendo fedeltà all'opera originale. Il *Libro Originale* conterrà uno spazio, o *Capitolo* per ogni capitolo del libro e una *Attività* per ogni paragrafo; le componenti discorsive e iconiche del testo originale saranno, rispettivamente, la trascrizione letterale del testo e gli screenshots delle immagini dell'opera originale digitalizzata in formato .pdf. Sfruttando le funzionalità dell'ambiente *Libro GeoGebra*, sarà possibile anche rendere effettivi tutti i collegamenti previsti tra i diversi paragrafi (si veda Figura 14) e ricostruire la bibliografia completa. Infatti, come abbiamo visto in Sezione 2.1.1, non sempre nei testi storici le fonti indicate nel corpo del testo vengono poi raccolte in una bibliografia riassuntiva finale e farlo oggi permetterebbe anche di rintracciare anche eventuali digitalizzazioni disponibili sul web.
- Degli altri *Libri GeoGebra,* che potremmo chiamare *Libri delle costruzioni,* organizzati mettendo un *Capitolo* per ciascun paragrafo costituito da una serie di *Attività*, ciascuna corrispondente alla geogebrizzazione di particolari porzioni di testo che si prestano alla realizzazione di una forma di visualizzazione dinamica esterna.

Poi, una volta realizzati sia il *Libro originale* che i vari *Libri delle costruzioni*, il collegamento tra essi sarà implementato nel seguente modo: nel *Libro originale*, in corrispondenza degli estratti che sono stati geogebrizzati, si inseriscono dei link che rimandano ai relativi prodotti della GGBZ.

Alcuni esempi sono raccolti al seguente link: https://docs.google.com/document/d/114bI2ivgPm6_7kz0Dil3dM-Su3SpCOetAVC1z9ZjYDQ/edit#heading=h.8dt3ym49l368

Appendice C

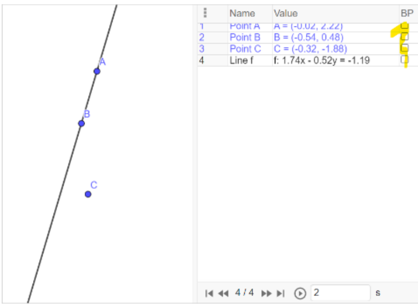
Alla luce dell'intera sperimentazione, ho raccolto alcune domande e alcuni desideri che ho mandato ad uno degli sviluppatori di GeoGebra: in questa Appendice riporto ciò che ho scritto. Grazie alla sua risposta, sono venuta a conoscenza di alcune funzionalità che permetterebbero di esprimere praticamente tutte le esigenze di comunicazione emerse dalle varie coppie durante il loro lavoro nel Problema 9. Tali funzionalità sono riassunte nella Sezione 6.5.

Two bugs notification, some wishes and one technical question about GeoGebra 😊

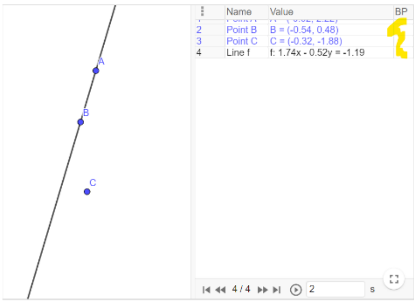
Two bugs

- You are in the *edit mode* of an Activity and you create a GeoGebra Applet in it, in which you have: a construction, the [Construction protocol] is opened, and the column of [Breakpoints] is visible. If you save the Applet and then switch to the *view resource* mode of the Activity, the [Breakpoints] column does not show the checkboxes (see the following pictures):

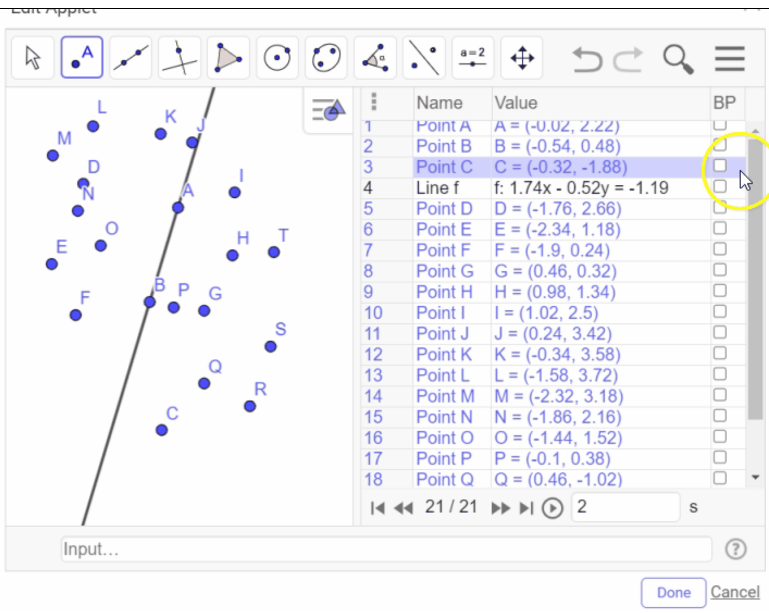
In the edit mode for the Activity



In the View resource mode for the Activity



- You have a GeoGebra Applet with the [Construction protocol] opened, which contains many steps (i.e. you have the scroll bar to navigate through them). If you insert a breakpoint in a step that can be reached by scrolling (for example, it is the last step of your construction), the list immediately autonomously scrolls to the top (see the following gif…and please ignore the idiotic construction!).



Some wishes

About GeoGebra apps

- You have a [Text] object with more than one word in it. As far as I understand, if you want to apply a certain format to only a portion of that text, you have to use LaTeX commands. It would be much easier if there were buttons to do this (maybe even buttons that just automatically write the necessary code to the selected text).
- Now, as far as I understand, the hiding/showing of a particular object in your construction is a "global" property of the entire file. This means that it is not possible to have it as a “local event” that can become part of the [Construction protocol] (which would allow one to insert a breakpoint on the “step” of hiding or showing an object) However, this could be very powerful functionality…and I wonder if in the future it can be possible... :)
- The last big dream is to be able to group and align text blocks.

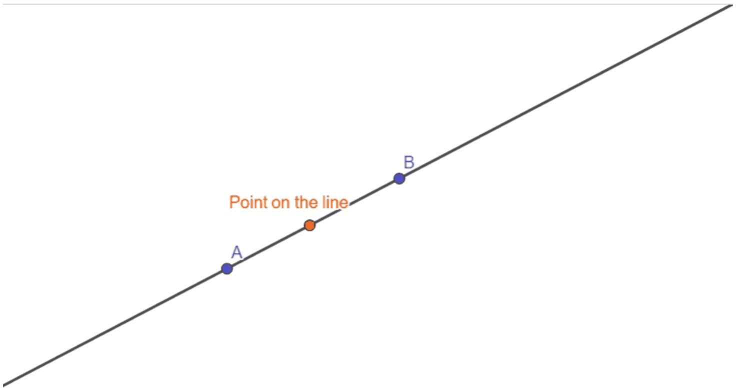
About GeoGebra Classroom

- I have used it in many contexts, and I really love GeoGebra Classroom! The only thing I miss when using it is the ability to have private and public interactions between teacher and students (both ways).

One (technical) questions

Situation: You have a line and you construct a point on that line. Then, you animate the point: it starts moving on the line, it disappears from the screen and then... it reappears from the other side of the line (see the following gif).

Question: Why does the animation of a point on a line behave this way from a technical point of view? Let me tell you: I love such a behavior! From the point of view of projective geometry (which is the field I am working on with my thesis), it is really interesting! I am just curious about the technical reasons, about the “source code” behind it.



Ringraziamenti

Voglio chiudere questa tesi ringraziando le persone che, in diversi modi, hanno permesso a questo lavoro di raggiungere la sua “forma finale” (ma forse è più corretto dire il suo “nuovo punto di partenza”).

Ringrazio di cuore Giorgio Bolondi e Claudio Fontanari per avermi sostenuta, guidata e incoraggiata in questo viaggio che in molti momenti mi appariva troppo grande e difficile da fare. Ringrazio i revisori della tesi per i preziosi feedback e i profondi suggerimenti.

LT1, LT2, RGA1, RGA2, DDM1, DDM2, DDI1 e DDI2 avranno la mia eterna gratitudine per la loro disponibilità, la preziosa collaborazione, per il tempo che mi hanno dedicato e per la generosità nella partecipazione. Senza il loro prezioso contributo questa tesi non esisterebbe. Per le stesse ragioni, un grazie enorme va anche a LM1, LM2, LM3, LM4 e ADR.

Ringrazio le mitiche segretarie per la loro infinita pazienza e costante premura!

Ringrazio Enrico Rogora per i molti “10 minuti” di chiacchiere e per i momenti di confronto e discussione.

Grazie di cuore a Giulia Bini non solo per il sostegno e l’incoraggiamento ma anche per avermi permesso di entrare in contatto con la JKU a Linz.

Ringrazio Zsolt Lavicza e in generale tutto il gruppo della JKU per avermi accolta tra loro durante il periodo di visiting. Ormai è come avere una famiglia là e di questo sono davvero grata! Un “grazie lavorativo” speciale a Mathias per gli esperimenti e a Fabián per gli illuminanti suggerimenti.

Grazie ad Alberto per le riletture e i preziosi suggerimenti e spunti di riflessione; a Giorgissimo e Miglena perché ogni confronto con loro mi illumina; ad Alessandro e Carlotta perché lavorare con loro mi arricchisce.

Grazie a Silvia per il sostegno e..i cazziatoni di supporto alla lotta contro le mie inutili ossessioni e puntigliosità! Averti così lavorativamente vicina mi dà un sacco di energia!

Grazie ad Ale e Marzia per…eh! Ecco, qui dovrei scrivere almeno 50-60 pagine di motivi quindi forse è meglio che riassuma tutto in qualcosa di molto specifico e contestuale: grazie per avermi impedito di non arrivare alla fine.

Grazie a giacomoscettri non solo per il supporto, l’incoraggiamento, i proof reading, e l’amatriciana ma anche per la pazienza nel tollerare il mio slittamento continuo e i miei stati di tunnel.

Un ringraziamento speciale va a tutta la mia famiglia (e le varie co-famiglie), perché (ancora una volta) è solo grazie a loro; stavolta però, devo anche aggiungere una specifica ”dedica gratitudine” al *Pacchetto tesi plus del zozzo silla* comprensivo di “vitto alloggio supporto psicologico e alessia momy”. Consigliato!

Grazie di cuore a tutti i Deliranti dal GPTunnel: ma come avrei fatto a sopravvivere senza di voi??? Non mi sono mai sentita sola nel delirio ed è una delle sensazioni più confortanti del mondo!

Grazie agli altri del *terzo anno* + di dottorato, compagni di avventura!

Un ringraziamento speciale va a tutti i partecipanti e organizzatori dei tanti nidi di ricerca e di formazione vissuti in questi anni: il confronto con ciascuno di loro è stato prezioso sia per aggiungere tasselli al lavoro sia per confortare lo stress e la stanchezza.

Grazie a Stefano perché mi ha incoraggiata e sostenuta nel momento in cui, anni fa, è stato chiaro che questa fosse, per me, *la* direzione.

Grazie allo psic perché il confronto con lui è stato (ed è) fondamentale per farmi tenere insieme i pezzi e arrivare in fondo a (quella che spero sia solo la prima tappa di) questo viaggio.

Ora: ci sono ancora un sacco di altre persone che vorrei nominare e ringraziare esplicitamente ma superare una pagina di ringraziamenti mi pare già abbastanza imbarazzante. Quindi, per ora, mi fermo qui.

C’è però un ultimo grazie che vorrei venisse stampato insieme a questa tesi: sono grata a tutti quei “No” che, alla fine, sono proprio ciò che ha permesso a questo lavoro di materializzarsi.